ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА

А.Е.Крушевский, А.З.Севенюк

Как известно, наиболее трудоемкой задачей в теории упругости является выполнение краевых условий на поверхности тела. Обычно вначале строят решение, удовлетворяющее уравнениям равновесия Коши внутри тела, а затем каким-нибудь приближенным способом выполняют краевые условия [1]. Другие авторы, хотя и выполняют точно равновесие внутри, но удовлетворяют лишь приближенно уравнениям неразрывности и краевым условиям [2]. В настоящей статье строится дифференциальная структура решения задачи о равновесии цилиндра при точном выполнении краевых условий на боковой поверхности цилиндра. Переменные коэффициенты структуры представляют собой функции от осевой координаты z и подлежат определению из уравнения равновесия внутри и на торцах цилиндра [3].

Запишем ряды перемещений

$$u=\sum_{m=0} r^m U_{m0}+\sum_{m=0}\sum_{n=1} r^m(U_{mnc}\cos n\varphi+U_{mns}\sin n\varphi),$$

$$v=\sum_{m=0} r^m V_{m0}+\sum_{m=0}\sum_{n=1} r^m(V_{mnc}\cos n\varphi+V_{mns}\sin n\varphi),$$

$$w=\sum_{m=0} r^m W_{m0}+\sum_{m=0}\sum_{n=1} r^m(W_{mnc}\cos n\varphi+W_{mns}\sin n\varphi).$$

Из условия равенства нулю напряжений на боковой поверхности $\tau_r=\tau_{rz}=\tau_{r\varphi}=0$ при $r=R$ получаем следующую систему уравнений связей.

1) $\sum\limits_{m=0} R^{m-1}(RU'_{m0}+mW_{m0})=0$

2) $\sum\limits_{m=0} R^{m-1}(RU'_{mnc}+mW_{mnc})=0$

3) $\sum\limits_{m=0} R^{m-1}(RU'_{mns}+mW_{mns})=0$

4) $\sum\limits_{m=0} (m-1)R^m V_{m0}=0$

5) $\sum\limits_{m=0}\left[(m-1)R^{m}V_{mnc}-\frac{mnR^{m-1}}{d_z}W_{mns}\right]=0$

6) $\sum\limits_{m=0}\left[(m-1)R^{m}V_{mns}+\frac{mnR^{m-1}}{d_z}W_{mnc}\right]=0$

7) $\sum\limits_{m=0}\left[\gamma mR^{m-1}U_{m0}+\frac{\gamma_2}{d_z}R^{m}(d_z-\frac{m}{R^2})W_{m0}\right]=0$

8) $$\sum_{m=0}\left\{\gamma mR^{m-1}U_{mnc}-\gamma_2\frac{mR^{m-2}}{d_z}W_{mnc}+\gamma_2\left[\frac{mnR^{m-2}}{d_z}W_{mnc}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+mR^{m-1}W_{mns}\right]n+\gamma_2R^{m}W_{mnc}\right\}=0$$

9) $$\sum_{m=0}\left\{\gamma mR^{m-1}U_{mns}+\frac{\gamma_2 mn^2}{d_z}R^{m-2}W_{mns}-\right.$$
$$\left.-\frac{\gamma_2 mR^{m-2}}{d_z}W_{mns}-\gamma_2 mnR^{m-1}V_{mnc}+\gamma_2R^{m}d_zW_{mns}\right\}=0$$

где R - радиус цилиндра,

$\gamma=\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$, $\gamma_2=\gamma-2$,

ν - коэффициент Пуассона.

U_{m0}, V_{m0}, W_{m0}, U_{mnc}, V_{mnc}, W_{mnc}, U_{mns}, V_{mns},

W_{mns} - неизвестные функции от координаты „z".

$d_z=\frac{d}{dz}$ - оператор производной по „z".

