

Заключение. Рассмотренная теоретическая модель позволяет определить критическую нагрузку на стойку при упругой работе и отсутствие зазоров в узле А.

Для определения грузоподъемности стойки целесообразно воспользоваться графиком зависимости $P_{кр} = f(l_0)$, решив уравнение (1.14) при различных значениях l_0 .

Список цитированных источников

1. Стальные конструкции. Нормы проектирования: СНиП II-23-81*. – Введ. 14.08.1981. – Москва: ЦИТП Госстроя СССР, 1990. – 96 с.
2. Вольмир. А.С. Устойчивость деформируемых систем/ Вольмир А.С. – Москва: Наука, 1967. – 984 с.
3. Смешко, Н.К. Строительная механика. Учебник для вузов/ Смешко Н.К. – Изд. 2-е, доп. – Москва: Высшая школа, 1972. – 488 с.
4. Снитко, Н.К. Строительная механика. Учебник для вузов/ Снитко Н.К. – Изд. 3-е, перераб. – Москва: Высшая школа, 1980. – 431 с.
5. Ovarlez, G. Roussel, N. A physical model for the prediction of lateral stress exerted by self compacting concrete on formwork / G. Ovarlez, N. Roussel // [Electronic resource] / RILEM. The International Union of Laboratories and Experts in Construction Materials. Systems and Structures – EU, 2006. – Режим доступа: <http://www.rilem.net>. – Дата доступа: 26.02.2009.

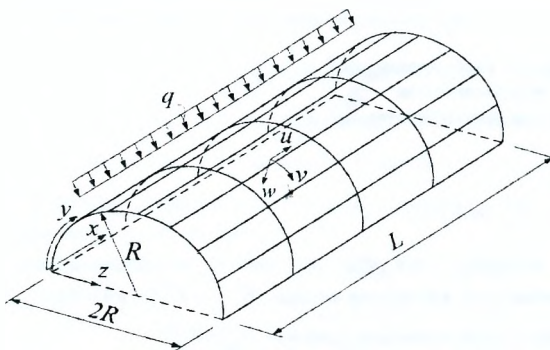
УДК 539.3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКИХ ПОДКРЕПЛЁННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОКРЫТИЙ ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

Игнатов А.Ю., Игнатьюк В. И.

Введение. Подкрепленные цилиндрические оболочечные покрытия являются достаточно эффективными сооружениями и широко применяются при строительстве ангаров, складов и т. п. В процессе эксплуатации они подвергаются действию нагрузок, которые создают внешнее давление на покрытия. При этом несущая способность таких оболочечных покрытий чаще всего определяется их устойчивостью.

Постановка задачи. Рассматривается подкрепленное цилиндрическое покрытие длиной L , представляющее собой систему, состоящую из оболочки (тонкой многослойной обшивки) и жёстко с ней соединённых по линиям контакта продольных (стрингеры) и кольцевых (шпангоуты) ребер (рис. 1). Криволинейная ортогональная система координат выбрана так, что координатные ли-



нии x и y совпадают с линиями главных кривизн срединной поверхности обшивки (радиусом R). Положение произвольных точек оболочки (ребер), не лежащих в координатной (срединной) поверхности, определяется третьей координатой z , нормальной к линиям $x = const$, $y = const$ и направленной к центру кривизны обшивки.

Рисунок 1

Предполагается, что рёбра одного направления имеют одинаковые упругие и геометрические характеристики и равномерно размещены по обшивке вдоль направлений координатных линий x, y ; что края (плоскости концов) стрингеров, как и края обшивки, лежат в одной координатной плоскости yz .

Обшивка имеет постоянную толщину h и собрана из m однородных ортотропных [1] слоёв также постоянной толщины t_s , симметрично расположенных относительно её срединной поверхности. Предполагается, что слои при деформации остаются упругими и работают совместно без скольжения и что главные направления упругости в каждой точке каждого слоя обшивки совпадают с направлениями координатных линий.

