

ИЗГИБ СТЕРЖНЯ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ДИАГРАММОЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛА

Б.Г. Холодарь

Расчет напряженно-деформированного состояния стержней, материал которых при заданных уровнях внешней нагрузки работает в нелинейной области, представляет значительные вычислительные сложности.

Если рассматриваемая задача является статически-определимой, то кривизна стержня однозначно определяется эпюрой моментов от внешней нагрузки, в случае статической неопределимости задачи наиболее удобной процедурой решения её для неразрезных балок остается уравнение трех моментов, в которое входит компонента деформации от внешней нагрузки как составляющая наряду с компонентами деформаций от опорных моментов. С этой точки зрения построение удобной вычислительной схемы решения даже статически определимой задачи является достаточно актуальным вопросом.

Обычно при решении подобных задач используют кусочно-линейную или степенную аппроксимацию диаграммы растяжения материала, что накладывает на результаты ряд ограничений, которых можно было бы избежать, если для описания диаграммы применить подходящий ряд.

По нашему мнению, весьма удобным является аппроксимирующий ряд, общий член которого имеет структуру вида $\sigma_j = \sigma_{sj}(1 - e^{-\alpha_j \epsilon})$, где σ_{sj} - наибольшее значение j -ой компоненты, α_j - коэффициент, влияющий на форму кривой, σ и ϵ - напряжение и деформация (деформация здесь и ниже понимается как её девиаторная составляющая). Приняв $\alpha_j = E_j / \sigma_{sj}$, где E_j - соответственно j -ая составляющая модуля упругости ($E = \sum E_j$), можно уже одним членом ряда описать вполне реальный материал, имеющий диаграмму с площадкой текучести. В общем случае некоторые из α_j можно принять отрицательными, что дает возможность описывать весьма сложные диаграммы и проводить не только качественные, но и количественные расчеты поведения конструкции при нагрузках, которым соответствуют напряжения порядка временного сопротивления σ_k материала, придав самому понятию "пределная нагрузка" вполне конкретное "деформационное" содержание.

Пренебрежем, как обычно, влиянием перерезывающей силы на прогиб и рассмотрим стержень, нагруженный моментом M и продольной силой N , считая их известными функциями продольной координаты.

Для определения положения нейтральной линии сечения при любом X имеем соотношения:

$$\int_{(F)} G(y) y dF = M$$

$$\int_{(F)} G(y) dF = N \quad (1)$$

где y — координата точек сечения по перпендикуляру к нейтральной линии, F — площадь сечения.

Подставим в (1) выражение для $G(\epsilon)$ в виде:

$$G(\epsilon) = \begin{cases} \sum_j G_{aj} (1 - e^{-\alpha_j \epsilon}) & , \epsilon \geq 0 \\ -\sum_j G_{aj} (1 - e^{-\alpha_j |\epsilon|}) & , \epsilon < 0 \end{cases} \quad (2)$$

и учитывая, что гипотеза плоских сечений дает зависимость между кривизной нейтральной линии $\delta\epsilon$ и деформацией ϵ любой точки сечения, в виде $\epsilon = \alpha y [1]$, имеем возможность численно или аналитически найти зависимости $M = M(\alpha\epsilon)$ и $N = N(\alpha\epsilon)$.

Например, в наиболее простом случае прямоугольного сечения (b — ширина, h — высота) получим

$$m = \frac{4M}{G_0 b h^2} = 1 + 4\delta^2 - 8 \sum_j \frac{G_{aj}/G_0}{\alpha_j^2 \alpha^2 h^2} \left[1 - \left(1 + \frac{\alpha_j |\alpha\epsilon| h}{2} \right) e^{-\frac{\alpha_j |\alpha\epsilon| h}{2}} \operatorname{ch}(\alpha_j |\alpha\epsilon| h \delta) + \alpha_j |\alpha\epsilon| h \delta e^{-\frac{\alpha_j |\alpha\epsilon| h}{2}} \operatorname{sh}(\alpha_j |\alpha\epsilon| h \delta) \right] \quad (3)$$

$$n = \frac{N}{G_0 b h} = 1 - 2 \sum_j \frac{G_{aj}/G_0}{\alpha_j |\alpha\epsilon| h} \left[1 - e^{-\frac{\alpha_j |\alpha\epsilon| h}{2}} \operatorname{ch}(\alpha_j |\alpha\epsilon| h \delta) \right],$$

где введен дополнительно безразмерный параметр $\delta = \frac{h\epsilon}{h} - \frac{1}{2}$, показывающий отклонение положения нейтральной линии от середины сечения (h_p — высота растянутой зоны сечения).