В результате исключения обобщенных перемещений U_{00}, U_{0nc}, U_{0ns}, V_{00}, V_{0ns}, V_{0nc}, W_{00}, W_{0nc}, W_{0ns} получим следующие выражения упругих перемещении и напряжений.

$$u=\sum_{m=1}\sum_{n=1}\Big[(z^m-R^m)(U_{m0}+U_{mnc}\cos n\varphi+U_{mns}\sin n\varphi)-$$
$$-\frac{mR^{m-1}}{d_2}(W_{m0}+W_{mnc}\cos n\varphi+W_{mns}\sin n\varphi)\Big]$$

$$v=\sum_{m=1}\sum_{n=1}\Big\{[z^m+(m-1)R^m][V_{m0}+V_{mnc}\cos n\varphi+V_{mns}\sin n\varphi]-$$
$$-\frac{mnR^{m-1}}{d_2}(W_{mns}\cos n\varphi-W_{mnc}\sin n\varphi)\Big\}$$

$$w=\sum_{m=1}\sum_{n=1}\Big\{\Big[\frac{mR^{m-2}}{d_2^2}(1-n^2)+(z^m-R^m)\Big](W_{m0}+W_{mnc}\cos n\varphi+$$
$$+W_{mns}\sin n\varphi)+\frac{mn^2R^{m-2}}{d_2^2}W_{m0}+\frac{mnR^{m-1}}{d_2}(V_{mnc}\sin n\varphi-$$
$$-V_{mns}\cos n\varphi)-\frac{\gamma m}{\gamma_2 d_2}R^{m-1}(U_{m0}+U_{mnc}\cos n\varphi+U_{mns}\sin n\varphi)\Big\}$$

$$\tau_{zz}=G\sum_{m=1}\sum_{n=1}\Big\{(z^m-R^m)(U'_{m0}+U'_{mnc}\cos n\varphi+U'_{mns}\sin n\varphi)+$$
$$+m(z^{m-1}-R^{m-1})(W_{m0}+W_{mnc}\cos n\varphi+W_{mns}\sin n\varphi)\Big\}$$

$$\tau_{z\varphi}=G\sum_{m=1}\sum_{n=1}\Big\{\frac{(m-1)}{z}(z^m-R^m)(V_{m0}+V_{mnc}\cos n\varphi+$$
$$+V_{mns}\sin n\varphi)-\frac{n}{z}(z^m-R^m)(U_{mnc}\sin n\varphi-U_{mns}\cos n\varphi)\Big\}$$

$$\sigma_z=G\sum_{m=1}\sum_{n=1}\Big\{\gamma m(z^{m-1}-R^{m-1})(U_{m0}+U_{mnc}\cos n\varphi+$$
$$+U_{mns}\sin n\varphi)+\gamma_4\Big[\frac{(z^m-R^m)}{z}(U_{m0}+U_{mnc}\cos n\varphi+$$
$$+U_{mns}\sin n\varphi)+\frac{z^m+(m-1)R^m}{z}(V_{mns}\cos n\varphi-$$
$$-V_{mnc}\sin n\varphi)n+mnR^{m-1}(V_{mnc}\sin n\varphi-$$
$$-V_{mns}\cos n\varphi)-\frac{mR^{m-1}}{zd_2}(W_{m0}+W_{mnc}\cos n\varphi+$$
$$+W_{mns}\sin n\varphi)+\frac{mn^2R^{m-1}}{zd_2}(W_{mns}\sin n\varphi+$$

$$+ W_{mnc} \cos n\varphi) + \left[\frac{mR^{m-2}}{d_1} (1 \pm n^2) + d_2 (z^m - P^m) \right)(W_{mo} +$$

$$+ W_{mnc} \cos n\varphi + W_{mns} \sin n\varphi) \Big] + \frac{mn^2 R^{m-2}}{d_2} W_{mo} \Big\}$$

Полученные формулы для напряжений τ_{zz}, $\tau_{z\varphi}$ и τ_z показывают, что они равны нулю при $r = R$.

При этом напряженно-деформированное состояние разбивается на ряд отдельных состояний: осесимметричное сжатие (растяжение), кручение, неосесимметричное состояние при растяжении (сжатии), изгиб в двух плоскостях и др.

Литература

1 Лурье А.Е. Пространственные задачи теории упругости. -М.: Гостехиздат, 1955, -49с.

2. Пономарев С.Д., Бидерман В.Л. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. -М.: Машгиз, 1958, -Том 2. 974с.

3. Севенюк А.З. Определение спектра частот продольных колебаний упругого стержня с квадратным сечением при услови точного выполнения отсутствия нагрузки на боковых гранях// Теоретическая прикладная механика: Респ. межведом. сб./ Минск.-1979. -Вып.6. -С.15-21.