УДК 517.9

Жук А.И.

АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

При исследовании дифференциальных уравнений, содержащих произведение обобщенных функций, возникает необходимость обобщения определения решения указанного типа уравнений, поскольку классическое определение решения оказывается непригодным. Многими авторами предложены различные способы трактовки решений некоторых классов нелинейных дифференциальных уравнений. Следует отметить, что различные трактовки одного и того же нелинейного уравнения приводят к различным решениям. Предпочесть ту или иную интерпретацию решения можно только изходя из условий практической здачи, которая моделируется при помощи нелинейного дифференциального уравнения.

В настоящей работе рассматривается следующая система уравнений с обобщенными коэффициентами на отрезке $T=[0;a]\subset R$:

$$\dot{x}^i(t)=\sum_{j=1}^{q} f^{ij}(x(t))\dot{L}^j(t),\ i=\overline{1,p} \tag{1}$$

$$x(0)=x_0, \tag{2}$$

где f^{ij} $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$ – липшицевы функции, $x(t)=\left[x^1(t),x^2(t),\ldots,x^p(t)\right]$, $x_0\in R^p$, а $L^j(t)$ $j=\overline{1,q}$ – функции ограниченной вариации на отрезке T, а $\dot{L}^j(t)$ – их обобщенные производные. Без ограничения общности будем считать, что функции $L^j(t)$ $j=\overline{1,q}$ непрерывны справа, $L^j(0)=L^j(0-)=0$ и $L^j(a-)=L^j(a)$ $j=\overline{1,q}$.

Рассмотрим основные подходы к трактовке решений данной задачи. Первый подход связан с попытками исследования задачи (1) – (2) в рамках теории обобщенных функций и упирается в проблему умножения разрывных функций на обобщенные, которая возникает в выражении $f^{ij}(x(t))\dot{L}^j(t)$ В работах [1, 2] вводится определение произведения разрывной функии на обобщенную, а затем ищется решение дифференциального уравнения.

Второй подход предполагает формальный переход к интегральному уравнению (см., например, [3]), где интеграл понимается в определенном смысле, например, в смысле Лебега-Стилтьеса, Перрона-Стилтьеса и т. д. Однако при таком толковании величины скачков решения будут зависеть от определения интегрируемой функции в точках разрыва функции $L(t)$.

Третий подход [2] опирается на идею аппроксимации искомого решения задачи (1) – (2) классическими, порожденными гладкими приближениями функции $L(t)$.

В настоящее время активно разрабатывается подход, связанный с рассмотрением уравнения (1) – (2) в алгебре новых обобщенных функций или мнемофункций. Впервые алгебра была построена в [4], а общий метод построения подобных алгебр описан в [5], там же был использован термин «мнемофункция» для обозначения новой обобщенной функции. В данной работе используется алгебра определенная в [6] (см., также [7]). Недостатком этого подхода является то, что полученное решение является новой обобщенной функцией. Поэтому возникает задача нахождения условий, при которых новая обобщенная функция определяет (ассоциирует) обычную функцию или распределение (обобщенную функцию).

В данной статье уравнение (1) рассматривается как уравнение в дифференциалах в алгебре мнемофункций и показывается, при каких условиях полученная в качестве решения мнемофункция ассоциирована с обычной, которую естественно назвать решением (1). Описан класс функций, которые могут быть решениями данного уравнения понимаемого в таком смысле.

Заменяя обычные функции, присутствующие в (1), на соответствующие им новые обобщенные функции получим запись уравнения в дифференциалах в алгебре мнемофункций (см. [6, 7]).

$$d_{\tilde{h}}\tilde{x}^i(\tilde{t})=\sum_{j=1}^{q}\tilde{f}^{ij}\left(\tilde{x}(\tilde{t})\right)d_{\tilde{h}}\tilde{L}^j(\tilde{t}),\ i=\overline{1,p} \tag{3}$$

с начальным условием $\tilde{x}\big|_{[\tilde{0},\tilde{h})}=\tilde{x}^0$, где $\tilde{h}=[\{h_n\}]\in H$, $\tilde{a}=[\{a\}]\in T$ и $\tilde{t}=[\{t_n\}]\in\tilde{T}$, $\tilde{x}=[\{x_n(t)\}]$, $\tilde{f}=[\{f_n(x)\}]$, $\tilde{x}^0=\left[\left\{x_n^0(t)\right\}\right]$, $\tilde{L}=[\{L_n(t)\}]$ и $x_{n0}\to x(0)$.

