

Рисунок 3

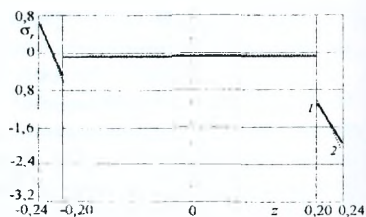


Рисунок 4

**Выводы.** Полученные результаты можно использовать для исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных круговых пластин с жесткими заполнителями на упругом основании, материалы которых либо упругие, либо проявляют физически нелинейные свойства при комплексном термосиловом воздействии.

#### Список цитированных источников

1. Старовойтов, Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки/ Э. И. Старовойтов. – Гомель: БелГУТ, 2002. – 344 с.
2. Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций/ А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.

УДК 539.3

## БОЛЬШИЕ ПРОГИБЫ ТОНКИХ ПЛИТ

Тур В. В., Тарасевич А. Н.

В статье рассматривается расчет тонких плит при больших прогибах. Приведены дифференциальные уравнения теории расчета тонких плит в упругой стадии. Указана особенность расчета тонких железобетонных плит.

**Введение.** В курсах теории упругости излагается, как правило, линейная теория «жестких» плит. Она может быть использована при расчетах плит с малыми прогибами, не более  $1/4 \dots 1/5$  толщины плиты. В таких плитах перемещения, нормальные к срединной поверхности, столь малы, что не влияют на деформации элементов, лежащих в плоскости плиты [1]. Между тем во многих областях находят применение гибкие плиты и гибкие пластинки (в кораблестроении, самолетостроении, строительстве). Для гибких плит связь между прогибами и нагрузкой будет нелинейной, а гипотеза о недеформируемости срединной плоскости оказывается несправедливой, так как в ней появляются деформации растяжения, сжатия и сдвига. Кроме того, усилия в срединной плоскости зависят от ее прогибов. Под влиянием больших прогибов плиты при соответствующих граничных условиях на контуре возникают продольные усилия независимо от того, действует ли внешняя горизонтальная нагрузка или нет [2].

При обычном применении классической теории изгиба упругих тонких плит применяют гипотезы, предложенные немецким физиком Киргофом.

1. Гипотеза прямых нормалей: любой прямолинейный элемент, нормальный к срединной плоскости, остается прямолинейным и нормальным к срединной плоскости после деформирования. Первая часть гипотезы предполагает, что сдвиги отсутствуют, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xz} &= 0 \\ \gamma_{yz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Вторая часть гипотезы предполагает, что линейная деформация в направлении оси  $Z$  отсутствует:

$$\epsilon_z = 0 \quad (2)$$

2. Гипотеза о недеформированности срединной плоскости предполагает, что деформации растяжения, сжатия и сдвига отсутствуют:

$$U_0 = V_0 = 0. \quad (3)$$

3. Гипотеза об отсутствии давления между слоями пластинки, параллельными срединной плоскости, т.е.  $\sigma_z = 0$ , ввиду малости по сравнению с напряжениями  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ .

Для тонких плит гипотеза о недеформируемости срединной плоскости оказывается несправедливой, т.к. в ней появляются деформации растяжения, сжатия и сдвига, и усилия в срединной плоскости зависят от ее прогибов.

Используя вторую часть гипотезы 1, получаем:

$$\epsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

это условие означает, что прогибы пластинки не зависят от координаты  $Z$ , т.е.

$$W = W(x, y).$$

Таким образом, все точки пластины, лежащие на одной вертикали, получают одинаковые перемещения  $W$ . Следовательно достаточно определить перемещения срединной плоскости, чтобы знать вертикальные перемещения всех ее точек.

#### Деформации и кривизны срединной плоскости

Используя условия (1), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

интегрируя по  $Z$ , получаем выражения перемещений срединной плоскости через прогибы:

$$\left. \begin{aligned} U &= U_0 - Z \frac{\partial W}{\partial x} \\ V &= V_0 - Z \frac{\partial W}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$U_0$  и  $V_0$  перемещения вдоль осей  $X$  и  $Y$ .

Деформации точек срединной плоскости :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 - Z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial V_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 - Z \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} + \frac{\partial W^2}{\partial x \partial y} - 2Z \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (7)$$

Кривизны срединной плоскости:

$$\begin{aligned}\chi_x &= -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \\ \chi_y &= -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \\ \chi_{xy} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (8)$$

Уравнение неразрывности деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \quad (9)$$

**Напряжения в тонкой плите. Соотношения между деформациями и напряжениями**

Напряжение в тонкой плите в пределах сделанных допущений может рассматриваться как результат наложения двух состояний: одно из них соответствует напряжениям, равномерно распределенным по толщине пластинки, а второе отвечает напряжениям изгиба. Особенностью задачи о больших прогибах пластинки – как и в других случаях совместного действия усилий в срединной плоскости и усилий изгиба – является то, что уравнения должны быть составлены для деформированного состояния пластинки.

