СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ P_3

Н.П.Зизелюк

В общем случае 3-е уравнение Пенлеве (P_3)

$$zww'' = zw'^2 - ww' + \alpha w^3 + \beta w + \gamma z w^4 + \delta z \tag{I}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - $const$

не проинтегрировано в классических трансцендентных функциях.

Покажем, что при наложении некоторых ограничений на интеграл уравнения (I), оно имеет решение удовлетворяющее некоторым начальным условиям.

Выполним в (I) замену: $W = \frac{C_1}{y}$; $z = C_2 x$ (2)

получим:

$$xyy'' = xy'^2 - yy' - \alpha C_1 C_2 y - \beta \frac{C_2}{C_1} y^3 - \gamma C_1^2 C_2^2 x - \delta \frac{C_2^2}{C_1^2} x y^4 \tag{3}$$

где C_1 , C_2 - $const$

которое, с точностью до обозначения коэффициентс , совпадает с (I), а их интегралы удовлетворяют условию: $W y = C_1$ (4)

Из (3) следует, что в уравнении (I) два отличных от нуля параметра всегда можно зафиксировать, т.е. пусть $\gamma = 1$, $\delta = -1$ в (I).

При таких значениях параметров γ и δ заменим (I) эквивалентной системой:

$$\begin{cases} zw' = z + (1-\beta)w + w^2 u \\ zu' = -\alpha z + z^2 w - (1-\beta)u - wu^2 \end{cases} \tag{5}$$

Из (5) получим: (6)

$$u = \frac{zw' - z - (1-\beta)w}{w^2}$$

$$W = \frac{zu' - \alpha z + (1-\beta)u}{z^2 - u^2} \qquad (6'')$$

$$zu'' + (2-\beta)u' + u^2 - z^2 - \alpha = -(zuu' + \alpha u + (\beta-3)z)w \qquad (6''')$$

Из (6'') получим: $W = \frac{1}{u} + \frac{zuu' + (2-\beta)u^2 - \alpha z u - z^2}{u(z^2 - u^2)}$ (7)

В (7) для выполнения условия (4) при $C = 1$ имеем:

$$zuu' + (2-\beta)u^2 - \alpha z u - z^2 = 0 \qquad (8)$$

где $u \neq 0$; $u \neq \pm z$.

Тогда из (5) следует, что: $zw' = z + (2-\beta)w$ (9)

и $(uw)' = u + \alpha w + zw^2$ (10)

Из (9) и (10) при выполнении условия $uw = 1$ следует, что

$$\begin{cases} w' = 1 + \frac{2-\beta}{z} w \\ 1 + \alpha w^2 + z w^3 = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

Система (11) определяет начальные условия для построения решений как (1), так и (6''') обладающих отмеченным свойством (4).

Замечание. Если в пункте (8):

1) $u = z$, то $zw' = z + (1-\beta)w + zw^2$ при $2-\beta-\alpha = 0$

2) $u = -z$, то $zw' = z + (1-\beta)w - zw^2$ при $2-\beta+\alpha = 0$

ЛИТЕРАТУРА

1. Э.Л.Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- Харьков, ОНТИ, 1939.- С.463.