Если заменить в (3) каждую новую обобщенную функцию представителем класса, ее определяющего, получим запись задачи (3) на уровне представителей

$$x_n^i(t+h_n)-x_n^i(t)=\sum_{j=1}^{q}f_n^{ij}(x_n(t))\left[L_n^j(t+h_n)-L_n^j(t)\right],$$

$$i=\overline{1,p}; \tag{4}$$

$$x_n(t)\big|_{[0,h_n)}=x_{n0}(t). \tag{5}$$

Здесь $L_n^j(t)=\left(L^j*\rho_n^j\right)(t)=\int\limits_0^{\frac{1}{\gamma^j(n)}}L^j(t+s)\rho_n^j(s)ds$, $j=\overline{1,q}$, где $\rho_n^j(t)=\gamma^j(n)\rho^j\left(\gamma^j(n)t\right)$, $\rho^j\geq 0$, $sup\rho\left(\rho^j\right)\subseteq[0,1]$, $\int\limits_0^1\rho^j(s)ds=1$, а $f_n=f*\tilde{\rho}_n$, где $\tilde{\rho}_n(x_1,\ldots,x_p)=n^p\tilde{\rho}(nx_1,\ldots,nx_p)$, $\tilde{\rho}\in C^\infty\left(R^{p+1}\right)$, $\tilde{\rho}\geq 0$, $\int\limits_{[0,1]^p}\tilde{\rho}(x_1,\ldots,x_p)dx_1\ldots dx_p=1$, $sup\rho(\tilde{\rho})\subset[0,1]^p$.

Пусть t – произвольная фиксированная точка из отрезка T. Тогда t можно представить в виде $t=\tau_t+m_th_n$, где $\tau_t\in\left[0,h_n\right)$ $m_t\in N$. Несложно видеть, что решение системы (4)–(5) можно записать в виде

$$x_n^i(t)=x_{n0}^i(\tau_t)+\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{m_t-1}f_n^{ij}\left(x_n(\tau_t+kh_n)\right)\times$$
$$\times\left[L_n^j(\tau_t+(k+1)h_n)-L_n^j(\tau_t+kh_n)\right],$$

Жук Анастасия Игоревна, *к. физ.-мат. н., доцент, доцент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

где $i=\overline{1,p}$. (6)

В одномерном случае в работах [7] показано, что предел последовательности (6) зависит от связи между $\gamma^j(n)$ и h_n. Данная работа посвящена изучению общей ситуации. Для описания предельного поведения задачи (4) – (5) рассмотрим систему уравнений

$$x^i(t)=x_0^i+\sum_{j=1}^{q}\int_0^t f^{ij}(x(s))\,dL^{jc}(s)+$$
$$+\sum_{\mu_r\le t} S^i(\mu_r,x(\mu_r-),\Delta L(\mu_r)),$$
$$i=\overline{1,p}, \tag{7}$$

где $L^{jc}(t)$ – непрерывная, а $L^{jd}(t)$ – разрывная составляющие функции $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$, μ_r – точки разрыва функции $L(t)$, $\Delta L(\mu_r)=L^d(\mu_r+)-L^d(\mu_r-)$ – величина скачка. $S^i(\mu,x,u)=\varphi^i(1,\mu,x,u)-\varphi^i(0,\mu,x,u)$, $x\in R^p$, $u\in R^q$, $\mu\in T$, а $\varphi^i(t,\mu,x,u)$ находится из вспомогательной системы уравнений

$$\varphi^i(t,\mu,x,u)=x^i+\sum_{j=1}^{b}u^j\int_0^t f^{ij}(\varphi(s-,\mu,x,u))\,dH(s-1)+$$
$$+\sum_{j=b+1}^{q}u^j\int_0^t f^{ij}(\varphi(s,\mu,x,u))\,ds,\quad i=\overline{1,p}.$$

Здесь и далее в работе интеграл $\int_u^t f(x)\,dL(x)$ понимается в смысле Лебега-Стилтьеса на промежутке $(u;t]$, $x\in R^p$, $u\in R^q$, $\mu\in T$, $H(s)$ – функция Хевисайда, т. е. $H(s)=1$, при $s\ge 0$ и $H(s)=0$, при $s<0$. Существование и единственность решения системы (7) для всех значений параметров $x\in R^p$, $u\in R^q$, $\mu\in T$ доказаны в [8].

В дальнейшем под модулем вектора $x(t)=\left[x^1(t),x^2(t),\dots,x^p(t)\right]$ будем понимать $\left|x(t)\right|=\sum_{i=1}^{p}\left|x^i(t)\right|$.

Теорема 1. *Пусть f^{ij} $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$ удовлетворяют условию Липшица и ограничены. $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при $n\to\infty$, $h_n\to 0$ $\gamma^j(n)\to\infty$ так, что для $j=\overline{1,b}$ $\gamma^j(n)h_n\to\infty$ и для $j=\overline{b+1,q}$ $\gamma^j(n)h_n\to 0$, решение $x_n(t)$ задачи Коши (4)–(5) сходится к решению $x(t)$ системы уравнений (7) в пространстве $L^p(T)$, если $\left|x_{n0}(\tau_t)-x_0\right|\to 0$ в $L^p(T)$.*

Отметим некоторые частные случаи системы (7).

