МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

Комбинаторика

Методические указания

к изучению курса **«Дискретная математика»**
для студентов специальностей:
1-53 01 02 Автоматизированные системы обработки информации,
1-40 03 01 Искусственный интеллект

Брест 2016

УДК 004.45/.8(072)

В методических указаниях рассмотрена теория по тем разделам комбинаторики, которые изучаются в курсе дисциплины «Дискретная математика». Все рассматриваемые понятия пояснены на примерах и задачах. В конце каждой темы приведены задачи для самостоятельного решения.

Методические указания предназначены для использования студентами специальностей 1-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации» и 1-40 03 01 «Искусственный интеллект» в ходе изучения курса «Дискретная математика».

Составители: Глущенко Т.А., старший преподаватель кафедры ИИТ
Швецова Е.В., старший преподаватель кафедры ИИТ
Шуть В.Н., доцент кафедры ИИТ, к.т.н., доцент

Рецензент: Худяков А.П., доцент кафедры прикладной математики и информатики Учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дискретная математика является важной составляющей в системе подготовки инженеров специальностей «Автоматизированные системы обработки информации» и «Искусственный интеллект», поскольку понятия, методы и алгоритмы дискретной математики широко применяются как в информатике в целом, так и в практическом программировании.

Данное методическое пособие разработано в соответствии с учебными программами по дисциплине « Дискретная математика» для специальностей 1-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации» и 1-40 03 01 «Искусственный интеллект».

В данном пособии рассмотрена теория по выбранным разделам комбинаторики, изучаемой в курсе дисциплины «Дискретная математика», приведены и разобраны многочисленные примеры и задачи по курсу. Каждое вводимое понятие поясняется на примерах. В конце каждой темы приведены задачи для самостоятельного решения.

ТЕМА №1 ПРАВИЛО СУММЫ И ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

В комбинаторике существуют два *основных правила – правило суммы и правило произведения*.

Сформулируем *правило суммы* на языке теории множеств.

Пусть $S_1, S_2, ..., S_m$ – *попарно непересекающиеся множества* ($S_i \cap S_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$), и пусть для каждого i множество S_i содержит n_i элементов. Количество вариантов выбора одного элемента из S_1 или S_2 или ... или S_m равно $n_1 + n_2 + ... + n_m$.

Запишем приведенное правило в виде формулы:

$|S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_m| = |S_1| + |S_2| + ... + |S_m|$.

Правило суммы иногда называют правилом *«или»*.

Сформулируем правило суммы для двух объектов ($m = 2$) в иной форме.

Если некоторый объект А можно выбрать т способами, а объект В можно выбрать другими п способами, то выбор либо А, либо В (А или В) можно осуществить т + п способами.

К примеру, если на первой полке стоит *5* книг по физике, а на второй *10* книг по математике, то выбрать книгу из первой *или* второй полки можно *5 + 10 = 15* способами.

И, как мы уже говорили, при использовании правила суммы надо следить, *чтобы ни один из способов выбора объекта А не совпадал с каким-нибудь способом выбора объекта В*. Если такие совпадения есть, мы получаем лишь *т + п - k* способов выбора, где *k* – число совпадений.

Сформулируем *правило произведения*.

Если объект x_1 может быть выбран n_1 способами, после чего объект x_2 может быть выбран n_2 способами и для любого *i*, где $2 \leq i \leq m-1$, после выбора объектов $x_1, ..., x_i$ объект x_{i+1} может быть выбран n_{i+1} способами, то выбор упорядоченной последовательности $(x_1, x_2, ... x_m)$ можно осуществить $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_m$ способами.

Теперь также сформулируем правило произведения для двух объектов.

Если объект А можно выбрать т способами и если после каждого такого выбора объект В можно выбрать п способами, то выбор пары объектов *(А, В)* в указанном порядке можно осуществить $(m \cdot n)$ способами.

Правило суммы иногда называют правилом *«и»*

Вернувшись к нашему примеру с книжными полками, имеем, что выбрать одну книгу с первой полки *и* одну книгу со второй можно $5 \cdot 10 = 50$ способами.

Рассмотрим задачу на применение правила произведения.

Задача 1.

Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

Решение.

