



Рисунок 7 – График вертикальных колебаний массы M_3 при равномерном движении плети

Выводы. Вертикальные (изгибные) колебания конца аванбека в момент встречи с ППУ происходят с амплитудой 0.000173 м и периодом $T=2.4$ сек. Эти данные выполненных теоретических расчетов подтвердились проведенными геодезическими измерениями сотрудников БелДорНИИ во время монтажа моста. По их данным, основной причиной, влияющей на величину амплитуды изгибных вертикальных колебаний плети, является скорость ветра. Причем при равномерном движении плети и скорости ветра 2-3 м/сек конец аванбека колеблется с размахом 5-6 мм, а при скорости ветра 5 м/сек размах равен 10мм. Поэтому устойчивость колебаний плети на стадиях переходных процессов и равномерного движения со скоростью $v=0.005$ м/сек обеспечена на всех стадиях монтажа моста.

Список цитированных источников

1. Рабинович, И.М. Курс строительной механики. – Статически неопределимые системы. – М.: Госстройиздат, 1954. – Ч. II. – 544 с.
2. Нановко, Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы, ошибки. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
3. Вибрации в технике: под редакцией В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – Т. 1. – 362 с.
4. Кулешов, А. А. Уравнения математической физики в системе Mathematica. – Мн.: БГУ, 2004. – 294 с.

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНЫХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ

Яровая А. В.

Введение. Слоистые элементы конструкций в настоящее время широко применяются в строительстве. Наружные несущие слои трехслойного пакета выполнены из материалов высокой прочности и жесткости и предназначены для восприятия основной части механической нагрузки. Заполнитель служит

для образования монолитной конструкции и обеспечивает перераспределение усилий между несущими слоями. В условиях деформации изгиба трехслойные конструкции оказываются наиболее рациональными, то есть близкими к оптимальным с точки зрения обеспечения минимума весовых показателей при заданных ограничениях на прочность и жесткость. Они также обладают хорошими звукопоглощающим и теплоизоляционным свойствами.

При оценке работы конструкций под воздействием силовых нагрузок в условиях температурных и других физико-механических полей возникают специфические проблемы. Они в первую очередь связаны с определением напряжений и деформаций и формулированием условий достижения предельных состояний: нарушение прочности, появление недопустимых перемещений и т. п. В процессе деформирования материалы конструкций могут проявлять физически нелинейные свойства, учет которых приводит к необходимости разрабатывать новые итерационные методы решения нелинейных дифференциальных уравнений равновесия.

Физические уравнения для материалов пластин. При комплексных термосиловых воздействиях материалы слоев пластин могут проявлять упругие, пластические и вязкие свойства.

Для упругих пластин выполняются соотношения

$$\tau_y = 2G\varepsilon_y, \quad \sigma = 3K(\varepsilon - \alpha T), \quad (1)$$

где s_y, ε_y – девиаторы тензоров напряжений и деформаций, σ, ε – шаровые части тензоров напряжений и деформаций, G, K – модули сдвиговой и объемной деформации, зависящие от температуры; T – температура, α – коэффициент линейного теплового расширения.

Для пластин, материалы слоев которых проявляют пластические свойства, связь девиаторов и шаровых частей можно представить в виде

$$s_y = 2G\varepsilon_y f_1(\varepsilon_u, T), \quad \sigma = 3K(\varepsilon - \alpha T), \quad (2)$$

где $f_1(\varepsilon_u, T) = 1 - \omega_1(\varepsilon_u, T)$ – универсальная функция пластичности, зависящая от интенсивности деформаций ε_u и температуры, причем функцию пластичности следует положить равной единице в тех областях, где $\varepsilon_u \leq \varepsilon_1$, ε_1 – деформационный предел пластичности в момент деформирования.

