СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И ТЕОРИЯ СООРУЖЕНИЙ

УДК 624.04

МЕТОД СТЕРЖНЕВОЙ АППРОКСИМАЦИИ: РАСЧЕТНАЯ СХЕМА, НЕЛИНЕЙНЫЙ РАСЧЕТ

Борисевич А.А.

Введение. К настоящему времени предложено много способов перехода от континуальной расчетной схемы объекта к дискретной. Способ стержневой аппроксимации изгибающего элемента характеризуется моделированием его работы связями первого вида, т.е. стержнями, в которых возникает только один вид усилия – продольная сила. Сочетание (комбинация) усилий в этих связях при удачном их расположении позволяет определить в поперечном сечении элемента внутренние силы. Соответствующей конструкцией, заменяющей изгибаемый элемент, является пространственная ферма. По усилиям в стержнях этой фермы можно судить о работе моделируемого элемента. Задача, таким образом, сводится к поиску эквивалентных в отношении распределения усилий и перемещений (энергетическая сторона вопроса) расчетных схем.

Принципиальные основы стержневой аппроксимации для пластин, воспринимающих нагрузку в их плоскости (балки-стенки), и пластин, испытывающих изгиб, изложены в [2]. Разработкам шарнирно-стержневых моделей, эквивалентных континуальным системам, посвящены исследования многих ученых [2, 3, 4 и др.]. Расчеты таких систем выполнялись, как правило, в линейной постановке.

Основные расчетные соотношения. В основе метода стержневой аппроксимации, как известно [1], лежит замена сплошного упругого тела стержневой кубической решеткой с внутренними диагоналями и диагоналями граней (рисунок 1). Напряженное состояние сплошной среды и аппроксимирующей ее стержневой системы считаются эквивалентными, если перемещения узлов стержневой системы и соответствующих им точек сплошной среды будут одинаковыми. Это условие позволяет найти матрицу упругих коэффициентов шарнирно-стержневой системы:

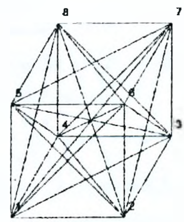

Рисунок 1

$$E_{st} = C^T H^{-1} K C, \qquad (1)$$

где C – матрица преобразования компонентов деформаций в упругой среде:

$$\varepsilon_s = C\varepsilon,$$

$$\varepsilon = \left[\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\right]^T,$$

ε_s – вектор относительных деформаций стержней кубической решетки;

K – диагональная матрица с элементами $k_{ii} = EA_i$;

H – матрица площадей граней куба, приходящихся на один стержень каждого направления.

Матрица C имеет следующий вид:

$C =$

X	Y	Z	XY	YZ	XZ	Направления стержней кубика
1						1–2
	1					1–4
		1				1–5
1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1–7
1/3	1/3	1/3	-1/3	1/3	-1/3	2–8
1/3	1/3	1/3	-1/3	-1/3	1/3	4–6
1/3	1/3	1/3	1/3	-1/3	-1/3	3–5
1/2		1/2			1/2	1–6
1/2		1/2			-1/2	2–5
	1/2	1/2		1/2		1–8
	1/2	1/2		-1/2		4–5
1/2	1/2		1/2			1–3
1/2	1/2		-1/2			2–4

В первых трех столбцах матрицы записаны квадраты косинусов углов между направлениями стержней и направлениями координатных осей. В последующих столбцах записаны произведения косинусов углов между направлениями стержней и направлениями осей X и Y, Y и Z, X и Z. В представленной записи для C отражено наличие в кубической решетке и диагоналей (стержней), расположенных в плоскостях граней.

Матрица E_{ST} имеет вид:

$E_{ST} = E_c \cdot A$

$d+2\gamma$	$k+\gamma$	$k+\gamma$			
$k+\gamma$	$d+2\gamma$	$k+\gamma$			
$k+\gamma$	$k+\gamma$	$d+2\gamma$			
			$k+\gamma$		
				$k+\gamma$	
					$k+\gamma$

Здесь E_c – модуль упругости первого рода материала стержней;

A – площадь сечения каждого из стержней, параллельного координатной оси;

$d = \frac{1}{a^2} + \frac{4\alpha}{3\sqrt{3}\,a^2}$, $\alpha = A_d / A$;; A_d – площадь сечения каждого из диагональных стержней; a^2 – площадь грани куба, приходящаяся на один стержень каждого направления. $k = \frac{4\alpha}{3\sqrt{3}\,a^2}$; $\gamma = \frac{\alpha}{\sqrt{2}\,a^2}$.

Для сплошной упругой среды

$$\sigma = E\,\varepsilon,$$

где E – матрица упругих коэффициентов:

$E =$

$\lambda+2G$	λ	λ			
λ	$\lambda+2G$	λ			
λ	λ	$\lambda+2G$			
			G		
				G	
					G

Здесь $\lambda = \dfrac{2\nu G}{1-2\nu}$,

где ν – коэффициент Пуассона,

G – модуль упругости второго рода.

С помощью выражения (1) и матрицы упругих коэффициентов сплошной среды E можно определить жесткости стержней дискретной структуры.

Приравнивая соответствующие коэффициенты в матрицах для кубической решетки и для упругой среды, получим:

$$k+\gamma=\lambda,\ k+\gamma=G,\ \lambda=G \text{ и } \lambda=\left(\frac{4}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\alpha}{a^2}.$$

Из равенства $\lambda+2G=d+2\gamma$ следует, что $\left(\dfrac{4}{3\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\alpha=1+\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\alpha+\sqrt{2}\alpha$ и, значит, $\alpha=0{,}4451$. При этом значении α соблюдается условие изотропии.