В таких числах последняя цифра будет такая же, как и первая, а предпоследняя – как и вторая. Третья цифра будет любой. Это можно представить в виде $\underline{XYZYX}$, где Y и Z – любые цифры от *0* до *9*, X – не может быть нулем, поэтому для X имеем 9 вариантов выбора цифры. Значит, по правилу произведения количество пятизначных чисел, одинаково читающихся как слева направо, так и справа налево, равно $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ вариантов.

Рассмотрим задачу на применение обоих правил.

Задача 2.

Сколько трехзначных чисел начинается с цифры *3* или *4*?

Решение.

Трехзначные числа, о которых идет речь в задаче, естественным образом разбиваются на два *непересекающихся* класса. К первому классу относятся числа, начинающиеся с *3*, ко второму – с *4*.

Подсчитаем количество чисел в первом классе. Первую цифру в числе мы можем выбрать одним способом, это *3*. Для второй цифры существует *10* вариантов выбора, для третьей – также *10*. По правилу произведения получаем, что всего чисел в первом классе равно $1 \cdot 10 \cdot 10 = 100$. Аналогично подсчитываем количество чисел во втором классе. Оно также равно *100*. И наконец, по правилу суммы получаем, что существует *100 + 100 = 200* трехзначных чисел, начинающихся с цифры *3* или *4*.

Мы познакомились в теории множеств с *формулой включений и исключений*.

Правило суммы можно рассматривать как *частный случай* этой формулы, сформулированной для *попарно непересекающихся множеств*.

Вернемся к формуле включений и исключений и сформулируем ее несколько иначе.

Пусть X – конечное множество, состоящее из N элементов, и $a_1, a_2, ..., a_n$ – некоторые свойства, которыми могут обладать или не обладать элементы из X. Обозначим через $N(a_1)$ количество элементов, обладающих свойством a_1, через $N(a_1, a_2)$ – количество элементов множества X, обладающих одновременно свойствами a_1, a_2, …, через $N(a_1, a_2, ..., a_k)$ – количество элементов множества X, обладающих одновременно свойствами $a_1, a_2, ... a_k$ соответственно. Обозначим через $N(\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n})$ количество элементов, не обладающих ни одним из свойств $a_1, a_2, ... a_n$.

Общий закон состоит в том, что:

$$N(\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}) = N - N(a_1) - N(a_2) - ... - N(a_n) + N(a_1, a_2) + ... + N(a_1, a_n) - N(a_1, a_2, a_3) +,,,$$
$$+ (-1)^n N(a_1, a_2, ... a_n).$$

Здесь алгебраическая сумма распространена на все комбинации свойств $a_1, a_2, ... a_n$ (без учета их порядка), причем знак «+» ставится, если число учитываемых свойств четно, и знак «-», если это число нечетно. Например, $N(a_1, a_3, a_6, a_8)$ входит со знаком «+», а $N(a_1, a_2, a_5)$ со знаком «-». Приведенную

ТЕМА №2 КОМБИНАТОРНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ

Дадим понятие выборки.

Набор (*комбинация*) из k-элементов множества $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ мощности n называется *выборкой объема k из n элементов* или *выборкой из n элементов по* k, или просто *(n,k) выборкой*.

Выборка называется *упорядоченной*, если существенным является не только состав элементов в ней, но и порядок их расположения. Две упорядоченные выборки считаются различными, если они отличаются либо составом элементов, либо порядком их расположения. Например, упорядоченные выборки *(1,2)* и *(2,1)* считаются различными, хотя и составлены из одних и тех же элементов.

Выборка называется *неупорядоченной*, если порядок следования элементов в ней не существенен. Так, соответственно, *{1,2}* и *{2,1}* считаются одной и той же неупорядоченной выборкой.

Как мы знаем, фигурные и круглые скобки подчёркивают отличие неупорядоченной выборки от упорядоченной.

В выборках может допускаться или не допускаться повторение элементов. Выборка, в которой все элементы попарно различны, называется *выборкой без повторений*, в отличие от *выборки с повторениями*, в которую могут входить одинаковые элементы.

В зависимости от указанных свойств выборки носят специальные названия.

