

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

**Методические указания и варианты заданий для
студентов экономических специальностей
дневной формы обучения**

Часть II

Брест 2008

УДК 51(075.8)

В учебном пособии предложены задания по разделам «Функции нескольких переменных», «Интегральное исчисление», «Дифференциальные уравнения», «Числовые и функциональные ряды» по курсу «Высшая математика» для студентов экономических специальностей дневной формы обучения. Приведено подробное решение типовых задач, даны некоторые методические рекомендации, полезные для успешного выполнения заданий. Издается в 2-х частях. Часть 2.

Составители: **Гладкий И.И.**, старший преподаватель,
Каримова Т.И., к.ф.-м.н., доцент,
Махнист Л.П., к.т.н., доцент,
Рубанов В.С., к.ф.-м.н., доцент,
Шамовская Г.В., ассистент

Рецензент: **Савчук В.Ф.**, зав. кафедрой информатики и прикладной математики учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н., доцент.

**I. Практические задания по теме:
«Функции нескольких переменных»**

№1. Найти частные производные второго порядка функции.

- 1) $z(x, y) = 3x^3y^2 + 2x^2y - 4xy^3 + 5x - 15y^2 + 3$.
- 2) $z(x, y) = 4y^3x^2 - 5y^2x + 3yx^3 + 3y - 5x^2 + 7$.
- 3) $z(x, y) = 2x^3y^2 - 2x^3y - 4xy^3 + 5x - 2y^3 + 7$.
- 4) $z(x, y) = 7y^3x^2 + 3y^2x - yx^3 + 3y^2 - 5x^2 + 1$.
- 5) $z(x, y) = 5x^3y^2 - 3x^2y + 2xy^3 - 4x + 8y^2 - 4$.
- 6) $z(x, y) = 2y^3x^2 - 4y^2x + 3yx^3 - 5y + 7x^2 - 6$.
- 7) $z(x, y) = 3x^2y^3 - 5x^2y + 2xy^3 + y - 4x + 7y^2 - 11$.
- 8) $z(x, y) = 3y^3x^2 + 5y^2x + 2yx^3 - 7y^2 + 2x - 12$.
- 9) $z(x, y) = 7x^3y^2 - 4x^2y - 7xy^3 + 2y^2 - 2x - 5$.
- 10) $z(x, y) = 2x^3y^2 - 3xy + 2xy^3 - 4x^2 + 4y - 5$.

№2. Найти полный дифференциал функции.

- | | |
|--|---|
| 1) $z(x, y) = \arccos^3 \sqrt{\frac{y}{x}}$. | 6) $z(x, y) = \arcsin^5 \sqrt{\frac{y}{x}}$. |
| 2) $z(x, y) = \operatorname{arctg}^6 \sqrt{\frac{x}{y}}$. | 7) $z(x, y) = \operatorname{arcctg}^4 \sqrt{\frac{x}{y}}$. |
| 3) $z(x, y) = \sin^3 \frac{\sqrt{y}}{x^4}$. | 8) $z(x, y) = \cos^5 \frac{\sqrt{x}}{y^3}$. |
| 4) $z(x, y) = \operatorname{ctg}^4 \frac{y^5}{\sqrt{x}}$. | 9) $z(x, y) = \operatorname{tg}^3 \frac{x^4}{\sqrt{y}}$. |
| 5) $z(x, y) = \cos^2 \left(\frac{x^2}{y} \right)$. | 10) $z(x, y) = \sin^3 \left(\frac{x}{y^2} \right)$. |

№3. Вычислить производную функции $z(x, y)$ в точке M в направлении вектора \vec{a} .

- | | | |
|---|--------------|-------------------------|
| 1) $z(x, y) = 3x^3 - 3y^2x + 3yx^2 - 1$, | $M(1; -2)$, | $\vec{a} = (3; -4)$. |
| 2) $z(x, y) = 3x^3 + 4y^2x + 6yx^2 - 3$, | $M(2; -1)$, | $\vec{a} = (-6; -8)$. |
| 3) $z(x, y) = 2x^3 - 3y^2x - 2xy + 3x^2 + 2y + 4$, | $M(2; -1)$, | $\vec{a} = (-4; -3)$. |
| 4) $z(x, y) = x^3 - 2y^2x + xy + 3y^2 - x - 3y + 3$, | $M(-1; 3)$, | $\vec{a} = (12; -5)$. |
| 5) $z(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 2y$, | $M(1; 1)$, | $\vec{a} = (3; 4)$. |
| 6) $z(x, y) = 2y^3 - 2x^2y + 2xy^2 - 5$, | $M(-2; 1)$, | $\vec{a} = (-4; 3)$. |
| 7) $z(x, y) = -3y^3 - 4x^2y - 6xy^2 + 5$, | $M(-1; 2)$, | $\vec{a} = (-8; -6)$. |
| 8) $z(x, y) = 2y^3 - 3x^2y - 2xy + 3y^2 + 2x + 15$, | $M(-1; 2)$, | $\vec{a} = (-3; 4)$. |
| 9) $z(x, y) = y^3 - 2x^2y + xy + 3x^2 - 3x - y + 5$, | $M(3; -1)$, | $\vec{a} = (-5; -12)$. |
| 10) $z(x, y) = y^3 + 3xy^2 - 2x^2 + 4x + 10y + 3$, | $M(-1; 2)$, | $\vec{a} = (4; -3)$. |

№4. Исследовать на экстремум функцию.

- 1) $z(x,y) = 2x^3 + 12xy + 3y^2 - 6x - 12y + 13.$
- 2) $z(x,y) = -3x^2 - 12xy - 2y^3 + 12x + 6y - 10.$
- 3) $z(x,y) = 2x^3 - 6xy - 3y^2 - 6x + 6y + 1.$
- 4) $z(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2 - 12y + 5.$
- 5) $z(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 - 12x + 1.$
- 6) $z(x,y) = 2x^3 - 12xy + 3y^2 + 30x - 6y + 6.$
- 7) $z(x,y) = -3x^2 + 12xy - 2y^3 + 6x - 30y + 1.$
- 8) $z(x,y) = 2y^3 - 6xy - 3x^2 - 6y + 6x + 10.$
- 9) $z(x,y) = -3x^2 + 6xy - 2y^3 + 12x + 2.$
- 10) $z(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 - 36x + 2.$

№5. Используя метод наименьших квадратов, найти линейную зависимость между x и y по данным, приведенным в таблице. Сделать чертеж.

| | i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-----|-------|-----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1) | x_i | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| | y_i | -9 | -7 | -2 | -1 | 3 | -3 | 9 | 11 | 15 | 19 |
| 2) | x_i | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | y_i | -9 | -8 | -4 | -4 | -1 | -8 | 3 | 4 | 7 | 10 |
| 3) | x_i | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | y_i | -15 | -13 | -8 | -7 | -3 | -9 | 3 | 5 | 9 | 13 |
| 4) | x_i | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| | y_i | -4 | -3 | 1 | 1 | 4 | -3 | 8 | 9 | 12 | 15 |
| 5) | x_i | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| | y_i | -3 | -2 | 2 | 2 | 5 | -2 | 9 | 10 | 13 | 16 |
| 6) | x_i | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | y_i | -9 | -7 | -2 | -1 | 3 | -3 | 9 | 11 | 15 | 19 |
| 7) | x_i | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| | y_i | -6 | -4 | 1 | 2 | 6 | 0 | 12 | 14 | 18 | 22 |
| 8) | x_i | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | y_i | -4 | -4 | -1 | -2 | 0 | -8 | 2 | 2 | 4 | 6 |
| 9) | x_i | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| | y_i | -4 | -3 | 1 | 1 | 4 | -3 | 8 | 9 | 12 | 15 |
| 10) | x_i | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| | y_i | -4 | -3 | 1 | 1 | 4 | -3 | 8 | 9 | 12 | 15 |

**II. Практические задания по теме:
«Интегральное исчисление»**

№1. Найти неопределенные интегралы:

а)

1. $\int \frac{dx}{\sin^2(3x - 4)}$.

2. $\int \sin(2 - 5x)dx$.

3. $\int e^{7-5x}dx$.

4. $\int \frac{dx}{2 - 7x}$.

5. $\int 2^{3-4x} dx$.

6. $\int \frac{dx}{\cos^2(2x - 3)}$.

7. $\int \cos(3 - 4x)dx$.

8. $\int e^{-2x+5} dx$.

9. $\int \frac{dx}{5 - 3x}$.

10. $\int 3^{-5x+2} dx$.

б)

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{25 + 9x^2}}$.

2. $\int \frac{dx}{16x^2 + 9}$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - 4x^2}}$.

4. $\int \frac{dx}{16 - 25x^2}$.

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 25x^2}}$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 25}}$.

7. $\int \frac{dx}{49x^2 + 25}$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}}$.

9. $\int \frac{dx}{36x^2 - 25}$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 16}}$.

в)

1. $\int \frac{x}{2x^2 - 1} dx$.

2. $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 9}} dx$.

3. $\int \frac{x}{3x^2 - 2} dx$.

4. $\int \frac{x}{\sqrt{4x^2 - 3}} dx$.

5. $\int \frac{x}{3x^2 - 5} dx$.

6. $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2 + 1}} dx$.

7. $\int \frac{x}{5x^2 - 3} dx$.