Уравнение проекций сил на оси X, Y дают выражения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\quad (10)$$

Уравнения моментов всех сил относительно осей X и Y дают выражения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\quad (11)$$

После суммирования проекций всех сил на ось Z для элемента пластинки с размерами  $dx$ ,  $dy$  и деления на  $dx dy$  получим следующее выражение:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \sigma_x h \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \sigma_y h \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2\tau h \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + q(x, y) = 0. \quad (12)$$

Предполагаем, что деформации пластинки упругие, далее примем гипотезу об отсутствии взаимного давления слоев пластинки т.е. считаем, что нормальные напряжения в направлении толщины пластинки если и имеют место, то являются малыми по сравнению с нормальными напряжениями, параллельными срединной плоскости. Учитывая эти допущения, получаем следующие соотношения между напряжениями и деформациями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E}; & \sigma_x &= \frac{E\nu}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y); \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E}; & \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x); \\ \gamma &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau, & \tau &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma. \end{aligned} \quad (13)$$

Выражения для изгибающих и крутящих моментов и поперечных сил будут следующие:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = -D (\chi_x + \chi_y); \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = -D (\chi_y + \chi_x); \\ H &= -D(1-\mu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} = -D(1-\mu) \chi; \\ Q_x &= -D \left( \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} (\chi_x + \chi_y); \\ Q_y &= -D \left( \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial y \partial x^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} (\chi_y + \chi_x) \end{aligned} \quad (14)$$

### Основные дифференциальные уравнения

Подставим выражения поперечных сил из (14) в уравнение равновесия (12) получим:

$$DV^4 W = h\sigma_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + h\sigma_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2h\tau \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + q. \quad (15)$$

Уравнение (15) связывает прогиб пластины с интенсивностью внешней нагрузки, но содержит дополнительные неизвестные  $\sigma_x, \sigma_y, \tau$ .

Для решения задачи воспользуемся уравнением совместности деформаций (9), подставив в него выражения  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma$  из (13)

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \mu \left[ \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} \right] = E \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] \quad (16)$$

При введении функции напряжений (функции Эри) уравнения (15) и (16) образуют систему нелинейных дифференциальных уравнений теории гибких пластинок (уравнения Кармана) [3]:

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 W - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \frac{1}{h} q, \\ \nabla^2 F = L \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений (17) совместно с граничными условиями представляют основную систему нелинейных дифференциальных уравнений теории гибких пластинок. Решение системы в общем виде не получено, в настоящее время получен ряд частных решений.

Граничные условия зависят от условий закрепления пластинок на контуре.

Например, если края пластинки закреплены таким образом, что взаимное смещение их точек вдоль осей X и Y невозможно, т. е.

$$\begin{aligned} U_{x=0} = U_{x=a} = 0, \\ V_{y=0} = V_{y=b} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

то граничные условия будут иметь следующие выражения:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - E \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] dx = 0, \\ \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - E \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right] dy = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

**Заключение.** Представленные решения рассматривают упругую работу элементов. В железобетонных плитах при работе в предельной стадии наблюдается появление трещин, а следовательно и изменение жесткостных характеристик. Эти изменения следует учитывать путем модификации цилиндрических жесткостей плиты с учетом фактических диаграмм деформирования материалов.

#### Список цитированных источников

1. Самуль, В. И. Основы теории упругости и пластичности: учеб. пособие для студентов вузов / В. И. Самуль — М.: Высш. шк., 1982. — 264 с.
2. Вольмир, А. С. Гибкие пластинки и оболочки / А. С. Вольмир. — М.: Гос изд., 1956. — 419 с.
3. Кончковский, З. Плиты. Статические расчеты / З. Кончковский. — М.: Стройиздат, 1984. — 481 с.

УДК 624.072.21.7

## ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА РАСЧЕТА БАЛОК И ПЛИТ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ ОСНОВАНИЯ

Козунова О. В.

**Введение.** Из практики строительства зданий и сооружений известно, что нулевой цикл составляет около 30 % от объемов капитального строительства (на всех стадиях его реализации: от проекта до монтажа надземной части).