- *(n,k)-размещением с повторениями* называется упорядоченная *(n,k)*-выборка, элементы в которой могут повторяться;
- *(n,k)-размещением без повторений* называется упорядоченная *(n,k)*-выборка, элементы которой попарно различны;
- *(n,k)-сочетанием с повторениями* называется неупорядоченная *(n,k)*-выборка, элементы которой могут повторяться;
- *(n,k)-сочетанием без повторений* называется неупорядоченная *(n,k)*-выборка, элементы которой попарно различны.

Рассмотрим пример, составим всевозможные *(3,2)*-выборки из элементов множества *M = {a,b,c}*.

1. *(a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,a), (b,c), (c,c), (c,a), (c,b)* – это *размещения с повторениями.* Их всего *9*.
2. *(a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b)* – это *размещения без повторений.* Их, очевидно, всего *6*.
3. *(a,b), (a,a), (a,c), (b,b), (b,c), (c,c)* – *сочетания с повторениями.* Их всего *6*.
4. *(a,b), (a,c), (b,c)* – *сочетания без повторений*. Их всего *3*.

При решении комбинаторных задач, в которых требуется определить количество некоторых выборок (*конфигураций*) из данного множества элементов, основным моментом является правильное определение характера выборок – упорядоченные это выборки или нет, с повторениями или без повторений.

формулу называют *формулой включений и исключений*, поскольку сначала исключаются все предметы, обладающие *хотя бы одним* из свойств $a_1, a_2, .., a_n$, потом включаются предметы, обладающие, *по крайней мере*, двумя из этих свойств, исключаются имеющие, *по крайней мере*, три и т. д.

Рассмотрим задачу на применение этой формулы.

Задача 3. «Решето Эратосфена».

Поставим такой вопрос: сколько чисел в первой сотне не делится ни на одно из чисел *2, 3, 5?*

Решение.

Обозначим через a_1 свойство числа делиться на *2*, через a_2 – свойство делимости на *3* и через a_3 – свойство делимости на *5*. Тогда $a_1 a_2$ означает, что число делится на *6*, $a_1 a_3$ означает, что оно делится на *10*, и $a_2 a_3$ – что оно делится на *15*. Наконец, $a_1 a_2 a_3$ означает, что число делится на *30*. Нам надо найти, сколько чисел от *1* до *100* не делится ни на *2*, ни на *3*, ни на *5*, то есть не обладает ни одним из свойств $a_1 a_2 a_3$. По *формуле включений и исключений* имеем:

$$N(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_n}) = N - N(a_1) - N(a_2) - N(a_3) + N(a_1, a_2) + N(a_1, a_3) + N(a_2, a_3) - N(a_1, a_2, a_3).$$

Но чтобы найти, сколько чисел от *1* до *N* делится на *n*, надо разделить *N* на *n* и взять целую часть получившегося частного. Поэтому имеем:

$N(a_1) = 50$. $N(a_2) = 33$. $N(a_3) = 20$. $N(a_1, a_2) = 16$. $N(a_1, a_3) = 10$. $N(a_2, a_3) = 6$.

$N(a_1, a_2, a_3) = 3$.

В результате получаем:

$$N(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}) = 100 - 50 - 33 - 20 + 10 + 16 + 6 - 3 = 26.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Сколько четырехзначных чисел, не превосходящих *6 000*, можно составить, используя только нечетные цифры?
2. Сколько существует целых чисел между *0* и *1000*, содержащих ровно одну цифру 6?
3. Сколькими способами можно выбрать две книги по разным темам, когда на полке находятся *15* книг по информатике, *12* книг по математике и *10* книг по химии?
4. Сколько существует номерных знаков для автомобилей, состоящих из двух латинских букв и последующих четырех цифр?
5. Сколько положительных целых чисел, меньших *1001*, делятся на *2*, *3* или *5*?
6. Пусть *S* – множество четырехзначных чисел, в чьей десятичной записи участвуют цифры: *0*, *1*, *2*, *3*, и *6*, причем *0* на первом месте естественно стоять не может. Какова мощность множества *S*? Сколько чисел из *S* в своей десятичной записи не имеют повторяющихся цифр?

Найдем, чему равно количество различных комбинаторных конфигураций.

Число *(n,k)-размещений с повторениями* обозначается, как $\overline{A_n^k}$ и вычисляется по формуле:

$$\overline{A_n^k} = n^k, \forall n,k \in N.$$

Полученную формулу мы можем получить следующими рассуждениями.