8. $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2 + 2}} dx$.

9. $\int \frac{x}{3x^2 + 4} dx$.

10. $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2 - 1}} dx$.

г)

1. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} - 3}} dx$.

6. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 5x}}{\sin^2 5x} dx$.

2. $\int \frac{\sqrt{\ln(5x-3)}}{5x-3} dx.$

3. $\int \operatorname{tg}(5x+3) dx.$

4. $\int \operatorname{ctg}(3x+7) dx.$

5. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}5x}}{\cos^2 5x} dx.$

7. $\int \frac{\sqrt{\arcsin 3x}}{\sqrt{1-9x^2}} dx.$

8. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 5x}}{1+25x^2} dx.$

9. $\int \frac{\sqrt{\arccos 2x}}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$

10. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 4x}}{1+16x^2} dx.$

№2. Найти неопределенный интеграл:

1. $\int \frac{x}{\sqrt{5x-2}} dx.$

2. $\int \frac{x}{\sqrt{3x+5}} dx.$

3. $\int \frac{x}{\sqrt{2x-6}} dx.$

4. $\int \frac{x}{\sqrt{4x+3}} dx.$

5. $\int \frac{x}{\sqrt{6x-4}} dx.$

6. $\int x\sqrt{2x+5} dx.$

7. $\int x\sqrt{4x-6} dx.$

8. $\int x\sqrt{5x+2} dx.$

9. $\int x\sqrt{6x-3} dx.$

10. $\int x\sqrt{3x+4} dx.$

№3. Найти неопределенный интеграл:

1. $\int \arcsin 5x dx.$

2. $\int \operatorname{arctg} 4x dx.$

3. $\int x \cdot \sin 5x dx.$

4. $\int x \cdot e^{-2x} dx.$

5. $\int (3x^2 - 4x + 2) \ln x dx.$

6. $\int \arccos 3x dx.$

7. $\int \operatorname{arcctg} 2x dx.$

8. $\int x \cdot \cos 3x dx.$

9. $\int x \cdot e^{-4x} dx.$

10. $\int (5 + 2x - 6x^2) \ln x dx.$

№4. Найти неопределенный интеграл:

1. $\int \frac{6x-1}{x^2+4x+8} dx.$

2. $\int \frac{3x-1}{x^2+8x+25} dx.$

3. $\int \frac{3x-1}{x^2+2x+5} dx.$

4. $\int \frac{4x-3}{x^2+6x+13} dx.$

5. $\int \frac{2x+5}{x^2+10x+29} dx.$

6. $\int \frac{6x+5}{x^2-4x+20} dx.$

7. $\int \frac{2x-3}{x^2-8x+20} dx.$

8. $\int \frac{2x+3}{x^2-2x+10} dx.$

9. $\int \frac{4x+5}{x^2-6x+18} dx.$

10. $\int \frac{2x+1}{x^2-10x+34} dx.$

№5. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой и прямой

- | | |
|-----------------------------|-------------------|
| 1. $f(x) = -x^2 - 4x + 7,$ | $g(x) = -2x + 4.$ |
| 2. $g(x) = x^2 + 4x - 4,$ | $f(x) = 2x - 1.$ |
| 3. $f(x) = -x^2 - 2x + 1,$ | $g(x) = -3x - 1.$ |
| 4. $g(x) = x^2 + 4x + 1,$ | $f(x) = 3x + 3.$ |
| 5. $f(x) = -x^2 + 4x - 4,$ | $g(x) = 2x - 7.$ |
| 6. $g(x) = x^2 - 4x + 2,$ | $f(x) = -2x + 5.$ |
| 7. $f(x) = -x^2 + 2x + 5,$ | $g(x) = 3x + 3.$ |
| 8. $g(x) = x^2 + 2x + 2,$ | $f(x) = 3x + 4.$ |
| 9. $f(x) = -x^2 - 8x - 11,$ | $g(x) = -4x - 8.$ |
| 10. $g(x) = x^2 + 8x + 12,$ | $f(x) = 2x + 7.$ |

III. Практические задания по теме: «Дифференциальные уравнения»

№1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а)

- | | |
|---|--|
| 1. $\operatorname{tg} x \, dy - y \, dx = 0.$ | 6. $\operatorname{ctg} x \, dy + y \, dx = 0.$ |
| 2. $(e^x + 2) \, dy - y e^x \, dx = 0.$ | 7. $(e^x - 3) \, dy - y e^x \, dx = 0.$ |
| 3. $(4 + x^2) \, dy - y \, dx = 0.$ | 8. $\sqrt{16 - x^2} \, dy - y \, dx = 0.$ |
| 4. $\sqrt{16 + x^2} \, dy - y \, dx = 0.$ | 9. $\sqrt{x^2 - 25} \, dy - y \, dx = 0.$ |
| 5. $x^2 \, dy + y \, dx = 0.$ | 10. $(x^2 - 9) \, dy - y \, dx = 0.$ |

б)

- | | |
|---|---|
| 1. $(x^2 + 3) y' - 2yx = 0.$ | 6. $(x^2 - 4) y' - 2yx = 0.$ |
| 2. $\cos^2 x \cdot y' - y = 0.$ | 7. $\sin^2 x \cdot y' + y = 0.$ |
| 3. $(5x + 2) \cdot y' - (5x + 7)y = 0.$ | 8. $(3x + 4) y' - y(3x + 7) = 0.$ |
| 4. $(1 + x^3) y y' - 3x^2 y = 0.$ | 9. $(1 + x^4) y y' - 4x^3 y = 0.$ |
| 5. $\sqrt{1 + x^2} \cdot y' - xy = 0.$ | 10. $\sqrt{x^2 + 4} \cdot y' - xy = 0.$ |

№2. Найти частное решение дифференциального уравнения:

- | | |
|--|---------------|
| 1. $y' - \frac{2}{x} y = 3e^{3x-6} x^2,$ | $y(2) = 8.$ |
| 2. $y' - \frac{5}{x} y = 3e^{3x+6} x^5,$ | $y(-2) = 32.$ |
| 3. $y' + \frac{2}{x} y = \frac{3e^{3x+6}}{x^2},$ | $y(-2) = 1.$ |

4. $y' - \frac{2}{x}y = 3x^2 \cos(3x - 6), \quad y(2) = 16.$
5. $y' - \frac{5}{x}y = 6x^5 \sin(6x + 6). \quad y(-1) = 2.$
6. $y' - \frac{3}{x}y = 2e^{2x-6} x^3, \quad y(3) = 54.$
7. $y' - \frac{4}{x}y = 2e^{2x+4} x^4, \quad y(-2) = 32.$
8. $y' + \frac{3}{x}y = \frac{2e^{2x+4}}{x^3}, \quad y(-1) = 2.$
9. $y' - \frac{3}{x}y = 2x^3 \cos(2x - 6), \quad y(3) = 54.$
10. $y' - \frac{4}{x}y = 2x^4 \sin(2x - 4), \quad y(2) = 32.$

№3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1. а) $y'' + 4y' - 12y = 0,$ б) $y'' - 4y' + 4y = 0,$ в) $y'' + 6y' + 13y = 0.$
2. а) $y'' - 2y' - 15y = 0,$ б) $y'' + 8y' + 16y = 0,$ в) $y'' - 10y' + 29y = 0.$
3. а) $y'' + 2y' - 8y = 0,$ б) $y'' - 14y' + 49y = 0,$ в) $y'' + 6y' + 34y = 0.$
4. а) $y'' - 3y' - 10y = 0,$ б) $y'' + 10y' + 25y = 0,$ в) $y'' - 8y' + 25y = 0.$
5. а) $y'' + 6y' - 16y = 0,$ б) $y'' - 6y' + 9y = 0,$ в) $y'' + 4y' + 20y = 0.$
6. а) $y'' - 5y' - 14y = 0,$ б) $y'' + 22y' + 121y = 0,$ в) $y'' - 8y' + 41y = 0.$
7. а) $y'' + y' - 12y = 0,$ б) $y'' - 18y' + 81y = 0,$ в) $y'' + 4y' + 40y = 0.$
8. а) $y'' - y' - 20y = 0,$ б) $y'' + 12y' + 36y = 0,$ в) $y'' - 14y' + 53y = 0.$
9. а) $y'' + 4y' - 21y = 0,$ б) $y'' - 20y' + 100y = 0,$ в) $y'' + 8y' + 20y = 0.$
10. а) $y'' - 3y' - 18y = 0,$ б) $y'' + 16y' + 64y = 0,$ в) $y'' - 10y' + 34y = 0.$

№4. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1. $y'' + 2y' - 8y = -16x^2 + 16x - 22.$ 6. $y'' + y' - 12y = -24x^2 + 40x - 11.$
2. $y'' - y' - 6y = -24x^2 - 2x - 9.$ 7. $y'' - 3y' - 10y = -40x^2 - 4x + 4.$
3. $y'' - 4y' - 5y = -15x^2 + 6x + 10.$ 8. $y'' + 7y' - 8y = -32x^2 + 16x + 35.$
4. $y'' - 6y' - 7y = -14x^2 + 4x + 7.$ 9. $y'' + 4y' - 5y = -25x^2 - 5x + 6.$
5. $y'' + y' - 6y = -24x^2 - 4x + 16.$ 10. $y'' - 2y' - 15y = -30x^2 + 7x - 9.$