Коэффициент Пуассона равен $\nu=\dfrac{\lambda}{2(\lambda+G)}=0{,}25$.

Наличие диагональных стержней на гранях кубической решетки обеспечивает, в конечном итоге, геометрическую неизменяемость шарнирно-стержневой системы, заменяющей сплошную упругую среду.

Условие совместности деформаций и условие равновесия для стержневой ячейки позволяют получить уравнение, связывающее жесткости стержневой решетки:

$$\sqrt{2}EA_Г+\frac{1}{\sqrt{3}}EA_Д+EA_Р=\varepsilon_x^{-1},$$

где

$EA_Г$ – жесткость диагонального стержня, лежащего в плоскости грани;

$EA_Д$ – жесткость диагонального стержня, расположенного внутри кубической решетки;

$EA_Р$ – жесткость стержня, являющегося ребром решетки.

Принимая $EA_Р-const$ и учитывая истинный интервал изменения ε_x, можно установить соотношение жесткостей между диагональными стержнями. Оказывается, что $EA_Д$ значительно превышает жесткость $EA_Г$. В случае $EA_Г\to 0$ жесткости внутренних диагональных стержней будут отличаться от жесткостей тех же стержней для варианта решетки с $EA_Д=EA_Г$.

Принимая $EA_Д=EA_Г$ и $\alpha=0{,}4451$ из соотношения элементов матрицы упругих коэффициентов сплошной среды и элементов матрицы упругих коэффициентов шарнирно-стержневой системы, можно найти площади сечений стержней, параллельных координатным осям. Сравнение жесткостных характеристик сплошного и решетчатого кубика приводит к следующему.

В матрице жесткости для сплошного кубика ($E=2{,}1\ 10^5$ МПа, $\nu=0{,}25$) с длиной ребра 0,1 м первые три реакции в связях узла равны:

$r_{11}=466667;\ r_{12}=140000;\ r_{13}=140000$

При вычислении элементов этой матрицы поле перемещений (функция формы) описывалось линейными функциями для u, v и w.

Для соответствующего решетчатого кубика, в случае равенства жесткостей внутренних диагональных стержней и диагональных стержней на гранях, соответствующие первые три реакции в связях узла равны:

466667; 80989; 80989.

Частичная неполнота (наличие нулевых элементов) матрицы жесткост стержневой решетки приводит к неточным значениям коэффициента Пуассон для одномерных элементов. Вдоль оси элемента деформации совпадают.

С целью уменьшения количества элементов системы некоторые диагональ ные стержни на гранях могут быть опущены или жесткости для них могут быт приняты $EA \to 0$.

Проверка системы на геометрическую неизменяемость и неподвижност проводится по известным в механике правилам. Соотношение жесткосте внутренних диагональных стержней и стержней-ребер изменяется. Коэффици ент α становится равным $0{,}6495$.

Выполнение "нелинейных" расчетов модели-оригинала с непростой геомет рией сопряжено со значительными трудностями. Рассматриваемый метод, ме тод стержневой аппроксимации позволяет выполнить такие расчеты.

Для численных исследований в настоящей работе использовалась зависи мость «напряжение-деформация» в виде:

$$\sigma = \frac{2{,}1 \cdot 10^5 \varepsilon}{\sqrt{1 + 10^6 \varepsilon^2}}$$

Применение ее в расчетах позволяет с известным приближением моделировать текучесть материала: при $\sigma \to \sigma_{T}$ наблюдается $\varepsilon \to \infty$.

Для определения усилий в стержнях по методу последовательных догружений использовался касательный модуль упругости материала, значение которого в системе единиц СИ определялось по выражению:

$$E = -\frac{2{,}1 \cdot 10^{11} \cdot \varepsilon^2}{\left(1 + 10^6 \varepsilon^2\right)^{1,5}} + \frac{2{,}1 \cdot 10^5}{\left(1 + 10^6 \varepsilon^2\right)^{0,5}}$$

Информация о перемещениях узлов и напряжениях в стержнях после расчетов на последнем шаге нагружения является окончательной для суждения о напряженно-деформированном состоянии исследуемого объекта.

Тестовые расчеты выполнены на примере однопролетной балки (сечение $0{,}1 \times 0{,}3$ м) пролетом 6м, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой.

Заключение. Результаты расчетов по методу стержневой аппроксимации хорошо согласуются с результатами, полученными по известным аналитическим методам или по МКЭ [1].

Моделирование сплошной среды стержневой структурой позволяет осуществлять расчеты по определению напряженно-деформированного состояния и при нелинейных механических характеристиках материала среды.

Список цитированных источников

1. Борисевич, А.А. Метод стержневой аппроксимации в задачах анализа напряженно-дефомированного состояния стержневых и континуальных систем. //Строительная наука и техника. – 2006 – № 3 – С.75–80.

2. Ржаницин, А.Р. Представление сплошного упругого изотропного тела в виде шарнирно-стержневой системы // Исследования по вопросам строительной механики и теории пластичности ЦНИПС. – М., 1956.

3. Лубо, Л.Н. Стержневые модели сплошных упругих тел // Строительная механика и расчет сооружений. – М., 1967. – № 4(52).

4. Чернеева, И.М. Стержневая расчетная схема пластин и оболочек и МКЭ // Теоретические исследования по строительной механике: труды ЛИИЖТ. – Л.: Транспорт, 1968. – Вып. 284.