На первое место выборки мы можем поставить любой из n элементов множества, т. е. у нас n способов выбора первого элемента. Поскольку повторения разрешены, то на второе место мы опять можем поставить любой элемент из того же множества и так далее, вплоть до места с номером k, выбрать который мы можем также n способами. По правилу произведения и получаем указанную формулу.

Рассмотрим задачи.

Задача 1.

Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

Решение. Так как порядок цифр в числе существенен, цифры могут повторяться, то это будут размещения с повторениями из пяти элементов по три *(n=5, k=3)*, а их число равно $\overline{A}_5^3 = 5^3 = 125$.

Эту задачу мы могли бы решить, используя правило произведения.

Задача 2.

Сколькими способами можно раскрасить квадрат, разделенный на четыре части (на четыре равных квадрата) пятью цветами, допуская окрашивание разных частей в одинаковый цвет?

Решение. Порядок цветов имеет значение, цвета могут повторяться, следовательно, это *(5,4)- размещение с повторениями.* По формуле имеем:

$$\overline{A}_5^4 = 5^4 = 625.$$

Число всех *(n,k)-размещений без повторений* обозначается через A_n^k. Подсчитаем их число.

На первое место выборки мы можем поставить любой из n элементов множества, поскольку повторения не разрешены, то на второе место мы можем поставить любой из *(n-1)* оставшихся элементов. На третье место – из *(n-2)* и так далее, вплоть до k места, куда можно поставить любой из *(n-k+1)*элементов. По правилу произведения имеем:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad k \le n.$$

Задача 3.

Сколько различных четырехзначных чисел можно образовать из цифр *1*, *2*, *3*,…,*9*, если все цифры в каждом числе различны?

Решение. Порядок цифр существенен, цифры не повторяются, это *(9,4)-размещение без повторений.* Имеем:

$$A_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024.$$

Задача 4.

Рассмотрим задачу о квадратах в предположении, что различные части окрашиваются разными цветами. В этом случае также имеем *(5,4) - размещение без повторений.* По формуле имеем:

$$A_5^4 = \frac{5!}{(5-4)!} = 5! = 120.$$

Размещения без повторений из *n* элементов по *n* называются *перестановками* из *n* элементов без повторений или *перестановками* множества *X*. Их число обозначается P_n и вычисляется по формуле:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!, \quad 0! = 1.$$

Перестановки удобно представлять матрицами. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 5.

Рассмотрим задачу об известном *квартете Крылова*. Вероятно, крыловские музыканты так и не перепробовали всех возможных мест. Однако способов не так уж и много. Здесь идет перестановка из четырех элементов, значит, число перестановок равно:

$P_4 = 4! = 24.$

Задача 6.

Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр *0*, *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, если цифры в числе не повторяются?

1. Найдем количество всех перестановок из этих цифр: $P_6 = 6! = 720.$

2. Цифра *0* не может стоять впереди числа, поэтому от этого числа необходимо отнять количество перестановок, при котором *0* стоит впереди. А это $P_5 = 5! = 120.$

В результате имеем:

$P_6 - P_5 = 720 - 120 = 600$ различных чисел.

Разупорядочением называется *перестановка n различных упорядоченных символов*, при которой ни один символ не остается на своем месте. Количество разупорядочений на *n* различных упорядоченных символах обозначается D_n.

Например, при $n = 3$, $D_3 = 2$ и разупорядочениями будут перестановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

В общем случае, для $n>1$ количество разупорядочений на *n* символах вычисляется по формуле:

$$D_n = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!})$$

Задача 7.

Семь джентльменов отправляются на вечеринку и сдают там свои шляпы. Сколькими способами непутевый гардеробщик может вернуть шляпы так, чтобы ни один из джентльменов не получил свою шляпу? Имеем разупорядочения из *7* элементов, их число равно:

$$D_7 = 7!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}) = 1854.$$

Рассмотрим *перестановки с повторениями.*

Пусть имеются предметы *r различных* видов. Сколько различных комбинаций (перестановок) можно сделать из n_1 предметов первого вида, n_2 предметов второго вида,..., n_r предметов вида *r?* Число предметов в каждой перестановке $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$.