Заполнители трехслойных пакетов часто выполняются из полимерных материалов, которые обладают рядом специфических физико-механических свойств, таких, например, как зависимость деформирования от величины и знака гидростатического давления σ (увеличение микродефектов при всестороннем растяжении и их «залечивание» при сжатии). Эти особенности не учитываются рассмотренными моделями (2), в которых разделяются соотношения между девиаторами и шаровыми частями тензоров напряжений и деформаций. Простейшие физические уравнения состояния, учитывающие влияние объемного напряжения и температуры T , отсчитываемой от некоторого начального значения T_0 , могут быть введены путем обобщения предыдущих соотношений:

$$\phi_1(\sigma, T)s_y = 2Gf(\varepsilon_u, T)\varepsilon_y, \quad \phi_2(\sigma, T)\sigma = 3K(\varepsilon - \alpha T), \quad (3)$$

где f, ϕ_1 и ϕ_2 – функции нелинейности, $f(\varepsilon_u, T) = 1 - \omega(\varepsilon_u, T)$.

Здесь уравнения для девиаторных величин и их вторых инвариантов (интенсивностей деформаций ε_u) теперь содержат и первые инварианты тензора напряжений σ . Это и позволяет учесть различное поведение полимеров при растяжении и сжатии. При этом предполагается, что функции нелинейности f, ϕ_1 и ϕ_2 в (3) являются универсальными, не зависящими от вида напряженного состояния.

Для расчета температурного поля в трехслойной пластине и описания зависимости модулей упругости материалов от температуры будем использовать соотношения, заимствованные из [1].

Кинематические гипотезы для трехслойных пластин. Рассмотрим поперечно нагруженную трехслойную несимметричную по толщине пластину радиуса r_0 (рисунок 1). Постановки задач и их решения будем проводить в цилиндрической системе координат r, φ, z , связанной со срединной плоскостью заполнителя. Внешняя вертикальная нагрузка не зависит от координаты φ : $q = q(r)$.

Кинематические гипотезы основаны на гипотезе «ломаной» нормали. Для изотропных несущих слоев, толщинами h_1, h_2 , приняты гипотезы Кирхгофа о несжимаемости, прямолинейности и перпендикулярности нормали к деформированной срединной поверхности. В несжимаемом по толщине заполнителе ($h_3 = 2c$) деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$.

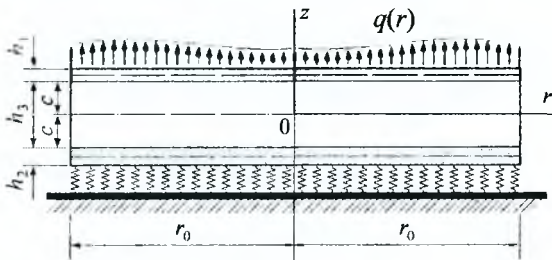


Рисунок 1

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют, а прогиб пластины, относительный сдвиг в заполнителе и радиальное перемещение координатной плоскости не зависят от координаты φ , т. е. $u(r), \psi(r), w(r)$. На границах контакта слоев используются условия непрерывности перемещений. Деформации – малые. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу r_0 .

Заполнитель считается жестким, т. е. в нем, в отличие от модели легкого заполнителя, учитывается работа касательных напряжений σ_{rz} в тангенциальном направлении.

Уравнения равновесия и их решение. С помощью вариационного принципа Лагранжа получена система дифференциальных уравнений равновесия для круговой трехслойной пластины на упругом основании:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) = 0, \quad L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) - 2cG_3 \psi = 0, \\ L_2(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) = -q_0 + \kappa_0 w. \end{aligned} \quad (4)$$

где дифференциальные операторы

$$L_3(g) = \frac{1}{r} (r L_2(g))_{,r} = g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}, \quad L_2(g) = \left(\frac{1}{r} (r g)_{,r} \right)_{,r} = g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}$$

Получить точное решение системы (4) не удалось, поэтому предлагаются два итерационных метода построения приближенного решения.

Первый метод основан на приближении к искомому решению по жесткости основания. В этом случае система (4) переписывается в итерационном виде

$$L_2(a_1 u^n + a_3 \psi^n - a_3 w_r^n) = 0, \quad L_7(a_3 u^n + a_3 \psi^n - a_5 w_r^n) - 2cG_3 \psi^n = 0, \\ L_3(a_3 u^n + a_3 \psi^n - a_6 w_r^n) = -q + \kappa_0 w^{n-1}. \quad (5)$$

На первом шаге приближения ($n = 1$) полагаем $w^0 = 0$, т. е. реакция $q_R = \kappa_0 w^0$ отсутствует и из (5) получаем известную задачу о деформировании трехслойной круговой пластины с жестким наполнителем, не связанной с упругим основанием. На каждом последующем шаге величина w^{n-1} определяется по предыдущему приближению, и выступает в качестве поправки на жесткость основания.