В случае Ито. Если $b=q$, то (7) можно записать в следующем виде

$$x^i(t)=x_0^i+\sum_{j=1}^{q}\int_0^{t+} f^{ij}(x(s-))\,dL^j(s),\ i=\overline{1,p}. \tag{8}$$

Существование и единственность решения системы (8) для липшицевых функций f^{ij} доказаны в [8].

Теорема 2. *Пусть f^{ij} $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$ удовлетворяют условию Липшица и ограничены. $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при $n\to\infty$, $h_n\to 0$ так, что $1/n=o(h_n)$, для всех $t\in T$ решение $x_n(t)$ задачи Коши (4) – (5) сходится к решению $x(t)$ системы уравнений (8), в пространстве $L^p(T)$, если $\left|x_{n0}(\tau_t)-x_0\right|\to 0$ в $L^p(T)$.*

Аналогичные результаты были получены в работе [9] в пространстве $L^1(T)$.

В случае Стратоновича. Если $b=0$, то уравнение (7) имеет вид

$$x^i(t)=x_0^i+\sum_{j=1}^{q}\int_0^t f^{ij}(x(s))\,dL^{jc}(s)+$$
$$+\sum_{\mu_r\le t} S^i(\mu_r,x(\mu_r-),\Delta L(\mu_r)),\quad i=\overline{1,p}, \tag{9}$$

где $S^i(\mu,x,u)=\varphi^i(1,\mu,x,u)-\varphi^i(0,\mu,x,u)$, где $x\in R^p$, $u\in R^q$, $\mu\in T$, а $\varphi^i(t,\mu,x,u)$ находится из уравнения $\varphi^i(t,\mu,x,u)=x^i+\sum_{j=1}^{q}u^j\int_0^t f^{ij}(\varphi(s,\mu,x,u))\,ds$, $i=\overline{1,p}$. Из результатов статьи [8] вытекает, что решение системы (9) существует и единственно.

Теорема 3. *Пусть f^{ij} $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$ удовлетворяют условию Липшица и ограничены. $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при $n\to\infty$, $h_n\to 0$ так, что $h_n=o(1/n)$, для всех $t\in T$ решение $x_n(t)$ задачи Коши (4) – (5) сходится к решению $x(t)$ системы уравнений (9) в пространстве $L^p(T)$, если $\left|x_{n0}(\tau_t)-x_0\right|\to 0$ в $L^p(T)$.*

Аналогичные результаты были получены в работе [10] в пространстве $L^1(T)$.

Непрерывный случай. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1)–(2) в случае, когда $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$ – непрерывные функции ограниченной вариации на отрезке T. Тогда для описания предельного поведения задачи (4) – (5) рассмотрим

$$x^i(t)=x_0^i+\sum_{j=1}^{q}\int_0^t f^{ij}(x(s))\,dL^j(s),\ i=\overline{1,p}. \tag{10}$$

Существование и единственность решения системы (10) для липшицевых функций f^{ij} доказаны в [8]. В этой работе также показано, что решения систем уравнений (8) и (10), вообще говоря, различны.

Теорема 4. *Пусть f^{ij} $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$ удовлетворяют условию Липшица и ограничены. $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$ – функции ограниченной вариации и непрерывны. Тогда при $n\to\infty$ для всех $t\in T$ решение $x_n(t)$ задачи Коши (4)–(5) сходится к решению $x(t)$ системы уравнений (10) в пространстве $L^p(T)$, если $\left|x_{n0}(\tau_t)-x_0\right|\to 0$ в $L^p(T)$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Антосик, П. Теория обобщенных функций: секвенциальный подход / П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский. – Москва : Мир, 1976. – С. 311.
2. Завалищин, С.Т. Импульсные процессы: модели и приложения / С.Т. Завалищин, А.Н. Сесекин. – Москва : Наука, 1991. – С. 256.
3. Das P.C. Czech. Math. J. / P.C. Das, R.R. Sharma. – 1972. – V. 22. – № 1. – P. 145–158.
4. Colombeau, J. Elementary introduction to new generalized functions. – Amsterdam, 1985.
5. Антоневич, А.Б. Докл. АН СССР / А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. – 1991. – Т. 318. – № 2. – С. 267–270.
6. Лазакович, Н.В. Докл. АН Беларуси. – 1994. – Т. 38. – № 5. – С. 23–27.
7. Yablonski, A. Nonlinear Analysis. – 2005. – V. 63. – P. 171–197.
8. Groh, J. Illionois J. Math. – 1980. – V. 24 (2). – P. 244–263.
9. Жук, А.И. Докл. НАН Беларуси / А.И. Жук, О.Л. Яблонский. – 2015. – Т. 59. – № 2. – С. 17–22.
10. Жук, А.И. Веснік Брэсцкага універсітэта / А.И. Жук, О.Л. Яблонский. – Сер. 4: Фізіка. Матэматыка. – 2010. – № 2. – С. 55–62.

