Б. А. Годунов, канд. физ.-мат. наук / БрПИ /

К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ГИПОТЕЗЫ ВАН ДЕР ВАРДЕНА

Пусть Ω_n - множество двоякостохастических матриц порядка n и $p(A)$ - число, получающееся из определителя матрицы A, если знак любой перестановки положить равным единице. В 1926 году Ван дер Варденом [1] была высказана гипотеза: если $S \in \Omega_n$, то $p(S) \geq n!/n^n$, причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда $S = J_n$, где J_n - матрица, все элементы которой равны $1/n$. За пятьдесят лет была разработана обширная теория вокруг этой гипотезы, однако доказательство её, опубликованное в 1980 году советским математиком Егорычевым Г. П., использовало аппарат, весьма далёкий от теории матриц.

Автором данной работы, не выходя за рамки предмета, доказана

ТЕОРЕМА 1. Если A - минимизирующая матрица в Ω_n, то $p(A(i|j)) = p(A)$ для любых i и j.

Здесь $A(i|j)$ - матрица, получающаяся из A вычёркиванием i-ой строки и j-го столбца.

При доказательстве используется результат Д. Лондона: $p(A(i|j)) \geq p(A)$ для любых i и j, если A - минимизирующая матрица. Простыми рассуждениями доказывается, что из равенства $a_{i_0 j_0} = 0$, $p(A(i_0|j_0)) = p(A) + \beta$ / $\beta > 0$ / следует $a_{i j_0} = 0$, что противоречит тому, что $A \in \Omega_n$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Omega_n(n-1)$ - подмножество двоякостохастических матриц, не содержащих нулевую подматрицу размера $s \times t$ / $s+t = n-1$ /, то $\min p(S) = p(J_n)$ и достигается только на J_n.

В доказательстве, разлагая равенство $p(A(i|j)) = p(A)$ по элементам i-ой строки, автор приходит к тому, что $A = J_n$.

Предположение, что минимизирующая матрица не принадлежит $\Omega_n(n-1)$ приводит к противоречию, при доказательстве которого используется

ЛЕММА. Для любых $s \geq 1$ и $t \geq 1$ верно неравенство

$$\frac{s!}{(s+1)^s} \cdot \frac{t!}{(t+1)^t} > \frac{(s+t)!}{(s+t+1)^{s+t}}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Минк. Перманенты. М., Мир, 1982. 213 с.