№5. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1. $y'' + 2y' - 15y = 16e^{3x}.$ 6. $y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2x}.$
2. $y'' + 6y' + 9y = 8e^{-3x}.$ 7. $y'' - 2y' - 8y = 18e^{4x}.$
3. $y'' - 4y' - 12y = 24e^{-2x}.$ 8. $y'' - 8y' + 16y = 6e^{4x}.$
4. $y'' - 10y' + 25y = 10e^{5x}.$ 9. $y'' + 3y' - 10y = 14e^{2x}.$
5. $y'' - 2y' - 15y = 24e^{5x}.$ 10. $y'' - 6y' + 9y = 10e^{3x}.$

**IV. Практические задания по теме:
«Числовые и функциональные ряды»**

№1. Исследовать сходимость ряда:

- | | |
|---|--|
| <p>1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3+n+6}$.</p> <p>2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+4n+3}$.</p> <p>3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3+3n+5}$.</p> <p>4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2n+4}$.</p> <p>5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+4n+2}$.</p> | <p>6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+4}{n^3+5n+1}$.</p> <p>7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+n+5}$.</p> <p>8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+3n^2+2}$.</p> <p>9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^3+n+5}$.</p> <p>10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+11}{n^3+3n^2+1}$.</p> |
|---|--|

№2. Исследовать сходимость ряда:

- | | |
|---|--|
| <p>1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3) \cdot 10^n}{3^{2n-4}}$.</p> <p>2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+7) \cdot 15^n}{2^{4n+1}}$.</p> <p>3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3) \cdot 17^{n+2}}{4^{2n-3}}$.</p> <p>4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4) \cdot 5^{2n+1}}{3^{3n-4}}$.</p> <p>5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4) \cdot 3^{4n-1}}{4^{3n+2}}$.</p> | <p>6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4) \cdot 7^n}{2^{3n-2}}$.</p> <p>7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5) \cdot 3^{2n+4}}{2^{3n}}$.</p> <p>8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3) \cdot 8^n}{3^{2n-3}}$.</p> <p>9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2) \cdot 2^{2n+1}}{3^n}$.</p> <p>10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3) \cdot 11^{2n-2}}{2^{7n+1}}$.</p> |
|---|--|

№3. Исследовать сходимость ряда:

- | | |
|--|--|
| <p>1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{3n+1} (n+3)^{n^2}}{14^{3n-2} \cdot n^{n^2}}$.</p> <p>2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n+3} (n+2)^{n^2}}{19^{2n-1} \cdot n^{n^2}}$.</p> <p>3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{4n+3} (n+4)^{n^2}}{10^{4n-2} \cdot n^{n^2}}$.</p> | <p>6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{4n+2} (n+4)^{n^2}}{27^{4n-1} \cdot n^{n^2}}$.</p> <p>7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{3n+1} (n+3)^{n^2}}{17^{3n-2} \cdot n^{n^2}}$.</p> <p>8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1} (n+2)^{n^2}}{8^{2n-1} \cdot n^{n^2}}$.</p> |
|--|--|

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n+1} (n+2)^{n^2}}{13^{2n-3} \cdot n^{n^2}}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{5n+2} (n+5)^{n^2}}{20^{5n-1} \cdot n^{n^2}}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{5n+2} (n+5)^{n^2}}{11^{5n-3} \cdot n^{n^2}}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{3n+1} (n+3)^{n^2}}{21^{3n-2} \cdot n^{n^2}}$$

№4. Исследовать сходимость ряда:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^2 + 2n + 73}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+3}{n^2 + 6n + 99}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+2}{n^2 + 4n + 94}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+2}{n^2 + 4n + 136}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^2 + 2n + 57}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+2}{n^2 + 4n + 114}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+2}{n^2 + 4n + 114}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^2 + 2n + 157}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^2 + 2n + 241}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+2}{n^2 + 4n + 186}.$$

№5. Найти область сходимости степенного ряда:

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^n (n+2)}.$$

$$6. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{7^n (n+4)}.$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{5^n (n+3)}.$$

$$7. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{11^n (n+9)}.$$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n (n+4)}.$$

$$8. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{9^n (n+10)}.$$

$$4. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n (n+1)}.$$

$$9. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{12^n (n+7)}.$$

$$5. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{10^n (n+8)}.$$

$$10. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{8^n (n+3)}.$$

**V. Решение практических заданий по теме:
«Функции нескольких переменных»**

№1. Найти частные производные второго порядка функции

$$z(x, y) = 4y^3x^2 - 6y^2x + 7yx^3 - 2y + 3x^2 - 5.$$

Решение.

Вычислим частные производные первого порядка функции $z(x, y)$:

$$\begin{aligned} z'_x &= (4y^3x^2 - 6y^2x + 7yx^3 - 2y + 3x^2 - 5)'_x = \\ &= 4y^3(x^2)'_x - 6y^2(x)'_x + 7y(x^3)'_x - 0 + 3(x^2)'_x - 0 = 8y^3x - 6y^2 + 21yx^2 + 6x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_y &= (4y^3x^2 - 6y^2x + 7yx^3 - 2y + 3x^2 - 5)'_y = \\ &= 4(y^3)'_y x^2 - 6(y^2)'_y x + 7(y)'_y x^3 - 2(y)'_y + 0 - 0 = 12y^2x^2 - 12yx + 7x^3 - 2. \end{aligned}$$

Найдем частные производные второго порядка:

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= (z'_x)'_x = (8y^3x - 6y^2 + 21yx^2 + 6x)'_x = 8y^3(x)'_x - 0 + 21y(x^2)'_x + 6(x)'_x = \\ &= 8y^3 + 42yx + 6; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z''_{xy} &= (z'_x)'_y = (8y^3x - 6y^2 + 21yx^2 + 6x)'_y = 8(y^3)'_y x - 6(y^2)'_y + 21(y)'_y x^2 + 0 = \\ &= 24y^2x - 12y + 21x^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z''_{yx} &= (z'_y)'_x = (12y^2x^2 - 12yx + 7x^3 - 2)'_x = 12y^2(x^2)'_x - 12y(x)'_x + 7(x^3)'_x - 0 = \\ &= 24y^2x - 12y + 21x^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z''_{yy} &= (z'_y)'_y = (12y^2x^2 - 12yx + 7x^3 - 2)'_y = 12(y^2)'_y x^2 - 12(y)'_y x + 0 - 0 = \\ &= 24yx^2 - 12x. \end{aligned}$$

Заметим, что для смешанных частных производных функции второго порядка z''_{xy} , z''_{yx} выполняется соотношение $z''_{xy} = z''_{yx}$.

№2. Найти полный дифференциал функции

$$z(x, y) = \operatorname{tg}^5 \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Решение.

Вычисляя частные производные первого порядка функции $z(x, y)$, получим:

$$z'_x = \left(\operatorname{tg}^5 \sqrt{\frac{y}{x}} \right)'_x = 5 \operatorname{tg}^4 \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \left(\operatorname{tg} \sqrt{\frac{y}{x}} \right)'_x = 5 \operatorname{tg}^4 \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{\frac{y}{x}}} \cdot \left(\sqrt{\frac{y}{x}} \right)'_x =$$

$$= 5\text{tg}^4 \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{\frac{y}{x}}} \cdot \sqrt{y} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'_x = 5\text{tg}^4 \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{\frac{y}{x}}} \cdot \sqrt{y} \cdot \left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= -5\text{tg}^4 \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{\frac{y}{x}}} \cdot \frac{\sqrt{y}}{2x\sqrt{x}},$$

$$z'_y = \left(\text{tg}^5 \sqrt{\frac{y}{x}}\right)'_y = 5\text{tg}^4 \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \left(\text{tg} \sqrt{\frac{y}{x}}\right)'_y = 5\text{tg}^4 \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{\frac{y}{x}}} \cdot \left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)'_y =$$

$$= 5\text{tg}^4 \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{\frac{y}{x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{y})'_y = 5\text{tg}^4 \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{\frac{y}{x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= 5\text{tg}^4 \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{\frac{y}{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}}.$$

Тогда полный дифференциал функции равен

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = -5\text{tg}^4 \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{\frac{y}{x}}} \cdot \frac{\sqrt{y}}{2x\sqrt{x}} dx + 5\text{tg}^4 \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{\frac{y}{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}} dy.$$

Ответ: $dz = -5\text{tg}^4 \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{\frac{y}{x}}} \cdot \frac{\sqrt{y}}{2x\sqrt{x}} dx + 5\text{tg}^4 \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{\frac{y}{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}} dy.$

№3. Вычислить производную функции

$$z(x, y) = y^3 + x^2y - xy^2 - 5x - 4y$$

в точке $M(-1; 2)$ в направлении вектора $\vec{a} = (12; -5)$.

Решение.

