О СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ВНЕШНЕЙ И МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТЕЙ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

В.М.Хвисевич

Рассмотрим плоскую внешнюю D^- или внутреннюю D^+ многосвязную область, на границе которой L заданы значения усилий $P_i = f_i(x_L)$ и температуры $T = F(x_L)$ (т.е. для T имеем задачу Дирахле). Предполагается, что деформирование механическими усилиями не приводит к изменению температуры в области. Температура T определяется как решение независимого интегрального уравнения краевой задачи теплопроводности.

Большинство авторов решает температурную задачу Дирихле по методу ньютоновского потенциала так называемым прямым или непрямым способом. Как известно в прямом способе решение для T берется в виде формулы Грина, а в непрямом способе представляется потенциалом двойного слоя

$$T(x) = \int_L \text{æ}(y) \frac{\cos\varphi}{r} dl_y , \qquad (1)$$

здесь φ - угол между вектором $r = |y-x|$ и внешней нормалью $n_i(y)$ проведенной к L в точке интегрирования y, x - параметрическая точка, $\text{æ}(y)$ - плотность потенциала двойного слоя.

Формула Грина позволяет представить температуру в области D^- или D^+, однако присутствие потенциалов простого и двойного слоев создает сложности при численном решении задачи.

Решение (I) можно применять только в случае внутренней односвязной области. Это объясняется тем, что потенциал двойного слоя представляет температуру внешней или внутренней многосвязной области лишь частично, т.е. им не учитывается влияние средней температуры (случай J по Н.М.Гюнтеру [I]).

Недостаток решения устраняем, дополнив (I) точечными источниками определенной мощности [4] .

$$T(x) = \int_L \text{æ}(y) \frac{\cos\varphi}{r} dl_y + \sum_{k=1}^{n} A_k \ln \frac{1}{r_{A_k}} \qquad (2)$$

где A_k - мощность источников, расположенных во внутренних контурах L_k, r_{A_k} - расстояние от точки x до источника.

Через L_0 обозначим охватывающий контур $k+1$ - связанной области.

Такой прием известен в теории гармонических функций, однако практического применения для решения краевых задач термоупругости практического применения для решения краевых задач термоупругости методом потенциала он не находил.

Константы A_k определяются через среднее значение температур на L_k, которое легко вычислить из граничного условия

$$T^{(m)} = \int\limits_{L} F\, dl . \qquad (3)$$

В граничных точках контуров L_k потребуем, чтобы было

$$T_{k+1}^{(m)} = \frac{1}{L_{k+1}} \sum_{i=1}^{n} A_i \int\limits_{L_k} \ln \frac{1}{r_{Ai}}\, dl_y + 2\pi \varkappa_e^{(m)}, \qquad (4)$$

это предлагает условие Дирихле для $T^{(m)}$, т.к. потенциал двойного слоя в (2) равен нулю.

На основе (2) получается интегральное уравнение краевой задачи Дирихле для многосвязной области и для $\mathcal{D}^-$ и после его решения определяется плотность $\varkappa(y)$.

Решение дифференциальных уравнений плоской задачи квазистационарной термоупругости разыскиваем с помощью градиента некоторой бигармонической функции. Выполнив преобразования, получим формулу бигармонической функции, которая представлена контурным интегралом и алгебраической суммой

$$W = -\frac{a}{4}\left\{\int\limits_{L} \varkappa(y)\, r\cos\varphi\,(1-2\ln r)\, dl_y + \sum_{k=1}^{n} A_k \left[r_{Ak}^2 (1-\ln r_{Ak})\right]\right\}, \qquad (5)$$

где $a=\alpha\frac{1+\nu}{1-\nu}$, α – коэффициент линейного расширения, ν – коэффициент Пуассона.

Используя (5) получаем новые интегральные представления температурных перемещений

$$u_i^T = -\frac{a}{4}\left\{\int\limits_{L} \varkappa(y)\left[n_i(y)(2\ln r-1) + 2\beta_i\cos\varphi\right] dl_y + \sum_{k=1}^{n} A_k \left[\beta_{Ak}\, r_{Ak}(2\ln r_{Ak}-1)\right]\right\}, \qquad (6)$$

(здесь β_i – направляющие косинусы вектора r) и напряжений для $x \in L$

$$\sigma_{ij}^T = a\mu\left\{2\pi\varkappa(x_L)\left[n_i(x_L)-\delta_{ij}\right] + v.p.\int\limits_{L} \frac{\varkappa(y)}{r}\left[n_i(y)\beta_j + n_j(y)\beta_i - 2(\beta_i\beta_j-\delta_{ij})\cos\varphi\right] dl_y + \sum_{k=1}^{n} A_k\left[\beta_{Ai}^{(k)}\beta_{Aj}^{(k)} - \left(\frac{1}{2}+\ln r_{Ak}\right)\delta_{ij}\right]\right\}, \qquad (7)$$

где μ – модуль сдвига.

