ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ ПО КРИТЕРИЮ ДОЛГОВЕЧНОСТИ

Холодарь Б.Г., Холодарь Д.Б.

Опыты показывают [I], что гидростатическая и девиаторная компоненты напряженного состояния оказывают различное воздействие на долговечность материала - при одинаковом уровне растягивающих и сжимающих напряжений материал, находящийся в растянутой зоне, будет менее долговечен, чем в сжатой зоне.

Для одноосного напряженного состояния долговечность материала (время до разрушения $t_{разр}$) можно найти по формуле

$$t_{разр} = \frac{1}{\nu} Ei(-x),$$

где $Ei(x)$ - интегральная экспоненциальная функция, ν - константа для данного физического состояния материала, $x = \alpha\sigma$, σ - напряжение, $\alpha > 0$ - структурный коэффициент, или по приближенной формуле

$$t_{разр} = \frac{1}{\nu} x e^{-x},$$

которой можно пользоваться с достаточной точностью при $x > 2$.

Поскольку при одноосном напряженном состоянии интенсивность напряжений и среднее напряжение пропорциональны действующему напряжению, то можно записать:

$$x = (\alpha_г + \alpha_д)\sigma = \alpha_р \sigma \qquad \text{(растяжение)}$$

$$x = (-\alpha_г + \alpha_д)\sigma = \alpha_с \sigma \qquad \text{(сжатие)}$$

где под σ понимается теперь абсолютная величина напряжения, а $\alpha_г$ и $\alpha_д$ - гидростатическая и девиаторная составляющие структурного коэффициента.

Обозначим

$$\varkappa = \frac{\alpha_с}{\alpha_р} \qquad (I)$$

причем, очевидно, $\varkappa \leqslant 1$.

Для каждого материала значения коэффициентов $\alpha_р$ и $\alpha_с$ могут быть определены экспериментально.

В качестве примера, когда при одноосном напряженном состоянии имеются зоны растягивающих и сжимающих напряжений, рассмотрим нагружение прямого стержня изгибающим моментом M и продольной силой N.

С точки зрения долговечности сечения такого стержня оптимальным будет такое соотношение растягивающих и сжимающих напряжений, при котором долговечности материала в растянутой и сжатой зонах будут одинаковы, т.е.

$$\alpha_p \sigma_p e^{-\alpha_p \sigma_p} = \alpha_c \sigma_c e^{-\alpha_c \sigma_c},$$

откуда имеем

$$\varkappa \frac{\sigma_c}{\sigma_p} = 1 . \qquad (2)$$

Отметим, что долговечность сечения здесь рассматривается без учета времени распространения трещины по поперечному сечению, а только по времени разрушения наружного слоя материала. Такой подход является оправданным как с точки зрения поставленной в настоящей работе задачи, так и с точки зрения вклада обоих этих процессов в суммарную долговечность сечения.

Очевидно, что нужно рассмотреть только случай, когда в сечении имеются области напряжений разных знаков, так как в противном случае (действие большой продольной силы) вопрос об оптимизации данного сечения решается тривиально – для повышения долговечности необходимо уменьшить наибольшие напряжения.

Оптимизацию сечения будем понимать как подбор такой формы сечения, при которой произойдет повышение долговечности по отношению к исходной, в частности, без изменения высоты и площади сечения.

Конкретно рассмотрим два сечения, имеющих широкое распространение – прямоугольное и идеальный двутавр (две одинаковых полки, разнесенные на некоторое расстояние друг от друга), и покажем, что переход соответственно от прямоугольной формы к трапецеидальной или от одинаковых полок к неравным может повысить долговечность сечения.

Назовем для удобства коэффициентом формы сечения отношение верхнего и нижнего оснований $\varphi = \frac{a}{b}$ (рис.I). Так как $\varkappa < 1$, то ясно, что в зоне сжатия материала сечение должно быть более узким, чем в зоне растяжения, т.е. $\varphi < 1$.

Изгибная компонента напряжений в наружных слоях растянутой и сжатой зон составляет

$$\sigma_{нр} = \frac{M}{J} h_p , \quad \sigma_{нс} = \frac{M}{J} h_c ,$$

напряжения от продольной силы $\sigma_N = \frac{N}{F}$, где J, F – момент инерции и площадь сечения, h_p, h_c – расстояния от нейтральной линии сечения до крайних волокон растянутой и сжатой зон при изгибе стержня.

