

УДК 614.8+504.0612

Шведовский П.В., Волчек А.А.

ОСОБЕННОСТИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РЕДКИХ СОБЫТИЙ В ФИКСИРОВАННОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ

Введение. Климатические особенности последних десяти лет начинают волновать не только ученых-климатологов, но и общественность в целом. При этом точки зрения на все изменения климата диаметрально противоположные: от глобального потепления через парниковый эффект, до глобального похолодания через нарушение потоков теплых океанических течений и воздушных потоков.

Анализ закономерностей и случайностей климатических процессов. Для долгосрочных и сверхдолгосрочных прогнозов изменений климата обычно служат предикторы, которые имеют большую «память». При этом успех прогнозирования изменения тенденций, основанный на экстраполяции длинных временных рядов, определяется его стационарностью и величиной квазипериодической вариации.

Проанализируем тенденции изменений зимних экстремальных явлений за последнее тысячелетие.

За XI век в русских летописях отмечено всего 25 экстремальных явлений, из них четыре жестокие зимы, что примерно в пять раз меньше, чем в XII в. (120 экстремальных явлений). Постепенное похолодание климата в Европе с этого периода весьма рельефно отражено в русских летописях. Во второй половине XIII в. мягкие зимы чередуются с холодными, но уже в 1187 году стояли морозы, каких прежде на Руси не бывало.

XIII в. и первая половина XIV в. характеризуются умеренными мягкими зимами. В последней четверти XIV в. наступают сильные морозы. В 1378, 1390, 1391 и 1393 годах практически полностью «вымерзли» болота, реки и озера. В 1435 году засвидетельствован возврат холодов в начале лета. Для десятилетия с 1436 по 1445 годы характерны необычайно малоснежные, но холодные зимы. Затем чрезвычайно суровыми были зимы в 1467, 1470, и особенно 1477 год, когда 31 мая еще не растаял на водоемах лед.

С 1491 по 1496 годы снова наблюдались лютые многоснежные зимы.

Повышенная экстремальность природных зимних явлений стала проявляться особенно в XVII в. Из года в год наблюдаются то необычайно холодные, то мягкие, то слишком снежные, то малоснежные (голые) зимы. Нередко возвраты холода весной, заморозки в начале лета или ранней осенью.

Необычайно холодная зима относится к 1624 году. Только в конце мая растаял снег. Через год холода повторились уже в Западной Европе и особенно в Германии.

Климатические условия на Европейской части России в XVIII в. отличались значительными колебаниями. В этот период отмечено 18 жестких зим, в их числе особо суровыми были зимы 1709 и 1740 годы.

XIX в., несмотря на похолодание, охватившее в начале столетия значительную территорию Европейской части России, не отличается значительными колебаниями климата, при этом характерно увеличение числа мягких зим.

В XX в. наиболее суровыми были зимы в 20 и 40-х годах. Но, бесспорно, беспокойство вызывают климатические изменения в 2012 году, когда зима наступила фактически только в начале февраля с массовыми снегопадами от северного полюса до тропиков и

температурами до минус -33° и ниже. Что это - периодическая цикличность или случайный процесс, как проявление крупномасштабных особенностей циркуляции атмосферы?

Методика исследований. Бесспорно, что прогноз таких редких событий в фиксированном промежутке времени не может базироваться на прогнозе редких событий по длинному временному ряду, который позволяет выявить как циклические, так и стохастические закономерности и законы их распределения.

Эта, как и некоторые другие прогнозные задачи, можно решить только методом рандомизации чисел псевдосостояний. Сущность метода «псевдосостояний» состоит в том, что состояния системы, потоки переходов из которых являются немарковскими, заменяются эквивалентной группой фиктивных состояний, потоки переходов из которых являются марковскими. За счет расширения числа состояний системы реальные процессы практически можно свести к марковским. Созданная таким образом новая система является статистически эквивалентной реальной системе и уже может быть исследована с помощью аппарата теории марковских цепей.

К процессам, которые введением фиктивных состояний можно свести к марковским, относятся все процессы, происходящие под воздействием потоков Эрланга, для которых распределение интервалов времени между событиями подчиняется гамма-распределению

$$f(T) = \frac{\lambda(\lambda T)^{k-1} e^{-\lambda T}}{\Gamma(k)} \quad (1)$$

с целочисленным параметром формы k .

Известно, что любой сложной системе можно поставить в соответствие не более двух состояний. Система может находиться в естественном состоянии (S_1) или в измененном (катастрофическом) состоянии (S_2).

Переход из S_1 в состояние S_2 может осуществляться под воздействием реальных потоков множества событий, статистическая информация о которых в общем случае может быть представлена самыми различными вариантами и видами.

Однако все их можно свести к единой форме с помощью Фурье-Стилтьеса преобразования функции распределения плотности

$$\varphi(t) = \int_0^{\infty} e^{it\tau} f(\tau) d\tau, \quad (2)$$

а совокупности случайных величин T_1, T_2, \dots, T_n поставить в соответствие эмпирическую характеристическую функцию

$$\varphi(t) = n^{-1} \sum_{k=1}^n e^{itT_k}. \quad (3)$$

Для того, чтобы добиться статистической эквивалентности исходной информации о времени пребывания системы в определенном состоянии преобразованной случайной величиной, необходимо найти закон распределения числа псевдосостояний (порядок потока Эрланга p_n). Очевидно, что такой закон распределения должен удовлетворить по определению характеристической функции следу-

ищему уравнению – дискретному аналогу уравнения

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - it\lambda^{-1})^{-n} p_k = \varphi(t), \quad (4)$$

где $(1 - it\lambda^{-1})^{-k}$ – характеристическая функция распределения Эрланга случайной величины T с целочисленным параметров формы n .