Полные перемещения и напряжения определяются как

$$u_i = u_i^0 + u_i^T; \qquad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^T, \tag{8}$$

здесь σ_{ij}^0 – соответствуют решению u_i^0 дифференциальных уравнений теории упругости их интегральные представления приведены в работе [3].

Подставляя σ_{ij} в граничные условия второй краевой задачи получаем систему сингулярных уравнений плоской краевой задачи квазистационарной термоупругости

$$\nu_i(x) + \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \int_L \frac{1}{r} \Big\langle \nu_i(y)\left[(1-2\nu) - 2\beta_i^2\right]\cos\psi + \Big\{\left[n_k(y)\beta_i - n_i(y)\beta_k\right](1-2\nu) + 2\beta_i\beta_k\cos\psi\Big\}\nu_k(y)\Big\rangle dl_y = f_i(x_L) + f_i^T(x_L). \tag{9}$$

где $\nu_i(y)$ – плотность потенциала простого слоя,

$$f_i^T(x_L) = \sigma_{ij}^T \cdot n_j . \tag{10}$$

Последовательность решения рассматриваемой задачи следующая: сначала решается интегральное уравнение краевой задачи теплопроводности относительно плотности $\varkappa(y)$, после чего вычисляются (6) и (7). Затем с учетом (10) решается система СИУ (9), в результате решения которой находим $\nu_i(y)$. Напряжения σ_{ij} и перемещения u_i определяем по формулам (8).

Проведенные выкладки относятся для области $\mathcal{D}^+$. Если рассматриваемая область $\mathcal{D}^-$, то в (4) вместо слагаемого $2\pi\varkappa_e^{(m)}$ записывается температура в бесконечности T_∞, а в (7) добавляется напряжения σ_{ij}^∞.

Для численного решения СИУ с учетом методик работы [2], разработан алгоритм и программа для ЭВМ. Рассматривая область может быть кусочно-гладкой. Неизвестная плотность потенциала интегрируется полиномом Лагранжа. Сингулярные интегралы в (6), (7), (9) вычисляются при помощи квадратурных формул Гаусса с четным числом узлов.

Достоверность полученных формул подтверждена решением тестовых примеров: краевые задачи для СИУ – а) во внутренней кольцеобразной области (рис. I), б) во внешней односвязной области (рис.2). С учетом симметрии области и нагружения достаточно рассмотреть её I/4 часть.

Внешний контур области а) был разбит на 7, а внутренний на 5 отрезков интегрирования. Контур области б) апроксимирован 7 отрезками. Сравнение результатов численного решения этих задач с известными аналитическими решениями показало высокую точность алгоритма (погрешность составила сотые доли процента).

Таким образом с помощью дополнения решения (I) простыми источниками определенной мощности получены новые СИУ плоской краевой задачи квазистационарной термоупругости для внешней и многосвязной областей. В отличие от прямого способа полученные на основе (5) формулы проще и их легче реализовать численно.

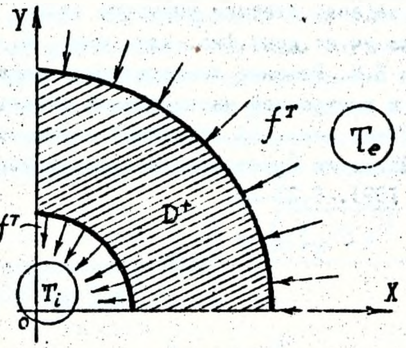

Рис.I Расчетная схема задачи "А"

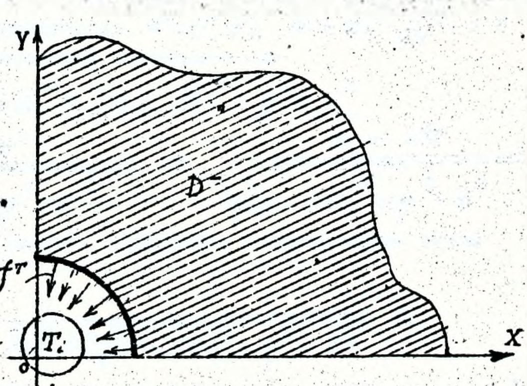

Рис.2 Расчетная схема задачи "Б"

Литература

1. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. -М.: Гос. издательство техн.-теоретической литературы, 1953, -414 с.
2. Бормот Ю.Л. Численное решение СИУ плоской задачи теории упругости// Проектирование металлических конструкций. Реферативный сборник. Сер. 7. -М.: ЦИНИС Госстроя СССР. 1974. -Вып.4.(51).-С.17-19.
3. Копейкин Ю.Д. Применение бигармонических потенциалов в краевых задачах статики упругого тела// Диссертация на соискание уч.ст.докт.физ.-мат. наук. М. 1969, -280с.
4. Хвисевич В.М. Решение температурной задачи Дирихле для внешней и внутренней многосвязной областей методом потенциала. -Тез. докл. XX юбилейной научно-техн. конф., посвященной 25-летию Брестского политехнического института. -Брест, 1991.-С.23-24.