Вычислим частные производные первого порядка функции $z(x, y)$:

$$z'_x = (y^3 + x^2y - xy^2 - 5x - 4y)'_x = 0 + (x^2)'_x y - (x)'_x y^2 - 5(x)'_x - 0 = 2xy - y^2 - 5;$$

$$z'_y = (y^3 + x^2y - xy^2 - 5x - 4y)'_y = (y^3)'_y + x^2(y)'_y - x(y^2)'_y - 0 - 4(y)'_y =$$

$$= 3y^2 + x^2 - 2xy - 4.$$

Найдем значения частных производных первого порядка функции в точке $M(-1; 2)$:

$$z'_x \Big|_{(-1; 2)} = (2xy - y^2 - 5) \Big|_{(-1; 2)} = 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 2^2 - 5 = -13;$$

$$z'_y \Big|_{(-1; 2)} = (3y^2 + x^2 - 2xy - 4) \Big|_{(-1; 2)} = 3 \cdot 2^2 + (-1)^2 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 4 = 13$$

Вычислим координаты вектора \vec{e} , коллинеарного вектору \vec{a} :

$$\vec{e} = (e_x; e_y) = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}; \frac{a_y}{|\vec{a}|} \right),$$

длина которого равна единице.

Учитывая, что $|\vec{a}| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144 + 25} = 13$, получим

$$\vec{e} = (e_x; e_y) = \left(\frac{12}{13}; -\frac{5}{13} \right).$$

Тогда производная функции $z(x, y) = y^3 + x^2y - xy^2 - 5x - 4y$ в точке $M(-1; 2)$ в направлении вектора $\vec{e} = \left(\frac{12}{13}; -\frac{5}{13} \right)$ равна

$$z'_{\vec{e}} \Big|_{(-1; 2)} = z'_x \Big|_{(-1; 2)} \cdot e_x + z'_y \Big|_{(-1; 2)} \cdot e_y = -13 \cdot \frac{12}{13} + 13 \cdot \left(-\frac{5}{13} \right) = -17.$$

Ответ: $z'_{\vec{e}} \Big|_{(-1; 2)} = -17$.

№4. Исследовать функцию $z(x, y) = 2x^3 - 12xy + 3y^2 - 18x - 6y + 3$ на экстремум.

Решение.

Экстремумы функции $z(x, y) = 2x^3 - 12xy + 3y^2 - 18x - 6y + 3$ должны удовлетворять системе $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$. Тогда, вычисляя частные производные функции первого порядка:

$$z'_x = (2x^3 - 12xy + 3y^2 - 18x - 6y + 3)'_x = 2(x^3)'_x - 12(x)'_x y + 0 - 18(x)'_x - 0 + 0 = 2 \cdot 3x^2 - 12 \cdot 1 \cdot y - 18 \cdot 1 = 6x^2 - 12y - 18,$$

$$z'_y = (2x^3 - 12xy + 3y^2 - 18x - 6y + 3)'_y = 0 - 12x(y)'_y + 3(y^2)'_y - 0 - 6(y)'_y + 0 = -12x \cdot 1 + 3 \cdot 2y - 6 \cdot 1 = -12x + 6y - 6,$$

приходим к системе $\begin{cases} 6x^2 - 12y - 18 = 0, \\ -12x + 6y - 6 = 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2 - 2y - 3 = 0, \\ -2x + y - 1 = 0. \end{cases}$

Решая последнюю систему методом подстановки, получим

$$\begin{cases} x^2 - 2(2x + 1) - 3 = 0, \\ y = 2x + 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 - 4x - 5 = 0, \\ y = 2x + 1. \end{cases}$$

Откуда

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-5)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}.$$

Следовательно, $\begin{cases} x = \frac{4-6}{2} = -1, \\ y = 2 \cdot (-1) + 1 = -1, \end{cases}$ или $\begin{cases} x = \frac{4+6}{2} = 5, \\ y = 2 \cdot 5 + 1 = 11. \end{cases}$

Таким образом, точки $M_1(-1; -1)$ и $M_2(5; 11)$ – критические точки функции.

Вычислим частные производные второго порядка функции $z(x, y)$:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (6x^2 - 12y - 18)'_x = 6(x^2)'_x - 0 - 0 = 6 \cdot 2x = 12x,$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (6x^2 - 12y - 18)'_y = 0 - 12(y)'_y - 0 = -12 \cdot 1 = -12,$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (-12x + 6y - 6)'_x = -12(x)'_x + 0 - 0 = -12 \cdot 1 = -12,$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (-12x + 6y - 6)'_y = 0 + 6(y)'_y - 0 = 6 \cdot 1 = 6.$$

Заметим, что для смешанных частных производных второго порядка z''_{xy} , z''_{yx} выполняется соотношение $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Вычислим гессиан функции:

$$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} = z''_{xx} \cdot z''_{yy} - z''_{xy} \cdot z''_{yx} = 12x \cdot 6 - (-12) \cdot (-12) = 72x - 144.$$

Тогда в точке $M_1(-1; -1)$ гессиан равен $\Delta(M_1) = 72 \cdot (-1) - 144 = -216 < 0$, а в точке $M_2(5; 11)$: $\Delta(M_2) = 72 \cdot 5 - 144 = 360 - 144 = 216 > 0$. Так как $\Delta(M_2) > 0$, то в точке M_2 функция достигает экстремума.

Учитывая, что $z''_{xx}(M_2) = z''_{xx}(5; 11) = 12x|_{M_2} = 12 \cdot 5 = 60 > 0$, то в точке M_2 функция имеет минимум.

Заметим, что если в критической точке M выполняется $\Delta(M) > 0$ и $z''_{xx}(M) < 0$, то в этой точке функция имеет максимум.

Вычислим значение функции в точке $M_2(5; 11)$:

$$\begin{aligned} z(M_2) &= z(5; 11) = 2x^3 - 12xy + 3y^2 - 18x - 6y + 3|_{M_2} = \\ &= 2 \cdot 5^3 - 12 \cdot 5 \cdot 11 + 3 \cdot 11^2 - 18 \cdot 5 - 6 \cdot 11 + 3 = 250 - 660 + 363 - 90 - 66 + 3 = -200. \end{aligned}$$

Ответ: $z_{\min}(x; y) = z(5; 11) = -200$.

№5. Используя метод наименьших квадратов, найти линейную зависимость между x и y по данным, приведенным в таблице. Сделать чертеж.

Решение.

Исходные данные представлены в таблице:

| | | | | | | | | | | |
|-------|-----|----|----|----|----|----|---|---|---|----|
| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| x_i | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| y_i | -10 | -9 | -5 | -5 | -2 | -9 | 2 | 3 | 6 | 9 |

Параметры a и b линейной зависимости $y = ax + b$ определим, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot b = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot a + n \cdot b = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

Составим расчетную таблицу:

| i | x_i | y_i | x_i^2 | $x_i y_i$ |
|----------|----------|------------|-----------|------------|
| 1 | -4 | -10 | 16 | 40 |
| 2 | -3 | -9 | 9 | 27 |
| 3 | -2 | -5 | 4 | 10 |
| 4 | -1 | -5 | 1 | 5 |
| 5 | 0 | -2 | 0 | 0 |
| 6 | 1 | -9 | 1 | -9 |
| 7 | 2 | 2 | 4 | 4 |
| 8 | 3 | 3 | 9 | 9 |
| 9 | 4 | 6 | 16 | 24 |
| 10 | 5 | 9 | 25 | 45 |
| Σ | 5 | -20 | 85 | 155 |

Тогда

$$n = 10, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 85, \sum_{i=1}^n x_i = 5, \sum_{i=1}^n x_i y_i = 155, \sum_{i=1}^n y_i = -20.$$

Решаем систему

$$\begin{cases} 85a + 5b = 155, \\ 5a + 10b = -20, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 17a + b = 31, \\ a + 2b = -4, \end{cases}$$

используя, например, правило Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 17 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 34 - 1 = 33,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 31 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 31 \cdot 2 - 1 \cdot (-4) = 62 + 4 = 66,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 17 & 31 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 17 \cdot (-4) - 31 \cdot 1 = -68 - 31 = -99.$$

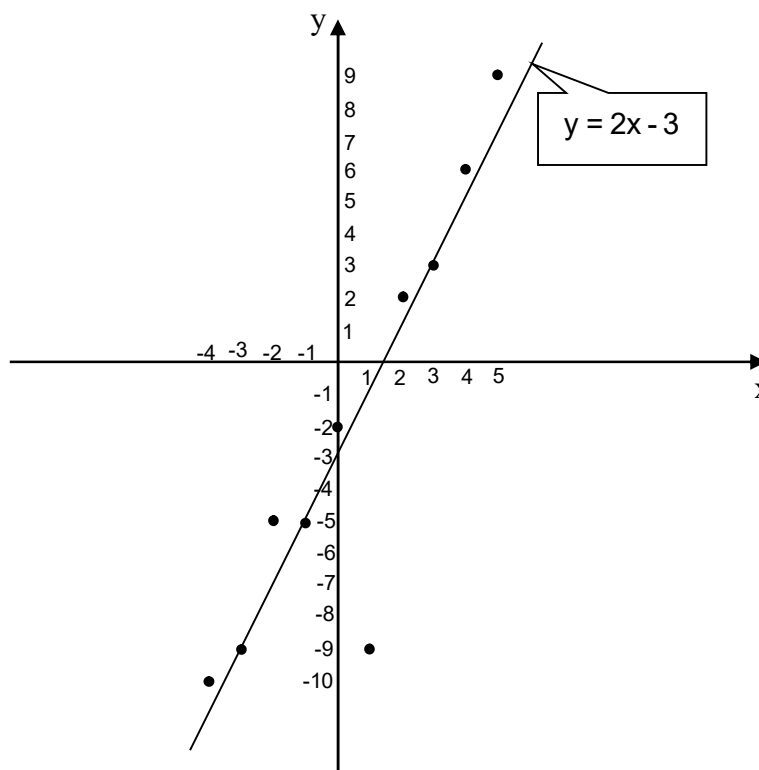
Тогда

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{66}{33} = 2,$$

$$b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-99}{33} = -3.$$

Следовательно, уравнение $y = 2x - 3$ определяет линейную зависимость между x и y .

