

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КЛИНООБРАЗНОГО ТЕЛА С КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНОЙ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Б.Г.Холодарь

Задача о напряженно-деформированном состоянии клина относится к числу классических задач плоской теории упругости и решена как для случая нагружения его силой и моментом в вершине, так и для случая нагружения по боковым граням [1].

Решение задачи производится в полярной системе координат с центром в вершине клина и напряжения вычисляются как функции полярного угла  $\vartheta$  и полярного радиуса  $z$  при заданном значении угла полуоткрытия клина  $\alpha$  (граничного значения полярного угла). Для случая нагружения клина в вершине линии  $z = \text{const}$  и  $\vartheta = \text{const}$  являются линиями главных напряжений.

Представим теперь, что имеем тело клинообразной формы, боковая поверхность которого составлена из отдельных участков (не обязательно одинаковой длины), а функции, описывающие форму границ участков, непрерывны вместе со своими производными до второго порядка включительно во всех точках границ, в том числе в точках сопряжения участков. Кроме того, выполняется некоторое дополнительное условие однозначности функций, которое будет пояснено ниже. При этих условиях выполняются требования теоремы единственности решения задач теории упругости, а задачу о нагружении такого тела можно привести к решению задачи о клине.

Действительно, пусть конкретно имеем тело, граница которого составлена из участков, описываемых уравнениями синусоиды (рис.1):

$$y_r = y_{or} + h_{or} \sin \frac{z}{l} , \quad (1)$$

$$-l \leq z \leq l, \quad l \leq \frac{z}{2}$$

Введя обозначения  $\xi = \sin \frac{z}{l}$ , приходим к уравнению границы на данном участке в виде отрезка прямой

$$y = y_1 (\xi - 1) + h_r \xi \quad (2)$$

где  $k=1,2,3,\dots$  - порядковый номер участка;  $y_1$  - значение  $y_{or}$  для первого участка;  $\xi$  - локальная координата для каждого участка, меняющаяся в диапазоне  $\pm \sin \frac{z}{l}$ .

Если теперь через точки  $\xi = 0$  провести прямую, то она составит как раз границу изгибающегося клина. При этом угол полуотвора

клина  $\alpha$  определяется как  $\alpha = \arctg \frac{h \cdot \sin \frac{\pi}{2}}{\rho} = \arctg \frac{y}{\rho}$  и будет одинаковым для всех участков. Если участки границы имеют разную длину, то необходимо также выполнение условия  $(h \cdot \sin \frac{\pi}{2}) / L_k = \text{Const}$  для всех  $k$ . Упомянутое условие однозначности заключается в данном примере в условии  $\rho_k \leq \frac{L_k}{2}$ , так как в противном случае некоторым точкам границы изображающего клина соответствовало бы более одной точки границы исходного тела.

Соответствие между точкой изображающего клина с координатами  $z, \vartheta$  и точкой исходного тела с координатами  $x, y$  устанавливается по рис. 2 соотношениями (для простоты взят случай тела с участками одинаковой длины):

$$\begin{aligned} y &= z \sin \vartheta, \\ x &= OA + S = \rho(2k-1) + \frac{\rho}{2} \arcsin \frac{y-y_0}{\rho} = \\ &= \rho(2k-1) + \frac{\rho}{2} \arcsin \frac{y - \rho(2k-1) \sin \vartheta}{\rho} \end{aligned} \quad (3)$$

Обратные зависимости имеют вид

$$\begin{aligned} \vartheta &= \arctg \frac{y}{\rho(2k-1) + \sin \frac{\pi}{2}}, \\ z &= \frac{\rho(2k-1) + \sin \frac{\pi}{2}}{\cos \vartheta} = \sqrt{y^2 + \left(\rho(2k-1) + \sin \frac{\pi}{2}\right)^2} \end{aligned} \quad (4)$$

Имея решения для клина [I], можно с помощью (4) записать выражения для функции напряжений, а также для перемещений и напряжений в рассматриваемом теле, построить траектории главных напряжений.