Материал поступил в редакцию 22.01.2018

ZHUK A.I. Autonomic systems of differential equations with generalized coefficients

Some systems of differential equations with generalized coefficients are investigated in the algebra of mnemofunctions. The associated solutions of such systems of differential equations are obtained.

УДК 517.927

Геселева К.Г.

КОЛЛОКАЦИОННЫЙ И КОЛЛОКАЦИОННО-ИТЕРАТИВНЫЙ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение. При исследовании различных задач теоретического и прикладного характера широкое применение имеют интегральные и интегро-функциональные уравнения. Поскольку построение точных решений таких уравнений возможно только в отдельных случаях, то большое значение приобретают методы построения приближенных решений этих уравнений. Одним из эффективных методов является коллокационный метод и одно из его обобщений – коллокационно-итеративный метод.

В этой статье рассматриваются вопросы возможности применения этих методов к некоторым типам интегро-функциональных уравнений.

Рассмотрим некоторые классы интегро-функциональных уравнений, приближенные решения которых можно построить коллокационным и коллокационно-итеративными методами.

Линейные интегро-функциональные уравнения.

В пространстве $L_2(a;b)$ – действительных и измеримых на промежутке $(a;b)$ функций, суммируемых с квадратом, рассмотрим интегро-функциональное уравнение вида

$$y(x)-p(x)y(h(x))=f(x)+\int_a^b K(x;t)y(t)dt, x\in(a;b), \quad (1)$$

$$y(x)=0, x\notin(a;b),$$

где $f(x)$ – известная, а $y(x)$ – искомая функции в $L_2(a;b)$. Относительно функций $h(x), p(x), K(x;t)$ предполагаем, что они, соответственно, на промежутке $[a;b]$ и в квадрате $[a;b]^2=[a;b]\times[a;b]$ удовлетворяют условиям:

$$|p(x)|\le\bar{p}<\infty, \quad (2)$$

$h(x)$ – дифференцируема на $[a;b]$ и

$$h'(x)\ge l>0, x-h(x)\ge\sigma>0, \quad (3)$$

$$\int_a^b\int_a^b K^2(x;t)dxdt=B^2<\infty. \quad (4)$$

Покажем, что уравнение (1) при выполнении условий (2)–(4) можно свести к интегральному уравнению Фредгольма второго рода [3, 5]. Рядом с интегральным вполне непрерывным оператором K, который имеет вид

$$(Kv)(x)=\int_a^b K(x;t)v(t)dt, \forall v(x)\in L_2(a;b),$$

будем рассматривать оператор S такой, что

$$(Sv)(x)=\begin{cases} v(x), x\in\left[a,h^{-1}(a)\right], \\ v(x)-p(x)v(h(x)), x\in\left[h^{-1}(a),b\right], \end{cases} \quad (5)$$

где $v(x)$ – произвольная функция из $L_2(a;b)$.

Отметим, что этот оператор, как и оператор K, действует с $L_2(a;b)$ в $L_2(a;b)$. Легко показать, что оператор S линейный. Условия (2), (3) гарантируют его ограниченность. Действительно,

$$S=sup\frac{(Sv)(x)}{v(x)}\le 1+\left|\frac{p^2(x)}{h^{'}(x)}\right|^{1/2}\le 1+\frac{\bar{p}}{\sqrt{l}}<\infty,$$

где sup береться по $v(x)\in L_2(a;b), v(x)\ne 0$.

Эти же условия говорят о том, что оператор S обратимый. Обратный к нему оператор имеет вид

$$(S^{-1}v)(x)=\begin{cases} v(x), x\in\left[a,h^{-1}(a)\right], \\ v(x)+\sum_{i=1}^{S}v(h^i(x))\prod_{k=0}^{i-1}p(h^k(x)), \end{cases} \quad (6)$$

$$x\in\Delta s, s=\overline{1,m}.$$

Здесь, как и в дальнейшем,

$$\Delta s=\left[c_{s-1},c_s\right], c_0=a, c_s=h^{-1}(c_{s-1}),$$

$$c_m=b, h^k(x)=h(h^{k-1}(x)), s=\overline{1,m}.$$

Иными словами, выражение (6) – это решение функционального уравнения

$$y(x)-p(x)y(h(x))=u(x), x\in[a;b];$$

Геселева Катерина Григорьевна, *аспирант Каменец-Подольского национального университета имени Ивана Огиенка. Украина, Хмельницкая область, г. Каменец-Подольский, улица Огиенко, 61.*