В.М. Хвисевич, канд. техн. наук (БрИИ).

О РЕШЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ВНЕШНЕЙ И ВНУТРЕННЕЙ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛА.

Традиционные (классический и неклассический) методы решения задач типа Дирихле на основе теории потенциала для внешней и многосвязной областей имеют недостатки.

Классический способ, где решение (температуру T) разыскиваем в виде потенциала двойного слоя $T=\oint_S \varkappa(y)\frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS$, применим лишь в случае внутренней односвязной области V^+, а неклассический способ (решение представляем формулой Грина $T=1/4\pi\oint_S\left(\frac{dT}{dn_y}\frac{1}{r}-T_s\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)dS$) имеет неединственное решение для внешней области V^- (здесь $\varkappa$ – плотность потенциала, φ – угол между вектором $r=|y-x|$ и внешней нормалью n_y к поверхности S области V, x, y – соответственно фиксированная и текущая точки при интегрировании).

Для устранения недостатков обоих методов предлагается дополнить решение классического метода простыми источниками мощностью A_i $(i=1,\dots,n)$, которые находятся внутри поверхностей S_i многосвязной области. Мощности источников определяем из выражения, полученного для среднего значения температуры T^m. Для внешней задачи

$$T_i^m=\frac{1}{S_i}\sum_{j=1}^{n}A_j\oint_{S_i}\frac{dS_i}{r_{Aj}}+T_\infty, \qquad (1)$$

а для внутренней в (1) вместо T_∞ будет $4\pi\varkappa_e$, где T_∞ – значение температуры на бесконечности, r_{Aj} – расстояние до источника, $\varkappa_e$ – плотность распределения источников на поверхности охватывающей область V^+.

Выполнив преобразования напишем окончательную форму интегрального уравнения осесимметричной краевой задачи теплопроводности в цилиндрических координатах ρ, z, ϑ для внешней области:

$$T_s=T_\infty+\xi\,2\pi\varkappa(x)+v.p.\int_{L_i}\varkappa(y)\left[\left(\rho_y\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{r^3}-\rho_x\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta\,d\theta}{r^3}\right)n_{\rho y}+Z\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{r^3}n_{zy}\right]\rho_y\,dl_y+\sum_{i=1}^{n}A_i\rho_{Ai}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{r_{Ai}}, \qquad (2)$$

здесь $\xi=1$, $Z=z_y-z_x$, $\theta=\vartheta_y-\vartheta_x$, L_i – контуры меридионального сечения области, $v.p.$ – главное значение сингулярного интеграла по Коши.

Для внутренней краевой задачи интегральное уравнение имеет вид аналогичный (2), но без T_∞ и при $\xi=1$.

Разработан эффективный алгоритм численного решения данных задач на ЭВМ. Для вычисления интегралов используются квадратурные формулы Гаусса и Лашенова. Составлена программа и по ней реализованы на ЭВМ тестовые примеры. Сравнение результатов численного решения с аналитическим показало высокую точность алгоритма.