Принимается, что расчёт обшивки может быть выполнен с использованием линейной теории тонких упругих оболочек [2], основанной на сдвиговой модели типа Тимошенко [3], а для расчёта рёбер (одномерных стержней) применима теория криволинейных стержней с учётом деформаций сдвига. Учитываются дискретность расположения рёбер и их несимметричность относительно обшивки [4]. При этом гипотеза прямолинейного недеформируемого элемента принимается справедливой как для всего пакета слоёв, так и в целом для системы «обшивка-ребро» (в местах наличия рёбер). В результате все характеристики деформаций и перемещений каждого слоя и рёбер получаются из элементов геометрии оболочки, перемещений срединной поверхности и углов поперечного сдвига в срединной поверхности оболочки.

Докритическое состояние оболочки считается безмоментным [5].

Решение задачи устойчивости выполняется энергетическим методом. Выражение полной потенциальной энергии системы через перемещения срединной поверхности оболочки получено в [6] и записывается в виде:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{E} = & \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ C_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2C_2 \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right) + C_{11} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right)^2 + \right. \\
 & + C_{22} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \\
 & + 4D_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + k_n C_{55} \psi_1^2 + k_0 C_{44} \psi_2^2 + D_{11} \left[\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right] - \\
 & - 2D_{12} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right] + D_{22} \left[\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right] + \\
 & + D_{11} \left[-4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right)^2 \right] + \\
 & + \sigma_s h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R} \right) w \Bigg\} dx dy + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^L \left\{ E_c A_c \left[\frac{\partial u}{\partial x} + h \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \right]^2 + \right.
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
& + k_c G_c A_c \psi_1 + E_c J_y \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + G_c J_{крс} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \Big|_{y=y_i} dx + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \int_0^{\pi R} \left[F_{ш} A_{ш} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + h_u \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) - \frac{w}{R} \right] + k_{ш} G_{ш} A_{ш} \psi_2^2 \cdot \right. \\
& + E_{ш} J_{шш} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{w}{R^2} \right) + G_{шш} J_{крс} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{h_{ш}}{R} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) \right] \Big|^2 + \\
& \left. + \sigma_y A_{ш} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R^2} \right) w \right]_{y=y_i} dy.
\end{aligned}$$

Здесь обозначено: u, v, w – перемещения точек срединной поверхности в направлениях осей x, y, z ; ψ_1 и ψ_2 – углы сдвига, то есть углы поворота прямолинейного отрезка по отношению к нормали к деформированной срединной поверхности соответственно по направлениям осей x и y в результате сдвига; k_c – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по толщине обшивки; C_{jk}, D_{jk} – жёсткости обшивки, определяемые выражениями

$$C_{jk} = 2 \left[B_{jk}^{m_c+1} h_{m_c+1} + \sum_{s=1}^m B_{jk}^s (h_s - h_{s+1}) \right]; D_{jk} = 2 \left[B_{jk}^{m_c+1} h_{m_c+1}^3 + \sum_{s=1}^m B_{jk}^s (h_s^3 - h_{s+1}^3) \right].$$

где $B_{11}^s = \frac{E_1^s}{1 - \nu_{12}^s \nu_{21}^s}$; $B_{22}^s = \frac{E_2^s}{1 - \nu_{12}^s \nu_{21}^s}$; $B_{12}^s = B_{21}^s = -\frac{\nu_{12}^s E_1^s}{1 - \nu_{12}^s \nu_{21}^s}$.