В результате итерационное решение для сплошной круговой трехслойной пластины при ее изгибе на упругом основании, принимает вид:

$$\psi^n = C_2 I_1(\beta r) + I_1(\beta r) \int_0^1 K_1(\beta s) g^{n-1}(s) ds - K_1(\beta r) \int_0^1 I_1(\beta s) g^{n-1}(s) ds, \\ w^n = \frac{1}{d_3} \left[d_2 \int \psi^n dr + \int L_3^{-1}(q - \kappa_0 w^{n-1}) dr + \frac{C_3^n r^2}{4} + C_4^n \right], \\ u^n = \frac{a_3}{a_1 a_6 - a_3^2} \left[L_3^{-1}(q - \kappa_0 w^{n-1}) + \left(a_5 - \frac{a_3 a_6}{a_3} \right) \psi^n + C_7 r \right]. \quad (6)$$

Здесь $K_1(\beta s)$, $g^{n-1}(s)$ — известные функции, линейные интегральные операторы

$$L_2^{-1}(g) = \frac{1}{r} \int r \int g dr dr, \quad L_3^{-1}(g) = \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r g dr dr dr. \quad (7)$$

Второй метод итераций основан на приближении к искомому решению по жесткости наполнителя. В этом случае система уравнений (4) записывается в виде

$$L_2(a_1 u^n + a_3 \psi^n - a_3 w_r^n) = 0, \quad L_2(a_2 u^n + a_4 \psi^n - a_5 w_r^n) = 2cG_3 \psi^n, \\ L_3(a_3 u^n + a_3 \psi^n - a_6 w_r^n) - \kappa_0 w^n = -q. \quad (8)$$

На каждом шаге приближения имеем линейную задачу теории упругости для пластины с легким наполнителем, лежащей на упругом основании, с известной дополнительной «внешней» нагрузкой $h^{n-1} = 2cG_3 \psi^{n-1}$. С учетом ограниченности прогиба в центре пластины рекуррентное решение имеет вид

$$u^n = b_1 w_r^n - \frac{a_2}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int r \int h^{n-1} dr dr + C_1^n r + C_2^n / r, \\ \psi^n = b_2 w_r^n + \frac{a_1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int r \int h^{n-1} dr dr + C_3^n r + C_4^n / r, \\ w_r^n = C_5^n \text{ber}(\kappa r) + C_6^n \text{bei}(\kappa r) + w_0^n(r). \quad (9)$$

При исследовании упругопластической пластины физические уравнения принимались в форме (3). Соответствующая система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях:

$$L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_r) = p_0, \quad L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_r) - 2cG_3 \psi = h_0, \\ L_3(a_3 u + a_3 \psi - a_6 w_r) - \kappa_0 w = -q_0 + q_0^n. \quad (10)$$

Здесь в правой части уравнений собраны нелинейные составляющие с индексом « ω », учитывающие нелинейные свойства материалов слоев.

Для исследования системы (10) применяются комбинации итерационных методов. Первый итерационный метод основан на приближении к упругому решению по жесткости основания, а затем для упругопластической задачи используется известный метод упругих решений. В этом случае слагаемое $k_0 w$ включается в нелинейные добавки с индексом « ω », которые на первом шаге полагаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения. Таким образом, на каждом шаге решается линейная задача с известными дополнительными «внешними» нагрузками. На первом шаге это задача об изгибе упругой круговой трехслойной пластины с жестким заполнителем, не связанной с упругим основанием [2]. Второй итерационный метод основан на приближении к искомому решению по жесткости заполнителя, а затем для упругопластической задачи используется метод упругих решений. В этом случае слагаемое $2cG_3\psi$ из второго уравнения системы (10) включается в нелинейные добавки. На каждом шаге приближения решается линейная задача для круговой трехслойной пластины с легким заполнителем на упругом основании.

Численные результаты. Исследованы пластины, материалы слоев которых Д16Т–фторопласт–Д16Т, с относительными толщинами $h_1 = h_2 = 0,04$, $h_3 = 0,2$. Интенсивность распределенной нагрузки $q_0 = -20$ МПа. Тепловой режим пластин принимался таким же, как и ранее. Основание средней жесткости.