В системе координат изображаем точки (x_i, y_i) и прямую $y = 2x - 3$ (см. рис.).



VI. Решение практических заданий по теме: «Интегральное исчисление»

№1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int e^{3-4x} dx$; б) $\int \frac{dx}{36 - 25x^2}$; в) $\int \frac{x dx}{3 - 5x^2}$; г) $\int \frac{e^{2x} dx}{3 - e^{2x}}$.

Решение.

а) Учитывая, что

$$d(3 - 4x) = (3 - 4x)' dx = (0 - 4 \cdot 1) dx = -4 dx \text{ или } dx = -\frac{1}{4} d(3 - 4x),$$

получим

$$\int e^{3-4x} dx = \int e^{3-4x} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) d(3 - 4x) = -\frac{1}{4} \int e^{3-4x} d(3 - 4x) = -\frac{1}{4} \cdot e^{3-4x} + C.$$

Ответ: $-\frac{1}{4} \cdot e^{3-4x} + C.$

б) Вычисления основаны на использовании одного из табличных интегралов:

$$1. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, a \neq 0;$$

$$2. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0;$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, a \neq 0;$$

$$4. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + b} \right| + C, b \neq 0.$$

Так, например:

$$1. \int \frac{dx}{36 - 25x^2} = \int \frac{dx}{-25 \left(x^2 - \frac{36}{25} \right)} = -\frac{1}{25} \int \frac{dx}{x^2 - \left(\frac{6}{5} \right)^2} = -\frac{1}{25} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{6}{5}} \ln \left| \frac{x - \frac{6}{5}}{x + \frac{6}{5}} \right| + C =$$

$$= -\frac{1}{60} \ln \left| \frac{5x - 6}{5x + 6} \right| + C;$$

$$2. \int \frac{dx}{36 + 25x^2} = \int \frac{dx}{25 \left(\frac{36}{25} + x^2 \right)} = \frac{1}{25} \int \frac{dx}{\left(\frac{6}{5} \right)^2 + x^2} = \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{\frac{6}{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\frac{6}{5}} + C =$$

$$= \frac{1}{25} \cdot \frac{5}{6} \operatorname{arctg} \frac{5x}{6} + C = \frac{1}{30} \operatorname{arctg} \frac{5x}{6} + C;$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{36 - 25x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{25 \left(\frac{36}{25} - x^2 \right)}} = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{6}{5} \right)^2 - x^2}} = \frac{1}{5} \arcsin \frac{x}{\frac{6}{5}} + C =$$

$$= \frac{1}{5} \arcsin \frac{5x}{6} + C;$$

$$4. \int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 \pm 36}} = \int \frac{dx}{\sqrt{25 \left(x^2 \pm \frac{36}{25} \right)}} = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm \frac{36}{25}}} = \frac{1}{5} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm \frac{36}{25}} \right| + C_1 =$$

$$= \frac{1}{5} \ln \left| 5x + \sqrt{25x^2 \pm 36} \right| + C.$$

в) Используем метод подстановки (замены переменной).

$$\int \frac{xdx}{3 - 5x^2} = \left. \begin{array}{l} t = 3 - 5x^2 \\ dt = d(3 - 5x^2) = (3 - 5x^2)' dx = -10xdx \\ xdx = -\frac{1}{10} dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{10} dt}{t} = -\frac{1}{10} \int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\frac{1}{10} \ln |t| + C = -\frac{1}{10} \ln |3 - 5x^2| + C.$$

Ответ: $-\frac{1}{10} \ln |3 - 5x^2| + C.$

г) Используем метод подстановки (замены переменной).

$$\int \frac{e^{2x} dx}{3 - e^{2x}} = \left. \begin{array}{l} t = 3 - e^{2x} \\ dt = d(3 - e^{2x}) = (3 - e^{2x})' dx = -2e^{2x} dx \\ e^{2x} dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{2} dt}{t} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|t| + C = -\frac{1}{2} \ln|3 - e^{2x}| + C.$$

Ответ: $-\frac{1}{2} \ln|3 - e^{2x}| + C.$

№2. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x}{\sqrt{7x-2}} dx$; б) $\int x\sqrt{8x+3} dx$.

Решение.

Используем метод подстановки (замены переменной).

$$\text{а) } \int \frac{x}{\sqrt{7x-2}} dx = \left. \begin{array}{l} \sqrt{7x-2} = t, \quad 7x-2 = t^2, \\ 7x = t^2 + 2, \quad x = \frac{t^2 + 2}{7}, \\ dx = d\left(\frac{t^2 + 2}{7}\right) = \frac{2t}{7} dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 + 2}{7} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{2t}{7} dt = \frac{2}{7^2} \int (t^2 + 2) dt =$$

$$= \frac{2}{49} \left(\frac{t^3}{3} + 2t \right) + C = \frac{2}{3 \cdot 49} t^3 + \frac{4}{49} t + C = \frac{2}{147} (\sqrt{7x-2})^3 + \frac{4}{49} \sqrt{7x-2} + C.$$

$$\text{б) } \int x\sqrt{8x+3} dx = \left. \begin{array}{l} \sqrt{8x+3} = t, \quad 8x+3 = t^2, \\ 8x = t^2 - 3, \quad x = \frac{t^2 - 3}{8}, \\ dx = d\left(\frac{t^2 - 3}{8}\right) = \frac{2t}{8} dt = \frac{t}{4} dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 3}{8} \cdot t \cdot \frac{t}{4} dt =$$

$$= \frac{1}{32} \int (t^2 - 3)t^2 dt = \frac{1}{32} \int (t^4 - 3t^2) dt = \frac{1}{32} \int t^4 dt - \frac{3}{32} \int t^2 dt =$$

$$= \frac{1}{32} \cdot \frac{t^5}{5} - \frac{3}{32} \cdot \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{160} (\sqrt{8x+3})^5 - \frac{1}{32} (\sqrt{8x+3})^3 + C.$$

№3. Найти неопределенный интеграл: $\int x e^{-3x} dx$.

Решение.

Заметим, что $d(e^{-3x}) = (e^{-3x}) dx = -3e^{-3x} dx$. Откуда $e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} d(e^{-3x})$.

$$\text{Тогда } \int x e^{-3x} dx = \int x \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) d(e^{-3x}) = -\frac{1}{3} \cdot \int x d(e^{-3x}).$$

Далее, используя формулу интегрирования по частям $\int v du = vu - \int u dv$, где $v = x$, а $u = e^{-3x}$, получим

$$-\frac{1}{3} \cdot \int x d(e^{-3x}) = -\frac{1}{3} \cdot (x e^{-3x} - \int e^{-3x} dx) = -\frac{1}{3} x e^{-3x} + \frac{1}{3} \int e^{-3x} dx.$$

Учитывая, что $e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} d(e^{-3x})$, имеем

$$\int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} \int d(e^{-3x}) = -\frac{1}{3} e^{-3x} + C.$$

Таким образом,

$$\int x e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} x e^{-3x} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3} e^{-3x}\right) + C = -\frac{1}{3} x e^{-3x} - \frac{1}{9} \cdot e^{-3x} + C.$$

Ответ: $-\frac{1}{3} x e^{-3x} - \frac{1}{9} \cdot e^{-3x} + C$.

№4. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{3x+2}{x^2-8x+20} dx$.

Решение.

Вычисляем интеграл от простейшей рациональной дроби вида

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \text{ где } \frac{p^2}{4} - q < 0,$$

где знаменатель дроби представляется в виде

$$x^2 + px + q = x^2 + 2x \cdot \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+2}{x^2-8x+25} dx &= \int \frac{3x+2}{x^2-2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 - 4^2 + 25} dx = \\ &= \int \frac{3x+2}{(x^2-2 \cdot x \cdot 4 + 4^2) - 16 + 25} dx = \int \frac{3x+2}{(x-4)^2 + 9} dx = \int \frac{3(x-4+4)+2}{(x-4)^2 + 9} dx = \\ &= \int \frac{3(x-4)+12+2}{(x-4)^2 + 9} dx = \int \frac{3(x-4)+14}{(x-4)^2 + 9} dx = \int \left(\frac{3(x-4)}{(x-4)^2 + 9} + \frac{14}{(x-4)^2 + 9} \right) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{3(x-4)}{(x-4)^2+9} dx + \int \frac{14}{(x-4)^2+9} dx = 3 \int \frac{(x-4)dx}{(x-4)^2+9} + 14 \int \frac{dx}{(x-4)^2+9} = \\
&= \frac{3}{2} \int \frac{2(x-4)dx}{(x-4)^2+9} + 14 \int \frac{dx}{(x-4)^2+3^2} = \frac{3}{2} \int \frac{d(x-4)^2}{(x-4)^2+9} + 14 \int \frac{dx}{(x-4)^2+3^2} = \\
&= \frac{3}{2} \int \frac{d((x-4)^2+9)}{(x-4)^2+9} + 14 \int \frac{d(x-4)}{(x-4)^2+3^2}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$ и $\int \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$, получим

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+2}{x^2-8x+25} dx &= \frac{3}{2} \ln|(x-4)^2+9| + 14 \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-4}{3} + C = \\
&= \frac{3}{2} \ln(x^2-8x+25) + \frac{14}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-4}{3} + C.
\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3}{2} \ln(x^2-8x+25) + \frac{14}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-4}{3} + C.$

№5. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $f(x) = -x^2 + 2x + 5$ и прямой $g(x) = -x + 1$

Решение.

