

УЧЕТ И ВЛИЯНИЕ ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССЫ НА ВЕЛИЧИНУ
УДАРНОГО ИМПУЛЬСА ПРУЖИНЫ РАСТЯЖЕНИЯ, НАВИТОЙ
С ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫМ НАТЯГОМ

П.И.Соловей

Рассмотрим пружину, к подвижному правому концу которой присоединен груз массой M_0 , а левый ее конец закреплен на неподвижной опоре. Жесткость пружины характеризуется некоторым коэффициентом C , значение которого можно определить по формуле Реле [1], как для обычной винтовой пружины

$$C = \frac{Gd^4}{8D^3n} = \frac{Gd^5}{8D^3L_0}, \quad (1)$$

где G - модуль сдвига; d - диаметр проволоки; D - средний диаметр; n - число витков; L_0 - длина пружины в свободном состоянии.

Для исследования введем в рассмотрение вспомогательную (базовую) пружину, все параметры которой соответствуют параметрам реальной пружины, но отсутствует предварительный натяг. Если длина базовой пружины в естественном состоянии равна $l_0 < L_0$, то из условия линейности ее характеристики усилие предварительного натяга

$$N_0 = C_1 \frac{L_0 - l_0}{l_0}; \quad C_1 = Cl_0. \quad (2)$$

Тогда деформацию пружины от действия предварительного натяга N_0 и приложения растягивающей силы $P > N_0$ удобнее представить с помощью безразмерных параметров

$$\alpha_0 = \frac{L_0 - l_0}{l_0}; \quad \alpha = \frac{L - l_0}{l_0}; \quad \beta = \frac{\alpha_0}{\alpha} \quad (3)$$

где L - длина пружины после статического приложения силы $P > N_0$.

Представим отношение масс в виде параметра $M = M_0/m$. Рассмотрим движение реальной пружины при следующей постановке задачи: в начальный момент пружина растянута силой P и о ее правый конец ударяется со скоростью V_0 груз массой M_0 . В дальнейшем система предоставлена самой себе, и груз неразрывно связан с пружиной [2].

В течение некоторого промежутка времени t , до образования зоны посадки движение реальной пружины не отличается от движения базовой пружины. Для описания этого этапа заменим базовую пружину эквивалентным стержнем той же длины, плотности и жесткости и введем лагранжеву систему координат с началом на правом конце пружины и ось Z , направленной влево (рис. 1). Движение пружины описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} = 0, \quad (4)$$

$$0 \leq Z \leq l_0, \quad a = \sqrt{c_1 l_0 / M},$$

при этом деформация $W = W(Z, t)$ удовлетворяет начальным и граничным условиям

$$W(Z, 0) = W_0(Z) = \alpha(Z - l_0);$$

$$W(l, t) = 0; \quad \left. \frac{\partial W}{\partial t} \right|_{\substack{Z=0 \\ t=0}} = V_0; \quad (5)$$

$$\left[\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{a^2}{\mu l_0} \frac{\partial W}{\partial Z} \right]_{Z=0} = 0.$$

Здесь a - является скоростью распространения упругих возмущений.

Используя хорошо известные методы [3, 4], находим решение волнового уравнения (4), при дополнительных условиях (5) в виде

$$W(Z, t) = W_0(Z) \quad \text{при } t < Z/a;$$

$$W(Z, t) = \alpha(l_0 - at) - \mu l_0 \left(\alpha - \frac{V_0}{a} \right) \left[1 - \exp\left(-\frac{at - Z}{\mu l_0} \right) \right] \quad (6)$$

$$\text{при } \frac{Z}{a} \leq t \leq \frac{l_0}{a}.$$

Зона посадки образуется в тот момент, когда градиент деформации в некоторой точке пружины достигает значения α_0 . В соответствии с (6), градиент деформации

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \left(\alpha - \frac{V_0}{a} \right) \exp\left(-\frac{at - z}{M L_0} \right) \quad (7)$$

минимален на правом конце пружины ($z = 0$), поэтому момент начала образования зоны посадки

$$t_1 = \frac{M L_0}{a} \ln \frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \quad \alpha_1 = \alpha - \frac{V_0}{a} \quad (8)$$

Если $\alpha_1 \leq \alpha_0$, зона посадки образуется в начальный момент ($t_1 = 0$).