При нагружении клина в вершине окружные напряжения  $\sigma_{\vartheta}$  отсутствуют, поэтому компоненты напряжений в декартовых осях  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  удобно выражать через радиальные напряжения  $\sigma_r$  по известным формулам [1]. Для  $\sigma_r$  имеем

$$\sigma_r^x = P_x^x \frac{\cos \vartheta}{z}; \quad \sigma_r^y = P_y^y \frac{\sin \vartheta}{z}; \quad \sigma_r^m = P_x^m \frac{\sin 2\vartheta}{z^2} \quad (5)$$

где

$$P_x^x = \frac{P_x}{\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha}; \quad P_y^y = \frac{P_y}{\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha}; \quad P_x^m = \frac{M}{\alpha \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha} \quad (6)$$

$P_x, P_y, M$  — продольная, поперечная сила и момент в вершине клина, отнесенные к единице толщины клина.

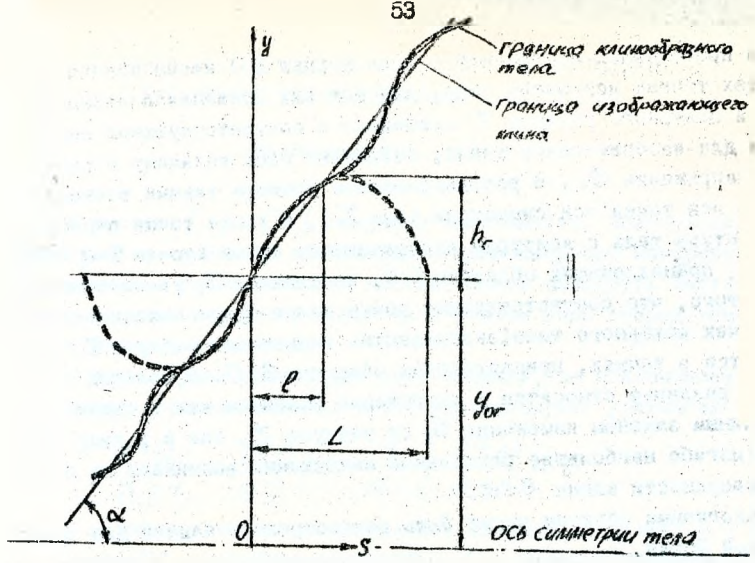


Рис. 1 Граница исходного и изображающего тел.

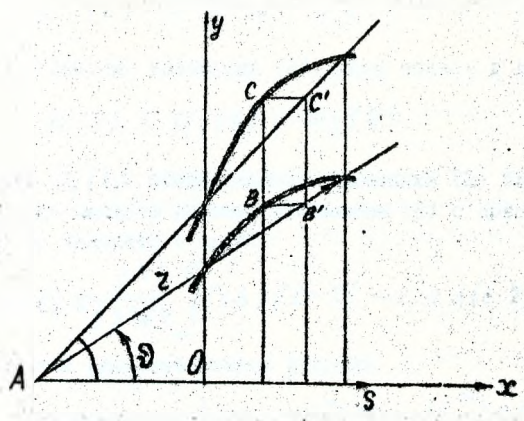


Рис. 2 Соответствие между точками исходного (B,C) и изображающего тел (B',C')

Из проведенных построений и вида формул (5) можно заключить, что в тех точках исходного тела, для которых значения полярного угла  $\vartheta$  и полярного радиуса  $Z$  совпадают с соответствующими значениями для изображающего клина, сохраняют свою величину и радиальные напряжения  $\sigma_r$ . В рассматриваемом примере такими точками являются все точки оси симметрии (ось  $X$ ), а также точки пересечения контура тела с контуром изображающего клина (точки  $S=0, S=\pm \frac{1}{2}$ ). В точках, принадлежащих областям  $S < 0$ , напряжения  $\sigma_r$  увеличиваются за счет того, что соответствующие точки клина будут находиться левее точек исходного тела (эквивалентно уменьшению радиуса  $Z$ ), и уменьшаются в точках, принадлежащих областям  $S > 0$ . В большей степени это различие относится к нагружению моментом как в связи с квадратичным законом изменения  $\sigma_r$  от радиуса  $Z$ , так и в силу того, что при изгибе наибольшие радиальные напряжения возникают на боковой поверхности клина  $\vartheta = \alpha$ .

Аналогичным образом могут быть рассмотрены и задачи для тела конической формы.

#### Л и т е р а т у р а

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. -М.: Наука, 1979, - 560с.