Строим графики функций $f(x)$ и $g(x)$.

Для нахождения точек пересечения графиков функций $f(x)$ и $g(x)$, решаем уравнение $f(x) = g(x)$, т.е.

$$-x^2 + 2x + 5 = -x + 1.$$

Откуда

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Корнями уравнения являются значения:

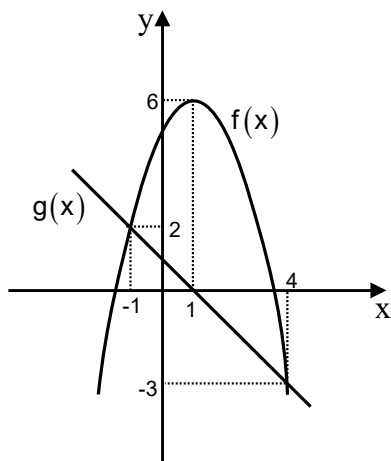
$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-4)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2},$$

т.е. $x_1 = \frac{3-5}{2} = -1$ и $x_2 = \frac{3+5}{2} = 4$.

Значения функций $f(x)$ и $g(x)$ в этих точках $f(-1) = g(-1) = 2$ и $f(4) = g(4) = -3$. Таким образом $(-1; 2)$ и $(4; -3)$ – точки пересечения графиков функций.

Площадь фигуры определяем по формуле: $S = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx$, где x_1

и x_2 – решения уравнения $f(x) = g(x)$.



Тогда

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^4 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^4 (-x^2 + 2x + 5 - (-x + 1)) dx = \int_{-1}^4 (-x^2 + 2x + 5 + x - 1) dx = \\ &= \int_{-1}^4 (-x^2 + 3x + 4) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} + 4x \right) \Big|_{-1}^4 = \\ &= \left(-\frac{4^3}{3} + 3 \cdot \frac{4^2}{2} + 4 \cdot 4 \right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + 3 \cdot \frac{(-1)^2}{2} + 4 \cdot (-1) \right) = \\ &= \left(-\frac{64}{3} + 24 + 16 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4 \right) = -\frac{64}{3} + 40 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 = 44 - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \\ &= 44 - 21\frac{2}{3} - 1\frac{1}{2} = 22 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = 22 - \frac{7}{6} = 20\frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Ответ: $20\frac{5}{6}$.

VII. Решение практических заданий по теме: «Дифференциальные уравнения»

№1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $\sin^2 3x \cdot dy + 3y dx = 0$.

Решение.

Исходное уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными.

Заметим, что $y = 0$ является одним из решений исходного дифференциального уравнения.

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dy}{y} = -\frac{3dx}{\sin^2 3x} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{y} = -\frac{d(3x)}{\sin^2 3x}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{d(3x)}{\sin^2 3x} + C \quad \text{или} \quad \ln|y| = \operatorname{ctg} 3x + C.$$

Откуда, $|y| = e^{\operatorname{ctg} 3x + C}$ или $y = \pm e^C \cdot e^{\operatorname{ctg} 3x}$. Тогда, полагая $C_1 = \pm e^C$ ($C_1 \neq 0$) и, учитывая, что $y = 0$ также является решением исходного уравнения, получим $y = C_1 e^{\operatorname{ctg} 3x}$ ($C_1 \in \mathbb{R}$) – общее решение уравнения $\sin^2 3x \cdot dy + 3y dx = 0$.

Ответ: $y = C e^{\operatorname{ctg} 3x}$.

$$\text{б) } (3x^2 + 2)y' - 6yx = 0.$$

Решение.

Исходное уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными.

Учитывая, что $y' = \frac{dy}{dx}$, получим уравнение

$$(3x^2 + 2)\frac{dy}{dx} - 6yx = 0 \text{ или } (3x^2 + 2)dy = 6yx dx.$$

Заметим, что $y = 0$ является одним из решений исходного дифференциального уравнения.

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dy}{y} = \frac{6x dx}{3x^2 + 2}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{6x}{3x^2 + 2} dx + C.$$

Учитывая, что

$$d(3x^2 + 2) = (3x^2 + 2)' dx = (6x + 0) dx = 6x dx,$$

имеем

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{d(3x^2 + 2)}{3x^2 + 2} + C.$$

Откуда, полагая $C = \ln C_1$ ($C_1 > 0$), получим

$$\ln|y| = \ln|3x^2 + 2| + \ln C_1.$$

Используя свойства логарифмов, приходим к уравнению

$$\ln|y| = \ln C_1 |3x^2 + 2|.$$

Откуда

$$|y| = C_1 |3x^2 + 2| \text{ или } y = \pm C_1 (3x^2 + 2).$$

Тогда, полагая $C_2 = \pm C_1$ ($C_2 \neq 0$) и, учитывая, что $y = 0$ также является решением исходного уравнения, получим

$$y = C_2 (3x^2 + 2), \quad (C_2 \in \mathbb{R}),$$

общее решение уравнения $(3x^2 + 2)y' - 6yx = 0$.

Ответ: $y = C_2(3x^2 + 2)$.

№2. Найти частное решение дифференциального уравнения:

$$y' - \frac{6}{x}y = 2e^{2x+2}x^6, \quad y(-1) = 3.$$

Решение.

Исходное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка вида: $y' + p(x)y = q(x)$. Найдем общее решение дифференциального уравнения методом Бернулли.

Решение уравнения будем искать в виде: $y = uv$. Так как $y' = u'v + uv'$, то, подставляя y и y' в исходное уравнение, получим

$$(u'v + uv') - \frac{6}{x} \times uv = 2e^{2x+2}x^6.$$

Группируя второе и третье слагаемое в левой части последнего уравнения, имеем

$$u'v + u\left(v' - \frac{6}{x}v\right) = 2e^{2x+2}x^6.$$

Найдем одно из ненулевых решений уравнения $v' - \frac{6}{x}v = 0$ или $v' = \frac{6}{x}v$, которое является уравнением с разделяющимися переменными. Учитывая, что $v' = \frac{dv}{dx}$, имеем $\frac{dv}{dx} = \frac{6}{x}v$ и, разделяя переменные, получим

$$\frac{dv}{v} = \frac{6dx}{x}.$$

Интегрируя последнее уравнение, имеем $\int \frac{dv}{v} = 6 \int \frac{dx}{x} + C$. Откуда, полагая $C = \ln C_1$ ($C_1 > 0$), получим $\ln|v| = 6\ln|x| + \ln C_1$ и, используя свойства логарифмов, приходим к уравнению $\ln|v| = \ln|x|^6 + \ln C_1$ или $\ln|v| = \ln C_1|x|^6$. Откуда $|v| = C_1|x|^6$ или $v = \pm C_1x^6$.

Тогда, полагая $C_2 = \pm C_1$ ($C_2 \neq 0$) и, учитывая, что $v = 0$ также является решением уравнения $v' - \frac{6}{x}v = 0$, получим $v = C_2x^6$ ($C_2 \in \mathbb{R}$) – общее решение уравнения $v' - \frac{6}{x}v = 0$.

В качестве одного из ненулевых решений возьмем, например $v = x^6$, полагая $C_2 = 1$.

Учитывая, что $v' - \frac{6}{x}v = 0$ и, подставляя $v = x^6$ в уравнение

$$u'v + u\left(v' - \frac{6}{x}v\right) = 2e^{2x+2}x^6,$$

получим $u' \cdot x^6 = 2e^{2x+2}x^6$ или $u' = 2e^{2x+2}$ – неполное дифференциальное уравнение первого порядка вида: $u' = f(x)$.

Откуда,

$$u = \int 2e^{2x+2}dx + C.$$

Учитывая $d(2x + 2) = (2x + 2)'dx = 2dx$, имеем

$$u = \int e^{2x+2}d(2x + 2) + C = e^{2x+2} + C.$$

Таким образом, $y = uv = (e^{2x+2} + C)x^6$ – общее решение дифференциального уравнения.

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(-1) = 3$. Подставляя, $x = -1$ и $y = 3$ в уравнение $y = (e^{2x+2} + C)x^6$, получим: $3 = (e^{2(-1)+2} + C)(-1)^6$ или $3 = 1 + C$ и $C = 2$.

Следовательно, $y = (e^{2x+2} + 2)x^6$ – частное решение исходного дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(-1) = 3$.

Ответ: $y = (e^{2x+2} + 2)x^6$.

№3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $y'' - 2y' - 35y = 0$; б) $y'' + 12y' + 36y = 0$; в) $y'' + 6y' + 25y = 0$.

Решение.

а) Решим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda - 35 = 0$, производя в уравнении $y'' - 2y' - 35y = 0$ замену $y'' = \lambda^2$, $y' = \lambda^1 = \lambda$ и $y = \lambda^0 = 1$.