В приведенных рассуждениях нигде не накладывались ограничения на знак V_0 , однако следует иметь в виду, что при $V_0 < 0$ градиент деформаций на правом конце минимален лишь для части пружины, пришедшей в движение вследствие распространения упругих возмущений. Поскольку зона посадки может образоваться только в этой части пружины, данное обстоятельство не ограничивает справедливости полученного результата (8) при $V_0 < 0$.

Проанализируем движение реальной пружины при $t > t_1$. Начиная с момента времени t_1 фронт посадки движется влево. Уравнение движения фронта посадки можно получить на основании теоремы об изменении импульса. Запишем соотношение между скоростью \dot{z}_φ перемещения фронта посадки и скоростью V движения сожнутой части пружины и груза M_0 . Для этого воспользуемся условием совместности Адамара, записанным для деформаций W [5],

$$\left[\frac{\partial W}{\partial t} \right] + \dot{z}_\varphi \left[\frac{\partial W}{\partial z} \right] = 0 \quad (9)$$

Квадратные скобки здесь имеют следующий смысл

$$\begin{aligned} [f] &= f_+ - f_-; \\ f_+ &= f(z_\varphi + 0); \\ f_- &= f(z_\varphi - 0). \end{aligned} \quad (10)$$

В рассматриваемом случае

$$\left. \frac{\partial W}{\partial z} \right|_{z=z_p-0} = \alpha_0; \quad \left. \frac{\partial W}{\partial t} \right|_{z=z_p-0} = V, \quad (11)$$

так что искомое соотношение принимает вид

$$V = \left(\left. \frac{\partial W}{\partial z} \right|_{z=z_p} - \alpha_0 \right) \dot{z}_p + \left. \frac{\partial W}{\partial t} \right|_{z=z_p} \quad (12)$$

Здесь производные следует вычислять, используя решение (6) волнового уравнения.

Предположим (а в дальнейшем докажем), что с момента образования зоны посадки $\dot{z}_p \geq a$. В этом случае фронт посадки движется быстрее распространения упругих возмущений, поэтому образование фронта посадки не влияет на часть пружины, которая находится левее фронта посадки, и для деформаций W при $z > z_p$ справедливо решение (6) волнового уравнения.

Сила, действующая на часть пружины, расположенную правее некоторой точки $z = z_p$

$$N(t') = N \quad \text{при} \quad t' < \frac{z_p}{a};$$

$$N(t') = C_1 \left. \frac{\partial W}{\partial z} \right|_{z=z_p} = C_1 \alpha_1 \exp\left(-\frac{at' - z_p}{\mu l_0}\right) \quad (13)$$

при $\frac{z_p}{a} \leq t' \leq t$

Применяя теорему об изменении импульса к части пружины, находящейся правее точки $z = z_p$ на протяжении промежутка времени от начала движения и до момента t , когда фронт посадки приходит в точку $z = z_p$, запишем

$$\left(M_0 + \frac{z_p}{l_0} M \right) \left\{ \left[\alpha_1 \exp\left(-\frac{at - z_p}{\mu l_0}\right) - \alpha_0 \right] \frac{dz_p}{dt} + \alpha a - \right.$$

$$\left. - \alpha_1 a \exp\left(-\frac{at - z_p}{\mu l_0}\right) \right\} - M_0 V_0 = N \frac{z_p}{a} +$$

$$+ \int_{z_p/a}^t C_1 \alpha_1 \exp\left(-\frac{at' - z_p}{\mu l_0}\right) dt', \quad z_p = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (14)$$

Для V использовано соотношение (12) совместно с выражениями (6) и (7).

Введем далее характерные единицы ^{длины} μl_0 , времени $\mu l_0/a$ и скорости a и перейдем к безразмерным переменным

$$x = \frac{z_p}{\mu l_0}; \quad s = \frac{a(t-t_1)}{\mu l_0}; \quad u = \frac{v}{a} \quad (15)$$

Поскольку z_p в уравнении (14) определено в момент времени t , интеграл в правой части по t' можно вычислить в явном виде. Кроме того, с учетом соотношения (8) получаем

$$\exp\left(-\frac{at-z_p}{\mu l_0}\right) = \frac{x_0}{x_1} e^{(x-s)}$$

Используя равенство $N = \sigma x$, преобразуем выражение (14)

$$(1-x)(e^{x-s}-1) \frac{dx}{ds} - x e^{x-s} = 0, \quad (16)$$

$$x = 0 \quad \text{при} \quad s = 0.$$

Отметим, что величина $(x-s)$ в безразмерной форме определяет разность расстояний, проходимых фронтами посадки и упругих возмущений за время, прошедшее с момента t_1 . Так как к моменту времени t_1 фронт упругих возмущений прошел расстояние

$$z_1 = at_1 = \mu l_0 \ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right), \quad (17)$$