$B_{44}^s = G_{23}^s$; $B_{55}^s = G_{13}^s$; $B_{66}^s = G_{12}^s$; E_1^s, E_2^s – модули Юнга для материала s -го слоя обшивки соответственно по направлениям x и y ; $G_{23}^s, G_{13}^s, G_{12}^s$ – модули сдвига материала s -того слоя обшивки, характеризующие изменение углов между главными направлениями y и z, x и z, x и y соответственно; ν_{12}^s, ν_{21}^s – коэффициенты Пуассона материала s -того слоя обшивки; $k_c, k_{ш}$ – коэффициенты, учитывающие неравномерность распределения касательных напряжений по высоте сечений стрингеров и шпангоутов; E_c, G_c и $E_{ш}, G_{ш}$ – модули упругости и сдвига материалов стрингеров и шпангоутов; $A_c, J_{yc}, J_{крс}$ и $A_{ш}, J_{шш}, J_{крсш}$ – площади поперечных сечений, моменты инерции и кручения сечений соответственно стрингеров и шпангоутов; k, k_i – число стрингеров и шпангоутов; $h_c, h_{ш}$ – эксцентриситеты стрингеров и шпангоутов.

Радиальные напряжения в покрытии в докритическом состоянии определяются выражением [6]

$$\sigma_y = k_{шш} q \frac{R}{h}, \quad (2)$$

где $k_{шш} = 1 / \left(1 + \frac{A_{ш}}{h l_{ш}} \right)$.

Определение критических напряжений на основе энергетического метода связано с выбором аппроксимирующих выражений для функций перемещений, описывающих деформированное состояние подкрепленного оболочечного покрытия при потере устойчивости и удовлетворяющих граничным условиям его опирания. Будем считать, что обеспечены условия шарнирного опирания и что до потери устойчивости оболочка сохраняет свою первоначальную (цилиндрическую) форму.

Расположив начало координат в торце покрытия (рис. 1), примем выражения для аппроксимирующих функций перемещений в виде:

$$\begin{aligned} u &= a_{mn} \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R}; \\ v &= b_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R}; \\ w &= c_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R}; \\ \psi_1 &= d_{mn} \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R}; \\ \psi_2 &= e_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{ny}{R}, \end{aligned} \quad (3)$$

где m, n – число полуволн вдоль образующей (вдоль оси x) и окружности обшивки (вдоль криволинейной оси y); $a_{mn}, b_{mn}, c_{mn}, d_{mn}, e_{mn}$ – неизвестные константы, соответствующие данному волнообразованию.

Подставляя аппроксимирующие функции перемещений (3) в выражения полной потенциальной энергии (1) и применяя к ней условие минимума энергии, получим систему разрешающих уравнений для определения критических нагрузок в виде:

$$\begin{cases} K_{11} \cdot a_{mn} + K_{12} \cdot b_{mn} + K_{13} \cdot c_{mn} + K_{14} \cdot d_{mn} + K_{15} \cdot e_{mn} = 0; \\ K_{21} \cdot a_{mn} + K_{22} \cdot b_{mn} + K_{23} \cdot c_{mn} + K_{24} \cdot d_{mn} + K_{25} \cdot e_{mn} = 0; \\ K_{31} \cdot a_{mn} + K_{32} \cdot b_{mn} + K_{33} \cdot c_{mn} + K_{34} \cdot d_{mn} + K_{35} \cdot e_{mn} = 0; \\ K_{41} \cdot a_{mn} + K_{42} \cdot b_{mn} + K_{43} \cdot c_{mn} + K_{44} \cdot d_{mn} + K_{45} \cdot e_{mn} = 0; \\ K_{51} \cdot a_{mn} + K_{52} \cdot b_{mn} + K_{53} \cdot c_{mn} + K_{54} \cdot d_{mn} + K_{55} \cdot e_{mn} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{\pi}{4LR^5} \left[C_{66} I^2 n^2 R^4 + C_{11} m^2 \pi^2 R^6 + 2G_{uw} J_{krw} Ln^2 \sum_{j=1}^{k_1} \cos^2 \left(\frac{\pi m}{L} x_j \right) + \right. \\ &+ \left. 2A_c E_c m^2 \pi R^5 \sum_{j=1}^{k_1} \sin^2 \left(\frac{\pi m}{L} x_j \right) \right]; \quad K_{13} = K_{31} = \frac{m\pi^2}{4L^2 R^4} \left[C_{12} L^2 R^4 - \right. \\ &- \left. 2G_{uw} J_{krw} Ln^2 (h_w - R) \sum_{j=1}^{k_1} \cos^2 \left(\frac{\pi m}{L} x_j \right) - 2A_c E_c h_c m^2 \pi R^4 \sum_{i=1}^k \sin^2 \left(\frac{n}{R} y_i \right) \right]; \\ K_{14} = K_{41} &= \frac{\pi}{2LR^4} \left[G_{uw} h_{uw} J_{krw} Ln \sum_{j=1}^{k_1} \cos^2 \left(\frac{\pi m}{L} x_j \right) + A_c E_c h_c m^2 \pi R^4 \sum_{i=1}^k \sin^2 \left(\frac{n}{R} y_i \right) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{12} = K_{21} = 0; \quad K_{22} &= \frac{\pi}{4LR} \left[C_{22} L^2 n^2 + C_{44} m^2 \pi^2 R^2 + 2A_u E_u L n^2 \sum_{j=1}^k \sin^2 \left(\frac{\pi m}{L} x_j \right) \right]; \\
K_{33} &= \frac{\pi}{4L^3 R^3} \left[D_{22} L^4 n^4 + R^2 (C_{22} L^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) L^2 m^2 n^2 \pi^2 + D_{11} m^4 \pi^4 R^2) + \right. \\
&\quad \left. + hL^4 \pi R^2 (1 - n^2)^2 \sigma_y + 2G_u J_{krw} L m^2 n^2 \pi^3 (h_u - R)^2 \sum_{j=1}^k \cos^2 \left(\frac{\pi m}{L} x_j \right) \right]; \\
&\quad + 2L (E_u J_{xu} (n^2 - 1)^2 + E_u A_u h_u^2 n^2 - A_u R^2 (n^2 - 1) \sigma_y) \sum_{j=1}^k \sin^2 \left(\frac{\pi m}{L} x_j \right) + \\
&\quad + 2G_c J_{spc} L^2 m^2 n^2 \pi R \sum_{i=1}^k \sin^2 \left(\frac{n}{R} y_i \right) + 2E_c m^4 \pi^3 R^3 (A_c h_c^2 + J_{yc}) \sum_{i=1}^k \sin^2 \left(\frac{n}{R} y_i \right); \\
K_{23} = K_{32} = 0; \quad K_{34} = K_{43} &= -\frac{m\pi}{4L^3 R^3} \left[(D_{12} + 2D_{66}) L^2 n^2 R^2 + D_{11} m^2 \pi^2 R^4 + \right. \\
&\quad \left. + 2G_u h_u J_{krw} L n^2 (h_u - R) \sum_{j=1}^k \cos^2 \left(\frac{\pi m}{L} x_j \right) + 2E_c m^2 \pi R^3 (A_c h_c^2 + J_{yc}) \sum_{i=1}^k \sin^2 \left(\frac{n}{R} y_i \right) \right]; \\
K_{13} = K_{31} = 0; \quad K_{35} = K_{53} &= -\frac{n\pi}{4LR^2} \left[D_{22} L^2 n^2 + (D_{12} + 2D_{66}) m^2 \pi^2 R^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2E_u L (J_{xu} (n^2 - 1) + A_u h_u^2 n^2) \sum_{j=1}^k \sin^2 \left(\frac{m\pi}{L} x_j \right) \right]; \quad K_{24} = K_{42} = 0; \\
K_{44} &= \frac{1}{4LR^3} \left[D_{66} L^2 n^2 \pi R^2 + \pi R^4 (C_{35} k_o L^2 + D_{11} m^2 \pi^2) + 2G_u h_u^2 J_{krw} L n^2 \pi \sum_{j=1}^k \cos^2 \left(\frac{m\pi}{L} x_j \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2R (A_c G_c k_c L^2 + E_c m^2 \pi^2 (A_c h_c^2 + J_{yc})) \sum_{i=1}^k \sin^2 \left(\frac{n}{R} y_i \right) \right]; \quad K_{25} = K_{52} = 0; \\
K_{45} = K_{54} &= \frac{1}{8} (D_{12} + 2D_{66}) m n \pi^2; \quad K_{55} = \frac{\pi}{4LR} \left[D_{22} L^2 n^2 + \right. \\
&\quad \left. + R^2 (C_{44} k_o L^2 + D_{11} m^4 \pi^4) + 2L (E_u n^2 (A_u h_u^2 + J_{xu}) + A_u G_u k_u R^2) \sum_{j=1}^k \sin^2 \left(\frac{m\pi}{L} x_j \right) \right].
\end{aligned}$$