На рисунке 2 показаны перемещения (*a* – прогиб, *b* – сдвиг) в рассматриваемой пластине: 1 – термоупругая пластина, 2 – термопластическая, 3 – термопластическая, с понижением пределов текучести материалов в 2 раза. Физическая нелинейность материалов приводит к увеличению расчетного прогиба на 40 %. Если принять материалы несущих слоев более пластичными, то эта разница составит 83 %.

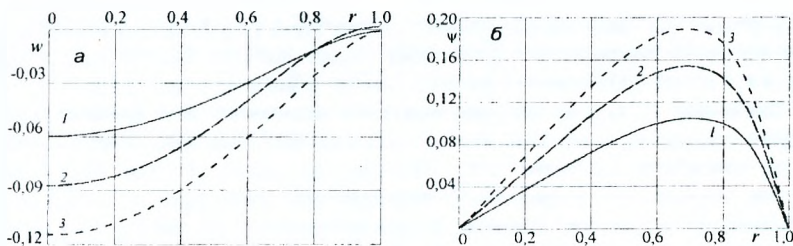


Рисунок 2

Распределение областей физической нелинейности (темная заливка) в поперечном сечении рассматриваемой пластины показано на рисунке 3. Заполнитель на 75 % деформируется нелинейно. В несущих слоях зоны пластичности занимают до 35 % объема материала. Изменение радиальных напряжений по толщине пластины в ее центре показано на рисунке 4: 1 – термоупругая пластина, 2 – термоупругопластическая. Влияние физической нелинейности материалов незначительно. Здесь значения напряжений уменьшены в несущих слоях в 10^9 , в заполнителе – в 10^8 раз.

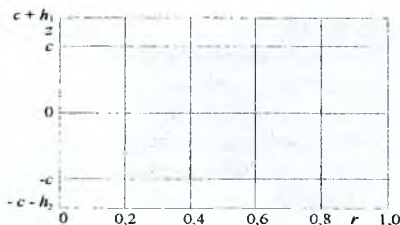


Рисунок 3

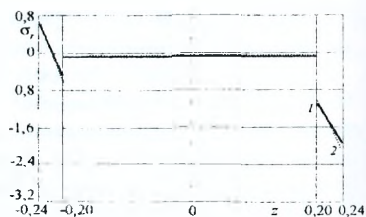


Рисунок 4

Выводы. Полученные результаты можно использовать для исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных круговых пластин с жесткими заполнителями на упругом основании, материалы которых либо упругие, либо проявляют физически нелинейные свойства при комплексном термосиловом воздействии.

Список цитированных источников

1. Старовойтов, Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки/ Э. И. Старовойтов. – Гомель: БелГУТ, 2002. – 344 с.
2. Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций/ А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.

УДК 539.3

БОЛЬШИЕ ПРОГИБЫ ТОНКИХ ПЛИТ

Тур В. В., Тарасевич А. Н.

В статье рассматривается расчет тонких плит при больших прогибах. Приведены дифференциальные уравнения теории расчета тонких плит в упругой стадии. Указана особенность расчета тонких железобетонных плит.

Введение. В курсах теории упругости излагается, как правило, линейная теория «жестких» плит. Она может быть использована при расчетах плит с малыми прогибами, не более $1/4 \dots 1/5$ толщины плиты. В таких плитах перемещения, нормальные к срединной поверхности, столь малы, что не влияют на деформации элементов, лежащих в плоскости плиты [1]. Между тем во многих областях находят применение гибкие плиты и гибкие пластинки (в кораблестроении, самолетостроении, строительстве). Для гибких плит связь между прогибами и нагрузкой будет нелинейной, а гипотеза о недеформируемости срединной плоскости оказывается несправедливой, так как в ней появляются деформации растяжения, сжатия и сдвига. Кроме того, усилия в срединной плоскости зависят от ее прогибов. Под влиянием больших прогибов плиты при соответствующих граничных условиях на контуре возникают продольные усилия независимо от того, действует ли внешняя горизонтальная нагрузка или нет [2].

При обычном применении классической теории изгиба упругих тонких плит применяют гипотезы, предложенные немецким физиком Киргофом.