Таким образом, $m = m(\alpha\epsilon, \delta)$, $n = n(\alpha\epsilon, \delta)$, откуда численно можно получить и обратные зависимости $\alpha\epsilon = \alpha\epsilon(m, n)$, $\delta = \delta(m, n)$.

В большинстве задач влияние продольной силы N на прогиб несущественно, и в этой ситуации при $\delta = 0$ имеем

$$m = 1 - 8 \sum_j \frac{G_{aj}/G_0}{\alpha_j^2 \alpha^2 h^2} \left[1 - \left(1 + \frac{\alpha_j |\alpha\epsilon| h}{2} \right) e^{-\frac{\alpha_j |\alpha\epsilon| h}{2}} \right] \quad (4)$$

Качественно зависимости величины изгибающего момента в сечении

от деформации наружного слоя ϵ_n изображены на рис. 1 для степенной (1), идеально-пластической (2) и произвольной (3) диаграммы растяжения материала.

Построив из (4) при известном $m(x)$ зависимость $\mathcal{H}(x)$, можно найти и деформационные характеристики стержня (прогибы и углы поворотов сечений).

Зависимость $\mathcal{H}(x)$ в дальнейшем удобно представить в виде ряда по полиномам Чебышева $\mathcal{H}(x) = \sum_k A_k T_k(x)$, который легко затем интегрируется, используя известные соотношения [2]

$$\int T_k dx = \frac{1}{2} \left[\frac{T_{k+1}}{k+1} - \frac{T_{k-1}}{k-1} \right] + Const, \quad k > 1 \quad (5)$$

$$2 T_m T_n = T_{m+n} + T_{|m-n|}$$

В качестве конкретного примера рассмотрена задача об изгибе шарнирно-опертого стержня длиной $l = 100$ см с квадратным сечением со стороной $b = h = 1$ см, нагруженного посредине поперечной силой Q . Диаграмма типа 3 описывалась пятью членами ряда с параметрами (МПа):

$$E_1 = 1 \cdot 10^5, \quad E_2 = 1 \cdot 10^4, \quad E_3 = 4 \cdot 10^3, \quad E_4 = 3 \cdot 10^3, \quad E_5 = -1 \cdot 10^2$$

$$\sigma_{61} = 3 \cdot 10^2, \quad \sigma_{62} = 3 \cdot 10^2, \quad \sigma_{63} = 3 \cdot 10^2, \quad \sigma_{64} = 5 \cdot 10^1, \quad \sigma_{65} = 2 \cdot 10^1,$$

причем $\epsilon_c \approx 0,25$. Диаграмма типа 1 описана одночленной зависимостью с $E = \sum_{j=1}^5 E_j = 1,169 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_c = \sum_{j=1}^5 \sigma_{6j} = 9,10$ МПа. Соответствующие расчеты для идеального пластического материала проделаны по данным [3], где имеется также решение и для степенной диаграммы.

Характер нарастания прогибов y стержня с ростом нагрузки Q для принятых в расчетах диаграмм показан на рис. 2.

Под $y_{пл}$ и $Q_{пр}$ на рис. 2 понимаются значения прогиба под силой и величина силы, при которой в данном случае достигается предел текучести материала σ_T . Известно, что при упруго-пластическом подходе прогиб при появлении пластического шарнира составляет $y_{пк} = \frac{2Q}{9} y_{пр}$, причем $Q_{пк} = 15 Q_{пр}$, неограниченно увеличиваясь в дальнейшем ($\epsilon \rightarrow \infty$) при сохранении нагрузки, что свидетельствует об исчерпании несущей способности стержня [3]. Как видно из рис. 2, такое же значение прогиба при реальных диаграммах достигается намного раньше, причем о достижении предельной нагрузки свидетельствует допустимая величина деформации материала (в расчете принято $\epsilon_{пред} = \epsilon_c = 0,25$). Соответствующее предельное значение прогиба и силы отмечено на рис. 2 крестиком.