Такие комбинации называются *перестановками с повторениями.* Их число обозначается $P(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ и вычисляется по формуле:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_r) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!}, n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r,$$

где *n* – количество всех элементов в перестановке, $n_1, n_2, \ldots, n_r$ – количество элементов каждого вида соответственно.

Задача 8.

Рассмотрим, сколькими способами можно переставить буквы в слове *«ананас»?*

В слове шесть букв. Среди них есть одинаковые буквы:

$"a", n_1 = 3$; $"н", n_2 = 2$; $"с", n_3 = 1$.

Следовательно, число различных перестановок равно:

$$P_6(3,2,1) = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = 60.$$

Задача 9.

Сколькими способами можно расположить в ряд *5* черных, *4* белых и *3* красных фишки?

Это перестановки с повторениями, имеем:

$$P_6(5,4,3) = \frac{12!}{5! \cdot 4! \cdot 3!} = 27720.$$

Число *(n,k)-сочетанием с повторениями* обозначается $\overline{C_n^k}$ и вычисляется по формуле:

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}, \forall n, k \in N.$$

Задача 10.

В кондитерском магазине продавались *4* сорта пирожных: эклеры, песочные, наполеоны и слоеные. Сколькими способами можно купить *7* пирожных?

Решение. Покупка не зависит от того, в каком порядке укладывают купленные пирожные в коробку. Сорта пирожных в покупке могут повторяться. Имеем сочетание с повторениями, *n = 4*, *k = 7*. $\overline{C_4^7} = \frac{(7+4-1)!}{7!(4-1)!} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120.$

Задача 11.

Цветочница продает розы четырех разных сортов. Сколько разных букетов можно составить из дюжины роз?

Решение. Каждый букет – это неупорядоченная выборка *12* роз с повторениями четырех возможных типов. Имеем число вариантов составления букета:

$$\overline{C}_4^{12} = \frac{(12+4-1)!}{12!(4-1)!} = \frac{15!}{12!\cdot 3!} = 455$$

Сочетаниями без повторений из n элементов по k называются неупорядоченные k-выборки из n элементов без повторений. Каждое *(n,k)-сочетание без повторений* можно упорядочить $k!$ различными способами и получить $k!$ различных *(n,k)*-размещений без повторений. Таким образом, количество вариантов при сочетании будет меньше количества размещений в $k!$ раз. Их число обозначается C_n^k и вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ k \le n.$$

Сочетания из n по k без повторений образуют *k-элементарные подмножества* исходного множества мощности n.

Задача 12.

Сколько трехкнопочных комбинаций существует на кодовом замке (все три кнопки нажимаются одновременно), если на нем всего *10* цифр.

Решение. Так как кнопки нажимаются одновременно, то выбор этих трех кнопок – сочетание. Отсюда возможное количество комбинаций:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{6} = 120 \text{ вариантов.}$$

Задача 13.

У одного человека *7* книг по математике, а у второго – *9*. Сколькими способами они могут обменять друг у друга две книги на две книги.

Решение. Так как порядок следования книг не имеет значения, то выбор двух книг – сочетание. Первый человек может выбрать *2* книги из *7*

$$C_7^2 = \frac{7!}{(7-2)!*2!} = \frac{6*7}{2} = 21 \text{ способами.}$$

Второй человек может выбрать *2* книги из *9*

$$C_9^2 = \frac{9!}{(9-2)!*2!} = \frac{8*9}{2} = 36 \text{ способами.}$$

Значит, всего по правилу произведения возможно $21\cdot 36 = 756$ вариантов обмена книг.

Числа C_n^k называются *биномиальными коэффициентами*, поскольку они возникают как коэффициенты при раскрытии скобок в *биноме Ньютона.*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k,\ n \in N.$$

Используя эту формулу, найдем, например, разложение $(a+b)^3$:

$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$.