Приравняв определитель системы уравнений (4) к нулю, определим для покрытия критическое значение внешнего давления $q_{кр}$, выполнив минимизацию полученного выражения по параметрам волнообразования m, n .

Заключение. В статье обсуждается решение задачи устойчивости тонких подкрепленных цилиндрических покрытий при внешнем давлении. Представлена постановка задачи расчета на устойчивость, приведено выражение полной потенциальной энергии ребристого покрытия в перемещениях, приняты аппроксимирующие функции для перемещений, получено выражение потенциальной энергии через параметры аппроксимации. Для получения разрешающих уравнений используется условие минимума энергии по параметрам перемещений. Критическая нагрузка определяется минимизацией определителя системы уравнений по параметрам волнообразования.

Список цитированных источников

1. Амбарцумян, С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
2. Власов, В.З. Общая теория оболочек и её приложения в технике. – М.: Гостехиздат 1949 – 784 с.
3. Вольмир, А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
4. Методы расчета оболочек: в 5 т. – Т. 2: Теория ребристых оболочек / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий – К.: Наукова думка, 1980. – 368 с.
5. Тимошенко, С.П. Устойчивость упругих систем. – М-Л.: Гостехиздат, 1946. – 532 с.
6. Игнатов, А.Ю. К расчету тонких подкрепленных цилиндрических покрытий на устойчивость при внешнем давлении / А.Ю. Игнатов, В.И. Игнапок // Вестник БрГТУ. – 2009. – № 1: Строительство и архитектура. – С. 15–19.

УДК 624.042:519.21

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ НЕРАЗРУШЕНИЯ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СИСТЕМЫ

Моргун Т.И., Трепачко В.М.

Введение. В настоящее время является общепризнанным, что поведение реальных конструкций обусловлено взаимодействием ряда факторов случайной (стохастической) природы. Поэтому обоснованный подход к определению надежности и долговечности конструкций возможен только с позиций вероятностных методов.

Определить вероятность неразрушения (надежность) статически неопределимой системы, представленной на рисунке 1.

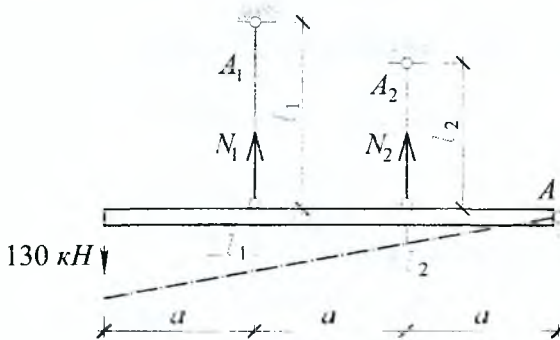


Рисунок 1 – Расчетная схема статически неопределимой системы

Постановка задачи. В качестве исходных данных приняты: площади поперечных сечений стержней – $A_1 = 6 \text{ см}^2$, $A_2 = 10 \text{ см}^2$; длины стержней – $l_1 = 1.5 \text{ м}$, $l_2 = 1 \text{ м}$; расстояние $a = 1 \text{ м}$.

Действующая на систему нагрузка и геометрические размеры – детерминированы, прочность всех элементов случайна, независима и распределена одинаково по нормальному закону.

В качестве материала элементов принята сталь С245, предел текучести которой согласно [1] составляет $R_y = 240 \text{ МПа}$.