Как изгибные, так и напряжения от продольной силы составляют некоторую часть от предела текучести материала:

$$\sigma_{ис} = \beta\sigma_т\,, \quad \sigma_{ир} = \beta\sigma_т\frac{h_p}{h_c}\,, \quad \sigma_N = \gamma\sigma_т\,,$$

причем нетрудно видеть, что при положительных β и γ должно также выполняться условие

$$\beta + \gamma \leq 1\,. \tag{3}$$

Тогда из (2) получим

$$\frac{h_p}{h_c} = \varkappa + \frac{\gamma}{\beta}(1+\varkappa) \tag{4}$$

Используя коэффициент формы φ из (4) можно получить:

$$\frac{NH}{M} = \frac{6}{1+\varkappa}\left(\frac{1+2\varphi}{2+\varphi} - \varkappa\right)\cdot\frac{(1+\varphi)(2+\varphi)}{1+4\varphi+\varphi^2} \quad \text{(трапециевидное сечение)} \tag{5}$$

$$\frac{NH}{M} = \frac{6}{1+\varkappa}\cdot\left(\frac{2\varphi-(1+\varphi)\hbar}{2-(1-\varphi)\hbar} - \varkappa\right)\times$$

$$\times\frac{(1+\varphi)(2\varphi-(1-\varphi)\hbar)}{(1+\varphi)^2\hbar^2+12\varphi(1-2\hbar(1+\varphi)+\hbar^2)} \quad \text{(идеальный двутавр)} \tag{6}$$

где $\hbar = \frac{h}{H}$.

Графики этих зависимостей приведены на рис.2.* Там же построена зависимость

$$\frac{2F}{bH} = 1+\varphi \quad \text{(трапециевидное сечение)} \tag{7}$$

$$\frac{F}{bH} = 1+\varphi \quad \text{(идеальный двутавр)} \tag{8}$$

---

* При значениях $\hbar$, отличных от $\hbar = 0.2$, кривые имеют форму, аналогичную показанной на рисунке.

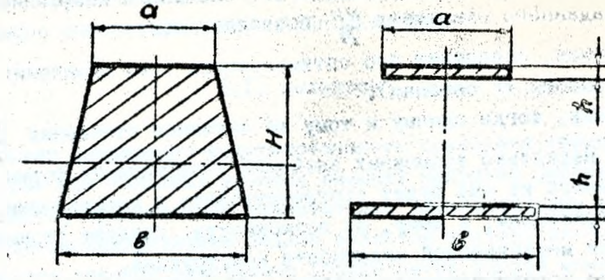

Рис. I Геометрия сечений

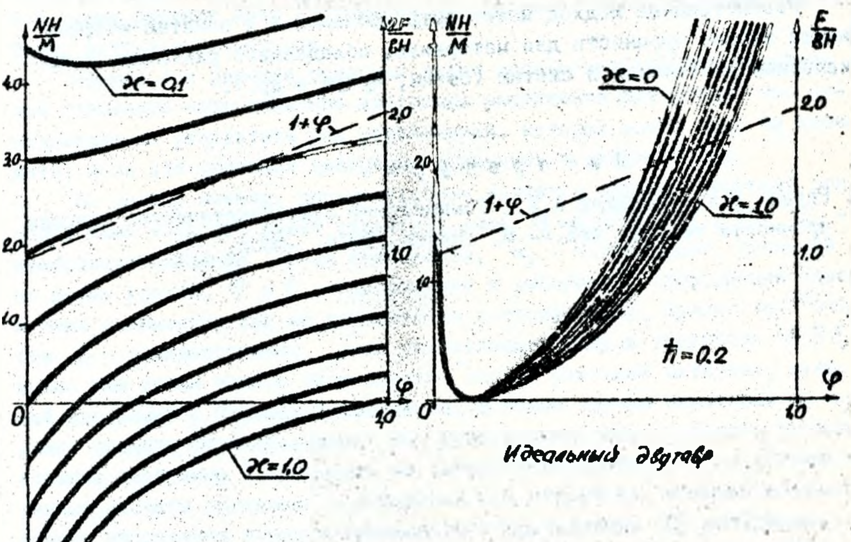

Рис. 2 Связь между нагрузкой, геометрией сечения и структурным параметром материала.

которая при выбранном по кривым (5) и (6) значениям коэффициента формы φ для заданного отношения $\frac{NH}{M}$ позволяет однозначно определить геометрию сечения, обеспечив его оптимальность (без изменения площади F и высоты H сечения).

Для случаев, когда одному и тому же значению отношения $\frac{NH}{M}$ соответствует несколько возможных значений коэффициента формы φ, выбор минимального из них будет соответствовать и минимальным растягивающим напряжениям, к чему, по возможности, следует стремиться для обеспечения механической надежности конструкции.

Из условия положительности коэффициентов $\varkappa, \beta, \gamma$ и условия (4) вытекает общее ограничение, накладываемое на сечения любой формы (не только для двух конкретно рассмотренных) - сечения могут быть оптимизированы в указанном выше смысле только в случае, если в их первоначальных очертаниях выполнялось $\frac{h_p}{h_c} > \varkappa$.

Рассмотренный подход может быть применен и к понятию коэффициента запаса прочности для материала, обладающего различным сопротивлением растяжению и сжатию (бетон, чугун и др.).

Литература

I. Регель В.Р., Слуцкер А.И., Томашевский Э.Е. Кинетическая природа прочности твердых тел. - М. :Наука, 1974, -560с.