Получили всем известное соотношение. Напомним, что $C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Сколькими способами можно выбрать комитет, включающий *6* мужчин и *8* женщин, из группы, состоящей из *12* мужчин и *20* женщин?
2. В скачках участвуют десять лошадей. Сколько существует вариантов призовой тройки лошадей?
3. Пять пар идут в кино. Сколькими способами они могут занять места, если а) они могут сидеть в любом порядке? б) все пять пар сидят подряд?
4. Пароль на компьютере состоит из шести символов. Первые два из них строчные буквы латинского алфавита (всего *26* букв), а оставшиеся четыре могут быть как цифрами, так и строчными буквами. Сколько можно придумать различных паролей?
5. Комитет из *20* членов избирает председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?
6. Предстоит выбрать команду четырех игроков в гольф из пяти профессиональных игроков и пяти любителей. Сколько разных команд может состоять из трех профессионалов и одного любителя?
7. Сколько четырехзначных чисел, не превосходящих 6 000, можно составить, используя только нечетные цифры?
8. Имеется семь различимых шаров и требуется положить три шара в первую коробку, два шара – во вторую и два шара – в третью коробку. Сколькими способами можно это сделать?
9. Предположим, что *12* книг, включающих *4* одинаковых учебника по математике, *6* одинаковых учебников по информатике, *2* одинаковых учебника по химии, следует расставить на полке. Сколькими способами это можно сделать?
10. Пусть задано множество $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Сколько существует а) трехэлементных подмножеств множества A? б) пятиэлементных подмножеств множества A, содержащих b? в) пятиэлементных подмножеств множества А, не содержащих b?
11. Сколько существует способов разделить *10* человек на две команды по *5* человек для игры в баскетбол?
12. Сколькими способами можно расставить в ряд для фотографирования пять мальчиков и шесть девочек, если ни две девочки, ни два мальчика не должны стоять рядом?
13. В зоомагазине продаются *5* черепах, *7* ящериц и *12* мышей. Сколько существует способов выбрать себе *2* черепахи, *3* ящерицы и *5* мышей?

ТЕМА №3. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Дадим определение *последовательности*. Если каждому натуральному числу $n \in N$ поставлен в соответствие какой-то элемент a_n из некоторого множества A, то говорят, что задана последовательность элементов множества A: $\{a_n\} = a_1, a_2, ..., a_n, ...$ Это могут быть последовательности чисел или элементов какого-то другого множества. Например, последовательность биномиальных коэффициентов $C_n^0, C_n^1, ..., C_n^k, ... C_n^n$ при фиксированном значении числа n – пример *конечной* последовательности целых положительных чисел. Если мы знаем, как определяется элемент последовательности a_n при каждом значении $n \in N$, то такое задание последовательности называется *явным*. Например, значение биномиальных коэффициентов вычисляется по формуле: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Последовательность может быть описана *неявно*, *рекурсивно* – с помощью *рекуррентного соотношения*.

Последовательность $\{a_n\}$ называется *рекуррентной порядка k* $(k \in N)$, если существует формула $a_{n+k} = f(a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, ..., a_n)$, с помощью которой каждый последующий элемент последовательности a_{n+k} вычисляется через предыдущие элементы $a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, ..., a_n$. Данная формула называется *рекуррентным соотношением порядка k*. Заметим, что *первые k элементов* последовательности должны быть заданы.

Например, последовательность чисел *Фибоначчи 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...*задается рекуррентным соотношением *2-го* порядка, данную числовую последовательность мы обозначили как $\{f_n\}$:

$$\begin{aligned} &f_0 = 0, \;\; f_1 = 1 \\ &f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \;\; n \geq 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Последовательность *Фибоначчи* является частным случаем *линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами порядка k*. В общем случае они имеют вид:

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + ... + c_k a_n, \qquad c_k \neq 0, \qquad (2)$$

где $c_1, c_2, ..., c_k$ – постоянные коэффициенты,

$a_1, a_2, ..., a_k$ – k начальных условий (начальные значения последовательности $\{a_n\}$). (2a)

Существует общий метод решения (т. е. отыскания a_n как функции n) данных рекуррентных соотношений. Мы рассмотрим методику решения *линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами порядка k* на примере задачи *Фибоначчи – (1)*.

Решение рекуррентного соотношения будем искать в виде:

$f_n = p^n$.

Подставив это решение в рекуррентное соотношение *(1)*, получим:

$p^{n+2} = p^{n+1} + p^n$.

Разделив обе части этого соотношения на $p^n \neq 0$, имеем:

$p^2 = p^1 + 1$.

Или

$p^2 - p^1 + 1 = 0$.