Тогда

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-35)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 140}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{2 \pm 12}{2}.$$

Откуда

$$\lambda_1 = \frac{2 - 12}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \text{ и } \lambda_2 = \frac{2 + 12}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$

Если характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня λ_1 и λ_2 , то общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Следовательно, $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{7x}$ – общее решение исходного уравнения.

Ответ: $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{7x}$.

б) Решим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 12\lambda + 36 = 0$, производя в уравнении $y'' + 12y' + 36y = 0$ замену $y'' = \lambda^2$, $y' = \lambda^1 = \lambda$ и $y = \lambda^0 = 1$.

Тогда

$$\lambda_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 144}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-12 \pm 0}{2}.$$

Откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = -6$.

Если характеристическое уравнение имеет два равных действительных корня $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (кратный корень), то общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y = (C_1 + C_2x)e^{\lambda x}.$$

Следовательно, $y = (C_1 + C_2x)e^{-6x}$ – общее решение исходного уравнения.

Ответ: $y = (C_1 + C_2x)e^{-6x}$.

в) Решим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0$, производя в уравнении $y'' + 6y' + 25y = 0$ замену $y'' = \lambda^2$, $y' = \lambda^1 = \lambda$ и $y = \lambda^0 = 1$.

Тогда

$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 100}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{-6 \pm 8i}{2} = -3 \pm 4i.$$

Откуда $\lambda_1 = -3 - 4i$ и $\lambda_2 = -3 + 4i$, т.е. корни характеристического уравнения имеют вид $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, где $\alpha = -3$, $\beta = 4$.

Если характеристическое уравнение имеет два сопряженных комплексных корня $\lambda_1 = \alpha - \beta i$ и $\lambda_2 = \alpha + \beta i$, то общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x).$$

Следовательно, $y = e^{-3x} (C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x)$ – общее решение исходного уравнения.

Ответ: $y = e^{-3x} (C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x)$.

№4. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + 3y' - 4y = -4x^2 - 6x + 19.$$

Решение.

Исходное уравнение является неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью, вида: $P_n(x)e^{\alpha x}$, где $\alpha = 0$, $P_n(x) = -4x^2 - 6x + 19$ – многочлен степени $n = 2$.

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $y = y_0 + y_1$, где y_0 – общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' + 3y' - 4y = 0$, а y_1 – частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Решим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$, производя в уравнении $y'' + 3y' - 4y = 0$ замену $y'' = \lambda^2$, $y' = \lambda^1 = \lambda$ и $y = \lambda^0 = 1$.

Тогда

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}.$$

Откуда $\lambda_1 = \frac{-3 - 5}{2} = \frac{-8}{2} = -4$ и $\lambda_2 = \frac{-3 + 5}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Если характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня λ_1 и λ_2 , то общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Следовательно, $y_0 = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x$ – общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + 3y' - 4y = 0$.

Найдем частное решение исходного дифференциального уравнения, которое будем отыскивать в виде: $y_1 = Ax^2 + Bx + C$, так как $\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения. Так как $y_1' = 2Ax + B$ и $y_1'' = 2A$, то, подставляя y_1'' , y_1' , y_1 в исходное уравнение, получим:

$$2A + 3(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx + C) = -4x^2 - 6x + 19$$

или

$$-4Ax^2 + (6A - 4B)x + (2A + 3B - 4C) = -4x^2 - 6x + 19.$$

Откуда

$$\begin{cases} -4A = -4, \\ 6A - 4B = -6, \\ 2A + 3B - 4C = 19, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} A = 1, \\ B = 3, \\ C = -2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$y_1 = Ax^2 + Bx + C = x^2 + 3x - 2$$

– частное решение исходного дифференциального уравнения.

Таким образом,

$$y = y_0 + y_1 = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x + x^2 + 3x - 2$$

– общее решение дифференциального уравнения.

Ответ: $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x + x^2 + 3x - 2$.

№5. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + 10y' + 25y = 6e^{-5x}.$$

Решение.

Исходное уравнение является неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида: $P_n(x)e^{\alpha x}$, где $\alpha = -5$, $P_n(x) = 6$ – многочлен степени $n = 0$.

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $y = y_0 + y_1$, где y_0 – общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' + 10y' + 25y = 0$, а y_1 – общее решение неоднородного дифференциального уравнения.

Решим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$, производя в уравнении $y'' + 10y' + 25y = 0$ замену $y'' = \lambda^2$, $y' = \lambda^1 = \lambda$ и $y = \lambda^0 = 1$.

Тогда

$$\lambda_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-10 \pm 0}{2}.$$

Откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = -5$.

Если характеристическое уравнение имеет два равных действительных корня $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (кратный корень), то общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}.$$

Следовательно, $y = (C_1 + C_2 x) e^{-5x}$ – общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + 10y' + 25y = 0$.

Заметим, что если характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня λ_1 и λ_2 , то общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Найдем частное решение исходного дифференциального уравнения, которое будем искать в виде: $y_1 = A e^{-5x} \cdot x^2 = A x^2 e^{-5x}$, так как $\alpha = -5$ является кратным корнем характеристического уравнения.

Заметим, что если α является одним из действительных корней характеристического уравнения, то частное решение исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y_1 = A e^{\alpha x} \cdot x^1 = A x e^{\alpha x}.$$

Так как

$$y_1' = A(x^2)' e^{-5x} + A x^2 (e^{-5x})' = A(2x) \cdot e^{-5x} + A x^2 \cdot (-5e^{-5x}) = A(2x - 5x^2) \cdot e^{-5x}$$

и

$$\begin{aligned} y_1'' &= A(2x - 5x^2)' e^{-5x} + A(2x - 5x^2)(e^{-5x})' = A(2 - 10x) e^{-5x} + A(2x - 5x^2)(-5e^{-5x}) = \\ &= A(2 - 10x) e^{-5x} + A(-10x + 25x^2) e^{-5x} = A(2 - 20x + 25x^2) e^{-5x}, \end{aligned}$$

то, подставляя y_1'' , y_1' , y_1 в исходное уравнение $y'' + 10y' + 25y = 6e^{-5x}$, получим:

$$A(2 - 20x + 25x^2) \cdot e^{-5x} + 10 \cdot A(2x - 5x^2) e^{-5x} + 25 A x^2 e^{-5x} = 6e^{-5x}$$

или

$$A(2 - 20x + 25x^2 + 20x - 50x^2 + 25x^2)e^{-5x} = 6e^{-5x}, \text{ т. е. } 2Ae^{-5x} = 6e^{-5x}.$$

Откуда $2A = 6$, т. е. $A = 3$.

Следовательно,

$$y_1 = Ax^2e^{-5x} = 3x^2e^{-5x}$$

– частное решение исходного дифференциального уравнения.

Таким образом,

$$y = y_0 + y_1 = (C_1 + C_2x)e^{-5x} + 3x^2e^{-5x}$$

– общее решение дифференциального уравнения.

Ответ: $y = y_0 + y_1 = (C_1 + C_2x)e^{-5x} + 3x^2e^{-5x}$.

VIII. Решение практических заданий по теме: «Числовые и функциональные ряды»

№1. Исследовать сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^3+3n-2}$

Решение.

Воспользуемся признаком сравнения.

Общий член исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: $a_n = \frac{n+5}{n^3+3n-2}$.

Учитывая, что для больших значений n : $\frac{n+5}{n^3+3n-2} \approx \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$, то срав-

ним исходный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, общий член которого равен

$$b_n = \frac{1}{n^2}.$$

Вычислим предел:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+5}{n^3+3n-2} \cdot \frac{n^2}{1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3+5n^2}{n^3+3n-2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n^3}{n^3} + \frac{5n^2}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3} + \frac{3n}{n^3} - \frac{2}{n^3}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{5}{n}}{1 + \frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^3}} = \frac{1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n}}{1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^2} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^3}} = \frac{1+0}{1+0-0} = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Так как значение предела не равно 0, то оба ряда являются сходящимися или расходящимися.

Заметим, что **обобщенный гармонический ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ является **сходящимся, если $\alpha > 1$ и расходящимся, если $\alpha \leq 1$.**

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится ($\alpha = 2 > 1$), то и исходный ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

№2. Исследовать сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5) \cdot 3^{2n+1}}{2^{3n-4}}$.

Решение.

Воспользуемся признаком Д'Аламбера.

Определим a_n и a_{n+1} члены ряда:

$$a_n = \frac{(n+5) \cdot 3^{2n+1}}{2^{3n-4}} \text{ и } a_{n+1} = \frac{((n+1)+5) \cdot 3^{2(n+1)+1}}{2^{3(n+1)-4}} = \frac{(n+6) \cdot 3^{2n+3}}{2^{3n-1}}.$$

Вычислим предел:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(n+6) \cdot 3^{2n+3}}{2^{3n-1}} \cdot \frac{2^{3n-4}}{(n+5) \cdot 3^{2n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^{3n-4} \cdot 3^{2n+3}}{2^{3n-1} \cdot 3^{2n+1}} \cdot \frac{n+6}{n+5} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^2}{2^3} \cdot \frac{n+6}{n+5} = \frac{3^2}{2^3} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n}{n} + \frac{6}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{5}{n}} = \frac{9}{8} \cdot \frac{1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6}{n}}{1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n}} = \frac{9}{8} \cdot \frac{1+0}{1+0} = \frac{9}{8} > 1 \end{aligned}$$

Ряд **расходится**, так как значение предела больше 1.