встреча фронтов упругих возмущений и зоны посадки произойдет в тот момент, когда разность расстояний $x-s$ достигнет значения $z_1/\mu l_0$. Для определения момента S_1 встречи фронтов перейдем к переменной

$$y = x - s, \quad (18)$$

представим выражение (16) в виде

$$\frac{ds}{dy} = \frac{e^y - 1}{1 - e^y/(1+s+y)}; \quad s=0 \quad \text{при} \quad y=0 \quad (19)$$

и перейдем к интегральному уравнению

$$S_1 = \int_0^{z_1/\mu l_0} \frac{(e^y - 1) dy}{1 - \frac{e^y}{1+s(y)+y}} \quad (20)$$

Решение (20) можно найти численными методами. Предварительно обсудим некоторые свойства уравнения (19). Раскрывая по правилу Лопиталя неопределенность в правой части уравнения (19) при $S \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$, можно показать, что

$$\left. \frac{dS}{dy} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 1 \quad (21)$$

С учетом соотношений (15) и (18) производная dy/dS определяет скорость сближения фронтов упругих возмущений и зоны посадки в единицах α . В момент образования зоны посадки эта скорость сближения согласно (21) равна α , а затем несколько убывает со временем, оставаясь положительной. Для изменения знака dy/dS правая часть уравнения (19), а так же ds/dy должна в некоторый момент времени обратиться в бесконечность, что недопустимо вследствие структуры уравнения (19). Поэтому скорость фронта зоны посадки всегда превышает скорость распространения упругих возмущений, что и предполагалось ранее.

Другой важной особенностью уравнения (19) является то, что оно не содержит каких-либо коэффициентов, характеризующих систему или ее начальное состояние. Поэтому процесс сближения фронтов упругих возмущений и зоны посадки для всех навитых с предварительным натягом пружин с линейными характеристиками и присоединенной массой происходит подобным образом — в момент зарождения зоны посадки скорость ее фронта в 2 раза превышает скорость α распространения упругих возмущений и с течением времени монотонно убывает по некоторому универсальному закону, определяемому уравнениями (16) и (19), оставаясь всегда больше α . Время встречи фронтов зависит, согласно (20), от отношения параметров α_1/α_0 .

В таблице I приведены результаты численного решения уравнения (19), а также значения производной dy/dS , определяющей разность скоростей фронтов зоны посадки и упругих возмущений в единицах α . При увеличении y эта разность достаточно быстро убывает, так что при больших значениях отношения α_1/α_0 потребуются достаточно большой промежуток времени, чтобы фронт зоны посадки смог догнать фронт упругих возмущений. Этот промежуток времени S_1 можно определить по таблице при $y_1 = \ln \alpha_1/\alpha_0$. Учитывая промежуток времени (8), прошедший до зарождения зоны посадки, определим (в единицах $\mu c_0/a$) момент встречи фронтов.

Таблица I

Результаты численного решения уравнения (19)

y	0,0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22
S	0,0	0,021	0,042	0,064	0,087	0,110	0,135	0,161	0,187	0,215	0,243	0,272
dy/ds	1,0	0,97	0,93	0,89	0,86	0,83	0,80	0,77	0,74	0,72	0,69	0,67
y	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38	0,40	0,42	0,44	0,46
S	0,303	0,334	0,366	0,400	0,434	0,470	0,507	0,545	0,584	0,642	0,666	0,708
dy/ds	0,65	0,63	0,61	0,59	0,57	0,55	0,54	0,52	0,50	0,49	0,47	0,46
y	0,48	0,50	0,52	0,54	0,56	0,58	0,60	0,62	0,64	0,66	0,68	0,70
S	0,752	0,796	0,844	0,892	0,941	0,992	1,04	1,10	1,15	1,21	1,27	1,33
dy/ds	0,45	0,44	0,42	0,41	0,40	0,39	0,38	0,37	0,36	0,35	0,34	0,33