Это уравнение называется *характеристическим* для данного рекуррентного соотношения. Решив квадратное уравнение, получим:

$p_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Общее решение нашего рекуррентного соотношения имеет вид:

$$f_n = cp_1^n + dp_2^n, \qquad (3)$$

подставив в *(3)* корни характеристического уравнения, имеем:

$f_n = c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + d\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Решение рекуррентного соотношения k *–го* порядка называется *общим*, если оно зависит от k произвольных постоянных $c, d, \ldots$ и путем подбора этих постоянных можно получить любое частное решение данного соотношения. Используем начальные условия для нахождения коэффициентов c, d:

$f_0 = 0 = c + d$

$f_1 = c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + d\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$.

Решая систему, находим:

$c = -d \qquad c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - c\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$.

$c = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $d = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Подставив полученные коэффициенты в *(3)*, получим решение рекуррентного соотношения *(1)*для последовательности чисел *Фибоначчи*.

$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$,

формулу *Бине* для вычислений чисел *Фибоначчи*. Это выражение при всех натуральных значениях n принимает целые значения.

Рассмотрев ситуацию, когда характеристическое уравнение имело два различных действительных корня, перейдем к случаю кратных корней. В этом случае общее решение для рекуррентного соотношения *2-го* порядка будет иметь вид:

$$a_n = cp^n + dnp^n. \tag{4}$$

Рассмотрим пример, решим рекуррентное соотношение:

$a_0 = 2,\ a_1 = 6,$

$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2},\ n \geq 2$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$p^2 - 4p + 4 = 0.$

Решая его, получаем кратный корень $p = 2$.

Общее решение имеет вид:

$a_n = c2^n + dn2^n.$

Коэффициенты c, d найдем, исходя из начальных условий:

$a_0 = c2^0 + d0 \cdot 2^0 = 2 = c,$

$a_1 = c2^1 + d2^1 = 6 = 2c + 2d = 6$

Отсюда получаем $c = 2,\ d = 1$.

Решение имеет вид:

$a_n = 2 \cdot 2^n + n2^n = 2^n(n+2).$

Рассмотренные примеры позволяют изложить общий прием решения *линейных однородных рекуррентных соотношений порядка k с постоянными коэффициентами*. Рассмотрим рекуррентное соотношение *(2)*.

Будем предполагать, что характеристическое уравнение имеет простые корни. Решение соотношения ищем в виде: $a_n = p^n$.

Подставляя это выражение в *(2)* и разделив обе части на $p^n \neq 0$, получим полином k – степени:

$p^k = c_1p^{k-1} + c_2p^{k-2} + .. + c_k.$

Это уравнение имеет k корней: $p_1, p_2, ..., p_k$. Тогда общее решение соотношения имеет вид:

$a_n = \sum_{i=1}^{k} d_i p_i^n.$

Неизвестные коэффициенты d_i находим, используя начальные условия *(2a)*, которые позволяют составить систему линейных алгебраических уравнений относительно этих коэффициентов.

Последовательность биномиальных коэффициентов (числа сочетаний) можно также задать рекуррентным соотношением.

Приведем рекуррентное соотношение для числа сочетаний:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}. \tag{5}$$

Докажем его следующими рассуждениями. Составим *(n,k)*-сочетания изэлементов $a_1, a_2, ..., a_n$ некоторого множества A и разобьем их на два непересекающихся класса. Для этого зафиксируем некоторый элемент a_k. В первый класс войдут сочетания, содержащие элемент a_k, а во второй – сочетания, не содержащие этого элемента.

Рассмотрим первый класс. Т.к. один элемент a_k мы уже выбрали, то нам останется выбрать *(k-1)* элемент из *(n-1)* элементов. Число этих сочетаний равно C_{n-1}^{k-1}. Поэтому в первый класс входит C_{n-1}^{k-1} комбинации.

Сочетания второго класса являются *k*-сочетаниями, составленными из *(n*-1) элементов $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$. Поэтому их число равно C_{n-1}^{k}. Поскольку любое *k*-сочетание из элементов $a_1, a_2, ..., a_n$ принадлежит одному и только одному из этих классов, а общее число этих сочетаний равно C_n^k, то приходим к равенству:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

Полученное рекуррентное соотношение широко используется для вычисления числа сочетаний. На его основе составляется треугольник *Паскаля:*

```
            1
          1   1
        1   2   1
      1   3   3   1
    1   4   6   4   1
  1   5  10  10   5   1
1   6  15  20  15   6   1
```

В этом треугольнике строкам соответствуют значения $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ и так далее, а диагоналям – значения $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ и так далее (сверху вниз и слева направо). Каждое число внутри треугольника *Паскаля* равно сумме двух чисел, расположенных над ним.