Заметим, что если значение предела меньше 1, то ряд **сходится**.

Ответ: ряд расходится.

№3. Исследовать сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{11^{6n+4} (n+6)^{n^2}}{30^{6n-5} n^{n^2}}$.

Решение.

Воспользуемся признаком Коши.

$$\text{Общий член ряда } a_n = \frac{11^{6n+4} (n+6)^{n^2}}{30^{6n-5} n^{n^2}}.$$

Вычислим предел:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{11^{6n+4} (n+6)^{n^2}}{30^{6n-5} n^{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{11^{\frac{6n+4}{n}} (n+6)^{\frac{n^2}{n}}}{30^{\frac{6n-5}{n}} n^{\frac{n^2}{n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{11^{6+\frac{4}{n}} (n+6)^n}{30^{6-\frac{5}{n}} n^n} = \\ &= \frac{11^6}{30^6} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{11^{\frac{4}{n}}}{30^{\frac{5}{n}}} \cdot \left(\frac{n+6}{n} \right)^n = \left(\frac{11}{30} \right)^6 \cdot \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} 11^{\frac{4}{n}}}{\lim_{n \rightarrow +\infty} 30^{\frac{5}{n}}} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+6}{n} \right)^n = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{11}{30}\right)^6 \cdot \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n}}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{6}{n}\right)^{\frac{n}{6} \cdot 6} = \left(\frac{11}{30}\right)^6 \cdot \frac{11^0}{30^0} \cdot \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{6}{n}\right)^{\frac{n}{6}}\right)^6 =$$

$$= \left(\frac{11}{30}\right)^6 \cdot \frac{1}{1} \cdot e^6 = \left(\frac{11e}{30}\right)^6 < 1, \text{ так как } 11e \approx 11 \cdot 2,72 = 29,92 < 30.$$

Ряд **сходится**, так как значение предела меньше 1.

Заметим, что если значение предела больше 1, то ряд **расходится**.

Ответ: ряд сходится.

№4. Исследовать сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+2}{n^2+4n+136}$.

Решение.

Исходный ряд является знакочередующимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, где

$a_n = \frac{n+2}{n^2+4n+136}$. Воспользуемся следствием признака Лейбница о сходимости таких рядов: **если члены знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, $a_n > 0$, монотонно убывают ($a_n \geq a_{n+1}$), начиная с некоторого номера n_0 , и стремятся к нулю ($\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$), то ряд сходится.**

Очевидно, что $a_n = \frac{n+2}{n^2+4n+136} > 0$.

Вычислим предел:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n}{n^2} + \frac{2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{4n}{n^2} + \frac{136}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{136}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2}}{1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{136}{n^2}} =$$

$$= \frac{0+0}{1+0+0} = 0.$$

Так как $a_n = \frac{n+2}{n^2+4n+136}$, то

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)+2}{(n+1)^2+4(n+1)+136} = \frac{n+3}{n^2+2n+1+4n+4+136} = \frac{n+3}{n^2+6n+141}.$$

Решим неравенство: $a_n \geq a_{n+1}$, т.е. $\frac{n+2}{n^2+4n+136} \geq \frac{n+3}{n^2+6n+141}$

Тогда $(n+2)(n^2+6n+141) \geq (n+3)(n^2+4n+136)$ и

$$n^3 + 6n^2 + 141n + 2n^2 + 12n + 282 \geq n^3 + 4n^2 + 136n + 3n^2 + 12n + 408.$$

Следовательно,

$$n^3 + 8n^2 + 153n + 282 \geq n^3 + 7n^2 + 148n + 408 \text{ и } n^2 + 5n - 126 \geq 0.$$

Разложим левую часть неравенства на множители. Для этого решим уравнение $n^2 + 5n - 126 = 0$, дискриминант которого равен $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-126) = 25 + 504 = 529 = 23^2$.

Откуда

$$n_1 = \frac{-5 - 23}{2 \cdot 1} = -14 \text{ и } n_2 = \frac{-5 + 23}{2 \cdot 1} = 9.$$

Таким образом, $(n - (-14))(n - 9) \geq 0$ или $(n + 14)(n - 9) \geq 0$ и неравенство $a_n \geq a_{n+1}$ выполняется для любого натурального $n \geq n_0 = 9$.

Следовательно, исходный ряд является сходящимся.

Ответ: ряд сходится.

№5. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{6^n(n+2)}$.

Решение.

Исходный ряд является степенным рядом вида $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n x^n$, где

$$c_n = \frac{1}{6^n(n+2)}.$$

$$\text{Тогда } c_{n+1} = \frac{1}{6^{(n+1)}((n+1)+2)} = \frac{1}{6^{n+1}(n+3)}.$$

Вычислим **радиус сходимости** степенного ряда:

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6^n(n+2)} \cdot \frac{6^{n+1}(n+3)}{1} \right) = 6 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+3}{n+2} = 6 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n}{n} + \frac{3}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{2}{n}} =$$

$$= 6 \cdot \frac{1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n}}{1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n}} = 6 \cdot \frac{1+0}{1+0} = 6.$$

Следовательно, $(-R, R)$, т.е. $(-6, 6)$ **интервал сходимости** ряда.

Если, $x = R = 6$, то получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{6^n(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{6^n(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2},$$

который расходится, как и гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Если, $x = -R = -6$, то получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{6^n(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-6)^n}{6^n(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 6^n}{6^n(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}.$$

Полученный ряд сходится, как знакочередующийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$, где

$a_n = \frac{1}{n+2}$, так как $a_n = \frac{1}{n+2} > 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+2} = 0,$$

и

$$a_0 = \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2} > a_1 = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} > a_2 = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} > \dots$$

- монотонно убывающая последовательность.

Таким образом, $[-6, 6)$ – **область сходимости** степенного ряда.

Ответ: $[-6, 6)$.

Литература

1. Гусак А.А. Высшая математика: Учебник для студентов вузов: В 2-х т. Т. 2: – 2-е изд., испр. – Мн.: ТетраСистемс, 2000. – 448 с.
2. Ермаков В.И., Бобрик Г.И., Гринцевичюс Р.К. и др. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие / Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 575 с. – (Сер. “Высшее образование”).
3. Жевняк Р.М., Карпук А.А., Марченко А.И., Унукович В.Т. Общий курс высшей математики: Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов. – Орша: Оршанская типография, 1996. – 320 с.
4. Красс М.С. Математика для экономических специальностей: Учебник. – М.: ИНФРА-М, 1998. – 464 с.
5. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов. / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1998. – 471 с.
6. Кузнецов А.В., Янчук Л.Ф., Мызгаева С.А. и др. Высшая математика: Общий курс: Учебник для студентов экономических специальностей вузов. / Под общ. ред. проф. А.И. Яблонского. – Мн: Выш. шк., 1993. – 349 с.
7. Кузнецов А.В., Кузнецова Д.С., Шилкина Е.И. и др. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Общий курс: Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов. – Мн: Выш. шк., 1994. – 284 с.
8. Малыхин В.И. Математика в экономике: Учебник. – М.: ИНФРА-М, 1999. – 356 с.
9. Минюк С.А., Ровба Е.А. Высшая математика: Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов. – Гродно: ГрГУ, 2000. – 394 с.
10. Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В. Юреть И.Е. Индивидуальные задания по высшей математике: Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Учеб. пособие. / Под общ. ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Выш. шк., 2000. – 396 с.: ил.
11. Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В. В. и др. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учеб. пособие: В 3 ч. Ч. 3. – Мн.: Выш. шк., 1991. – 288 с.
12. Яблонский А.И., Кузнецов А.В., Шилкина Е.И. и др. Высшая математика: Общий курс: Учебник для студентов экономических специальностей вузов. – 2-е изд., перераб. / Под общ. ред. С.А. Самалы. – Мн: Выш. шк., 2000. – 351 с.

Содержание

| | |
|---|-----------|
| Практические задания по теме: «Функции нескольких переменных»... | 3 |
| Практические задания по теме: «Интегральное исчисление»..... | 5 |
| Практические задания по теме: «Дифференциальные уравнения».... | 8 |
| Практические задания по теме: «Числовые и функциональные ряды»..... | 9 |
| Решение практических заданий по теме: «Функции нескольких переменных»..... | 11 |
| Решение практических заданий по теме: «Интегральное исчисление»..... | 16 |
| Решение практических заданий по теме: «Дифференциальные уравнения»..... | 21 |
| Решение практических заданий по теме: «Числовые и функциональные ряды»..... | 28 |
| Литература..... | 33 |

Учебное издание

Составители:

*Гладкий Иван Иванович
Каримова Татьяна Ивановна
Махнист Леонид Петрович
Рубанов Владимир Степанович,
Шамовская Галина Владимировна*

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и варианты заданий для
студентов экономических специальностей
дневной формы обучения

Часть II

Ответственный за выпуск: Махнист Л.П.
Редактор: Строкач Т.В.
Компьютерная верстка: Боровикова Е.А.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано в печать 02.09.2008 г. Формат 60x84 ¹/₁₆. Бумага «Снегурочка».
Усл. п. л. 2,1. Уч. изд. л. 2,25. Заказ № 875. Тираж 200 экз.
Отпечатано на ризографе Учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