Таблица I (продолжение)

y	0,72	0,74	0,76	0,78	0,80	0,82	0,84	0,86	0,88	0,90	0,92	0,94	0,96
S	1,39	1,45	1,52	1,56	1,65	1,72	1,79	1,87	1,94	2,02	2,10	2,18	2,26
dy/ds	0,32	0,31	0,30	0,30	0,29	0,28	0,28	0,27	0,26	0,26	0,25	0,24	0,24
y	0,98	1,00	1,02	1,04	1,06	1,08	1,10	1,12	1,14	1,16	1,18	1,20	
S	2,35	2,44	2,53	2,62	2,71	2,81	2,91	3,01	3,11	3,22	3,33	3,44	
dy/ds	0,23	0,23	0,22	0,21	0,20	0,20	0,20	0,20	0,19	0,19	0,18	0,18	
y	1,22	1,24	1,26	1,28	1,30	1,32	1,34	1,36	1,38	1,40	1,42	1,44	
S	3,55	3,67	3,79	3,91	4,04	4,17	4,30	4,43	4,57	4,71	4,85	5,00	
dy/ds	0,17	0,17	0,165	0,161	0,160	0,154	0,151	0,147	0,144	0,140	0,137	0,134	
y	1,46	1,48	1,50	1,52	1,54	1,56	1,58	1,60	1,62	1,60	1,90	2,00	
S	5,15	5,31	5,46	5,62	5,79	5,96	6,14	6,31	7,28	6,30	9,47	10,80	
dy/ds	0,131	0,128	0,126	0,123	0,120	0,117	0,115	0,112	0,101	0,090	0,079	0,073	

$$s_2 = s_1 \ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right) + \ln\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_0}\right) \quad (22)$$

Место встречи фронтов ввиду выбранной единицы скорости характеризуется координатой, в безразмерных переменных численно равной $s_2(x_2 = s_2)$, что после перехода к обычным переменным дает

$$z_2 = \mu l_0 s_2 = \mu l_0 \left[s_1 \ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right) + \ln\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_0}\right) \right] \quad (23)$$

Эти рассуждения правомерны, если $z_2 \leq l_0$. В противном случае в решении (6) волнового уравнения при $t > l_0/a$ необходимо учитывать волну, отраженную от левой опоры. Полагаем, что $z_2 \leq l_0$ ($s_2 \leq \mu^{-1}$).

Дальнейшее движение устройства рассматриваем как в работе [6]. С момента времени, когда фронт посадки настиг фронт упругих возмущений, пружину следует считать состоящей из двух участков — неподвижного с градиентом деформации α левее фронта посадки и движущегося со скоростью V сомкнутого правого участка.

Необходимо иметь в виду, что при достаточно большой начальной скорости присоединенной массы

$$V_0 \geq a(x - x_0), \quad (24)$$

как следует из (6...8), зона посадки образуется в момент удара груза M_0 о пружину и уже с начального момента пружину следует рассматривать состоящей только из двух участков, т.е. в этом случае $t_2 = 0$; $s_2 = 0$. Применим теорему об изменении импульса в интегральной форме для части пружины, образующей к моменту t зону посадки. Учитывая, что соотношение (12) в рассматриваемом случае принимает вид

$$V = (x - x_0) \dot{z}_f, \quad (25)$$

запишем

$$\left(M_0 + \frac{z_{cp}}{l_0} M\right)(x - x_0) \frac{dz_{cp}}{dt} - M_0 V_0 = C_1 x t; \quad (26)$$

$$\frac{\mu l_0}{a} \leq t \leq \frac{l_0}{a}$$

После перехода к безразмерным переменным уравнение движения фронта посадки витков принимает вид

$$(1-\beta)(1+x) \frac{dx}{ds} = \frac{U_0}{x} + S; \quad S_2 \leq S \leq \frac{1}{\mu} \quad (27)$$

Принтегрировав уравнение (27) с учетом того, что верхний предел переменный, а на нижнем пределе $x_0 = x_2 = S_2$, находим закон движения фронта посадки

$$(1-\beta) \left[(1+x)^2 - (1+S_2)^2 \right] = \left(\frac{U_0}{x} + S \right)^2 - \left(\frac{U_0}{x} + S_2 \right)^2 \quad (28)$$

Приняв здесь $x = \mu^{-1}$ (длина пружины в безразмерных переменных), получим время, прошедшее с начала движения до удара зоны посадки витков о левую опору

$$S^* = \frac{1}{\mu} \left\{ (1-\beta) \left[(1+\mu)^2 - \mu^2 (1+S_2)^2 \right] + \mu^2 \left(S_2 + \frac{U_0}{x} \right)^2 \right\}^{1/2} - \frac{U_0}{x}; \quad (29)$$

$$t^* = \frac{\mu l_0}{a} S^*$$

При известном значении t^* также по теореме об изменении импульса определяем скорость груза в момент удара о левую опору:

$$V^* = \frac{N \dot{z}^*}{M(1+\mu)} = a \frac{\mu x}{1+\mu} S^*, \quad (30)$$

что в свою очередь позволяет найти импульс системы в момент удара и потери механической энергии на образование связей между витками.