На рис. 3 приведены эпюры кривизны и прогибов стержня при разных

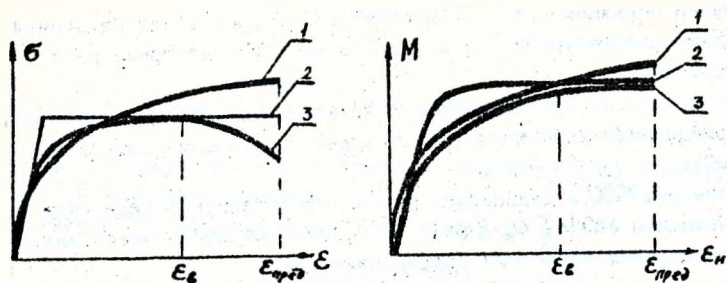


Рис. 1 Зависимости между напряжением и деформацией и между моментом и деформацией наружного слоя.

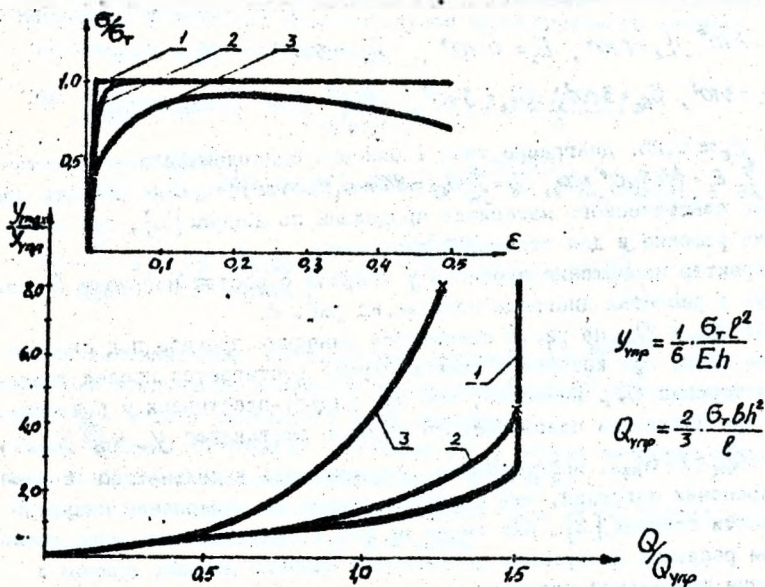


Рис. 2 Расчетные кривые $\sigma(\epsilon)$ и нагрузка-прогиб

1- идеально-пластический материал

2- аппроксимация $\sigma = \sigma_т (1 - e^{-\alpha \epsilon})$

3- зависимость $\sigma = \sum_i \sigma_{\sigma_i} (1 - e^{-\alpha_i \epsilon})$

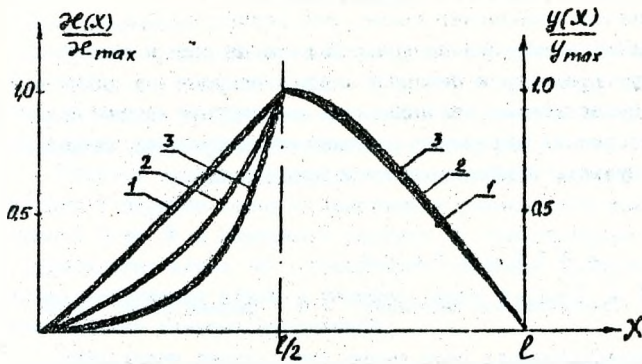


Рис.3 Эпюры кривизны и прогибов стержня при различных уровнях нагрузки: 1 - $Q/Q_{нгр} = 0.125$;
 2 - $Q/Q_{нгр} = 0.625$; 3 - $Q/Q_{нгр} = 1.25$:

уровнях внешнего воздействия (материал общего типа). Видно, что при весьма значительном изменении формы кривой $\mathcal{H}(x)$ форма прогиба $U(x)$ практически не меняется, что может быть использовано при вариационных подходах к решению подобных задач.

Анализ расчетов показывает также, что учет геометрической нелинейности задачи и влияния продольной силы на поперечные смещения сечений могут привести к неверной оценке несущей способности стержня в виду существенной нелинейности зависимости прогибов от максимальной деформации материала в наиболее нагруженных сечениях стержня при нагрузках, приближающихся к предельным.

Л и т е р а т у р а

1. Рханицин А.Р. Строительная механика. - М.: Высшая школа, 1982, -400с.
2. Ланс Дж.Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. -М.: Иностран.литер., 1962. -208 с.
3. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Мир, 1969, Том 2.-863с.