Используя метод моментов и постулируя вид закона распределения p_n и используя свойства характеристических функций, можно составить следующую систему уравнений моментов общего вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r+n-1)!}{(r-1)!} \lambda^{-r} p_n = m_r, r = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Очевидно, что число используемых уравнений вида (5) должно определяться числом параметров закона распределения p_n . Любую сложную систему, осуществляющей переход из состояния S_1 в состояние S_2 , статистическую информацию о времени пребывания которой в состоянии S_1 можно представить в виде характеристической функции $\varphi\{t\}$, может быть поставлено в соответствие пуассоновское число псевдосостояний n , определяемое законом

$$p_n = \frac{v^n e^{-v}}{n!}, n = 0, 1, \dots \quad (6)$$

и интенсивность перехода между псевдосостояниями λ .

Тогда, используя метод моментов и свойства характеристических функций, нетрудно определить среднее число псевдосостояний

$$v = \frac{2}{v_t^2}, \quad (7)$$

где v_t – коэффициент вариации времени пребывания системы в состоянии S_1 с интенсивностью перехода –

$$\lambda = \frac{v}{m_T}. \quad (8)$$

Отсюда, если r случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром v , то этот параметр может рассматриваться как случайная величина, имеющая гамма-распределение с параметром

$$\mu = P(1 - P)^{-1}, m = k, \quad (9)$$

$$f(v) = \frac{\mu}{\Gamma(m)} (\mu v)^{m-1} e^{-\mu v}$$

и тогда вероятность того, что $r=n$, определяется зависимостью

$$p(r = n) = C_{k+n-1}^k p^k (1-p)^n, \quad (10)$$

т.е. случайная величина r имеет отрицательное биномиальное распределение (распределение Паскаля) с параметрами (p, k) .

Для такого случая система расчетных уравнений трансформируется в систему вида

$$\left. \begin{aligned} \lambda^{-1} \frac{(1-p)k}{p} &= m_1; \\ \lambda^{-2} \left[\frac{(1-p)^2 k^2}{p^2} + 2 \frac{(1-p)k}{p^2} \right] &= m_2; \\ \lambda^{-3} \{ E[n^3] + 3E[n^2] + 2E[n] \} &= m_3 \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

из которой однозначно определяются параметры закона Паскаля (k и p) и интенсивность перехода λ .

SHVEDOVSKY P.V., VOLCHEK A.A. Features of forecasting of rare events in the fixed period

In article the possible directions of forecasting of rare events in the fixed period are considered and the technique of forecasting of the extreme natural winter phenomena is given.

Эту модель можно модифицировать и для прогнозирования длительности существования системы. Если параметр v пуассоновского распределения сам является случайной величиной с математическим ожиданием m_v и дисперсией σ^2 и распределен по нормальному закону, то модификация пуассоновского распределения может быть получена следующим образом. Так как производящая функция распределения Пуассона имеет вид

$$f(t) = e^{v(t-1)}, \quad (12)$$

а математическое ожидание $f(t)$ определяется в результате ее осреднения

$$E[f(t)] = e^{m_v(t-1) - \frac{\sigma^2}{2}(t-1)^2}, \quad (13)$$

при этом нижний предел предполагает справедливость условия $\sigma \ll m_v$ (практически $m > 3\sigma$), то используя свойство производящей функции

$$\frac{d^k}{dt^k} f(t) \Big|_{t=1} = E[n^k], \quad (14)$$

можно найти первые три начальных момента случайного числа псевдосостояний.

Тогда исходная система уравнений рассматриваемого случая трансформируется к следующему виду.

$$\left. \begin{aligned} \lambda^{-1} m_v &= m_1; \\ \lambda^{-2} [m_v^2 + \sigma^2 + m_v] &= m_2; \\ \lambda^{-3} [m_v^3 + 3m_v\sigma^2 + 3m_v^2 + 3\sigma^2 + 3m_v] &= m_3 \end{aligned} \right\}. \quad (15)$$

Система (15) однозначно определяет параметры m_v , σ^2 и λ через первые три момента времени существования системы.

Заключение. Предложенная методика прогнозирования, бесспорно, потребует корректировки при ее практической реализации. Однако, она позволяет в фиксированном промежутке времени прогнозировать, с достаточно высоким уровнем вероятности, возможность проявления редких событий.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ивченко, Б.П. Информационная экология / Б.П. Ивченко, Л.А. Мартыщенко // С.-Петербург: Нордмед – издат, 1998. – 201 с.
2. Румбель, Э. Статистика экстремальных значений. – М.: Мир, 1965. – 316 с.
3. Крапивин, В.Ф. О теории живучести сложных систем / В.Ф. Крапивин – М.: Наука, 1978. – 402 с.
4. Мартыщенко, Л.А. Экстремальное распределение экстремальных случайных величин / Л.А.Мартыщенко – Л.: МО СССР, 1989. – 194 с.
5. Райфа, Г. Введение в проблему выбора в условиях неопределенности / Г. Ральфа – М.: Наука, 1970. – 367 с.
6. Шварц, С.С. Закономерности эволюции, климата и экологии / С.С. Шварц – М.: Наука, 1980. – 285 с.
7. Бурлибаев, М.Ж. Чрезвычайные ситуации в природной среде / М.Ж. Бурлибаев, А.А. Волчек, П.В. Шведовский – Каганат Алматы, 2011. – 352 с.

Материал поступил в редакцию 21.03.12