При $V_0 = 0$, $M = 0$ и $S_2 = 0$ приходим к результату, полученному в [3],

$$t^* = l_0 (1 - \beta)^{1/2} / a \quad (31)$$

Время движения устройства до удара о левую опору, определяемое соотношением (29), зависит от трех параметров (кроме масштаба времени) — μ , α/α_0 , V_0/α_0 . Рассмотрим в качестве примера устройство с $\mu = 0,2$ при $V_0 = 0$ и $\alpha/\alpha_0 = 3$. В соответствии с данными таблицы $S_1 = 2,91$. Тогда $S_2 = 2,91 + 1,1 = 4,01 \text{ м}^{-1}$, и, следовательно, фронт зоны посадки достигнет фронт упругих возмущений примерно на расстоянии $0,2 l_0$ от левой опоры. Время движения до удара о левую опору согласно (29) $t_m^* = 0,97 l_0 / a$, тогда как при $\mu = 0$ согласно (31) получим $t^* = 0,82 l_0 / a$. Поскольку импульс, приобретенный системой к моменту удара о левую опору, пропорционален времени t^* , приведенный пример свидетельствует о том, что присоединенная масса позволяет существенно увеличить ударный импульс при незначительном увеличении размеров системы. Аналогичные вычисления для $\alpha/\alpha_0 = 2$ и $\mu = 0,2$ приводят к результатам $S_2 = 0$, $t_m^* = 0,84 l_0 / a$ и $t_0^* = 0,71 l_0 / a$, а для $\alpha/\alpha_0 = 2$ и $\mu = 0,5$ находим $S_2 = 2,0$, $t_m^* = l_0 / a$ и $t_0^* = 0,71 l_0 / a$.

При принятых ограничениях (встреча фронтов должна произойти не позже, чем упругая волна достигнет левой опоры) максимальный ударный импульс, равный Ma , реализуется в том случае, если встреча фронтов происходит на левой опоре. Выбрав из каких-либо соображений, например конструктивных, отношение α/α_0 , с помощью таблицы определяем значение S_2 . Для обеспечения максимального ударного импульса теперь необходимо выбрать приведенную массу, соответствующую параметру $\mu = S_2^{-1}$. Этот случай реализуется в последнем из рассмотренных примеров.

Таким образом, приведенные результаты позволяют решать вопросы конструирования ударных устройств с учетом создания требуемого ударного импульса, их быстродействия, габаритов и т.д.

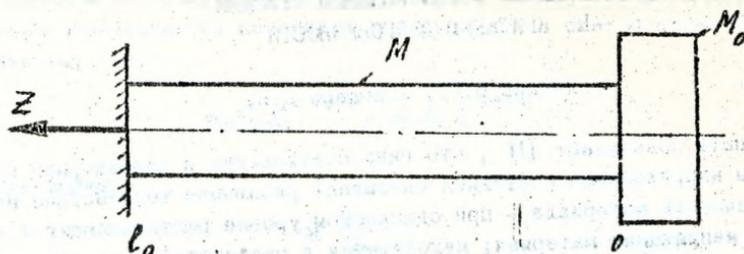


рис. 1

Л и т е р а т у р а

1. Пономарев С.Д. Расчет и конструкция витых пружин. -Л. :ОНТИ, 1938, -351 с.
2. Вихренко В.С., Соловей П.И. Динамика навитой с предварительным натягом пружины с присоединенной массой// Расчеты на прочность. -М.: Машиностроение, 1983 -Вып. 24 -с.112-120.
3. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. -М.: Высшая школа, 1980, -408 с.
4. Бидерман В.Л. О распространении волн продольной деформации при нелинейной и "жесткой" зависимости между напряжениями и деформациями// Расчеты на прочность. -М.: Mashgiz, 1960- Вып.6 -С.53-59.
5. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. -183 с.
6. Вихренко В.С., Гуськов А.М., Соловей П.И. Удар пружиной, навитой с предварительным натягом// Известия вузов. Сер. Машиностроение. -1981. - №8, -С.28-32.