Так, чтобы вычислить значение C_6^4 с помощью треугольника *Паскаля*, необходимо по горизонтали выбрать *7*-ю строку и *5*-ю диагональ (нумерация начинается с *0*). На пересечении имеем число *15*, что и является значением искомого сочетания.

Легко видеть, что каждый элемент строки треугольника Паскаля вычисляется из элементов предыдущей строки, согласно найденному рекуррентному соотношению: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Легко заметить, что *(n+1)*-й ряд состоит из коэффициентов разложения $(a+b)^n$. Например, при $n = 5$ имеем следующие коэффициенты в разложении: *1,5,10,10, 5,1.*

При разложении степени $(x_1+x_2+...+x_r)^n$ коэффициенты при произведениях $x_1^{n_1}x_2^{n_2}...x_r^{n_r}$, $n_1+n_2+...+n_r=n$, рассчитываются по формуле

$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$ *(число перестановок с повторениями)*

и носят название *полиномиальных* или *мультиномиальных* коэффициентов.
Например, вычислим коэффициент при произведении a^2bc в разложении $(a+b+c)^4$.

Он равен: $\frac{4!}{2!1!1!}=12$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Решить линейное однородное рекуррентное соотношение *2-го* порядка: $a_0=3,\ a_1=21,$
   $a_n=6a_{n-1}-9a_{n-2},\ n\ge 2$

2. Вычислить коэффициенты при произведении a^2b^3c в разложении $(a+b+c)^6$

3. Решить линейное однородное рекуррентное соотношение *2-го* порядка: $a_0=2,\ a_1=6$
   $a_n=4a_{n-1}-4a_{n-2},\ n\ge 2$

4. Разложить $(a+b)^4$.
5. Решить линейное однородное рекуррентное соотношение *2-го* порядка: $a_0=1,\ a_1=-8,$
   $a_n=-4a_{n-1}-4a_{n-2},\ n\ge 2$
6. Вычислить коэффициенты при произведении a^4bc в разложении $(a+b+c)^6$.
7. Решить линейное однородное рекуррентное соотношение *2-го* порядка: $a_0=-3,\ a_1=1,$
   $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2},\ n\ge 2$
8. Разложить $(a+b)^6$.
9. Решить линейное однородное рекуррентное соотношение *2-го* порядка: $a_0=2,\ a_1=6,$
   $a_n=-2a_{n-1}-a_{n-2},\ n\ge 2$

ЛИТЕРАТУРА

1. Андерсон, Д. Дискретная математика и комбинаторика. – СПб: Вильямс, 2003. – 960 с.
2. Хаггарти, Р. Дискретная математика для программистов. – М.: Техносфера, 2003. – 320 с.
3. Липский, В. Комбинаторика для программистов. – М.: Мир, 1988. – 200 с.
4. Кофман, А. Введение в прикладную комбинаторику – М.: Наука, 1975. – 480 с.
5. Нефедов, В.Н. Курс дискретной математики: учеб. пособие / В.Н. Нефедов, В.А. Осипова. – М.: Изд-во МАИ, 1992. – 264 с.
6. Новиков, Ф.А. Дискретная математика для программистов: учеб. пособие – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб.: Питер, 2003. – 364 с.
7. Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику. – М: Наука, 1986. – 384 с.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители:
Глущенко Татьяна Александровна
Швецова Елена Владимировна
Шуть Василий Николаевич

Комбинаторика

Методические указания

к изучению курса **«Дискретная математика»**
для студентов специальностей:
1-53 01 02 Автоматизированные системы обработки информации,
1-40 03 01 Искусственный интеллект

Ответственный за выпуск: Глущенко Т.А.
Редактор: Боровикова Е.А.
Компьютерная вёрстка: Соколюк А.П.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано в печать 06.12.2016 г. Формат 60x84 $^1/_{16}$. Бумага «Performer».
Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 1,16. Уч. изд. л. 1,25. Заказ № 1161. Тираж 50 экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.