ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА СВЕРТКИ, СВОДЯЩЕЕСЯ К ДВУМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

Т.А. Тузик

Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$\mu_1 u(\xi,\tau)e^{-\xi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(\xi-s,\tau-\theta)u(s,\theta)e^{-s}\,ds\,d\theta +$$

$$+\mu_2\int_{-\infty}^{\infty} m(\tau,\theta)u(\xi,\theta)\,d\theta + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\omega(\xi-s,\tau,\theta)u(s,\theta)\,ds\,d\theta = g(\xi,\tau), \qquad (\mathrm{I})$$

$$-\infty<\xi<\infty,\ -\infty<\tau<\infty,$$

где $a(\xi,\tau)$, $b(\xi,\tau)$, $\omega(\xi-s,\tau,\theta)$, $m(\tau,\theta)$ – заданные функции, а μ_1,μ_2 – постоянные числа, при этом функции $a(\xi,\tau)$ и $b(\xi,\tau)$ абсолютно интегрируемы по обеим переменным.

$$\omega(\xi-s,\tau,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} b(\xi-s,\tau-\eta)m(\eta,\theta)\,d\eta.$$

Функция $m(\tau,\theta)$ содержит функцию Бесселя первого рода

$$m(\tau,\theta) = -\sqrt{\frac{\theta}{\tau}}\,J_1(2\sqrt{\tau\theta}),\ \tau\theta>0;\quad m(\tau,\theta)=0,\ \tau\theta<0.$$

Правая часть уравнения (I) – функция $g(\xi,\tau)$ принадлежит пространству $L_2(-\infty,\infty)\times\widetilde{K}(-\infty,\infty)$, в этом же пространстве ищем решение $u(\xi,\tau)$ исходного уравнения.

Описываем кратко пространства функций, которым принадлежат искомая функция $u(\xi,\tau)$ и ее двумерное преобразование Фурье $U(x,t)$.

$$L_2(-\infty,\infty)\times K(-\infty,\infty) = \left\{ U(x,t)\ \Big|\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(t)\,|U(x,t)|^2\,dx\,dt < C \right\}.$$

Весовая функция $\rho(t)$ положительна и удовлетворяет условию $\rho(-1/t) = t^2\rho(t)$.

Функция $U(z,t)$ должна быть аналитич[illegible]ой при $0<y<1$,

$-\infty < x < \infty$, $-\infty < t < \infty$ и для всех $0 \le y \le 1$ существует такая постоянная C, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t) \left| U(x+iy,\, t)\right|^2 dx\,dt < C$$

После применения двумерного преобразования по Фурье [I] к уравнению (I) и использования операционных формул, доказанных в [2], [3], получаем краевую задачу

$$(\mu_1 + A(x,t))\,U(x+i,\,t) + (\mu_2 + B(x,t))\,U(x,-\tfrac{1}{t}) = G(x,t) \qquad (2)$$

Функции $\mu_1 + A(x,t)$ и $\mu_2 + B(x,t)$ непрерывны для $-\infty \le x \le \infty$ и $-\infty \le t \le \infty$. Предположим, что они не обращаются в нуль для $x \in R$ и $t \in R$.

Обозначим

$$\frac{\mu_1 + A(x,t)}{\mu_2 + B(x,t)} = \mu + D(x,t), \qquad \frac{G(x,t)}{\mu_2 + B(x,t)} = G_1(x,t).$$

Итак, имеем краевую задачу, постановка которой принадлежит Ю.И.Черскому.

Найти функцию $U(z,t)$, аналитическую в полосе $0 < \operatorname{Im} z < 1$, ограниченную при $0 \le \operatorname{Im} z \le 1$, $t \in R$, удовлетворяющую условию:

$$U(x,-\tfrac{1}{t}) + (\mu + D(x,t))\,U(x+i,\,t) = G_1(x,t),\; x \in R,\; t \in R. \qquad (3)$$

Сначала решим задачу о скачке.

$$\Psi(x,-\tfrac{1}{t}) + \lambda\,\Psi(x+i,\,t) = H(x,t),\; x \in R,\; t \in R \qquad (4)$$

Для нахождения функции $\Psi(x,t)$ используем преобразование Фурье по переменной x, решим функциональное уравнение и получим формулу, где интеграл имеет главное значение

$$\Psi(x,t) = \frac{H(x,-\frac{1}{t}) - H(x,t)}{4} +$$

$$+\frac{i\lambda^{ix}}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{H(s,-\frac{1}{t})}{th\,\frac{\pi(x-s)}{2}}-\frac{H(s,t)}{cth\,\frac{\pi(x-s)}{2}}\right)\frac{ds}{\lambda^{is}},$$

$$-\infty<x<\infty,\quad -\infty<t<\infty.$$

Далее рассмотрим краевую задачу (3) в случае нулевого индекса.

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\arg\left(\mu+D(x,t)\right)\right\}\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty}=0.$$

Факторизуем функцию $\mu+D(x,t)$, т.е. представляем ее в виде

$$\mu+D(x,t)=\frac{\Omega(x,-1/t)}{\Omega(x+i,t)}, \tag{5}$$

тогда решение краевой задачи (3) сводится к решению задачи о скачке (4) и определению канонической функции $\Omega(x,t)$, удовлетворяющей условию (5), и имеет вид

$$U(x,t)=\Omega(x,t)\cdot\Psi(x,t).$$

Решение исходного уравнения (I) определим по формуле

$$u(\xi,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}U(x,t)\,e^{-ix\xi-it\tau}\,dx\,dt.$$

ЛИТЕРАТУРА

I. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. М., 1978.
2. Тузик Т.А. // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат.наук. 1990. № 2. С. 35-40.
3. Тузик Т.А.// Известия АН БССР. Сер. физ.-мат.наук. 1991. № 6. С. 23-26.