Н.П.Зизелюк, ст.преподаватель (БрПИ)

О ПРАВИЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ

Рассмотрим дифференциальное уравнение P_{IV} (четвертое уравнение Пенлеве) [1] :

$$w'' = w'^2/2w + \frac{3}{2}w^3 + 4zw^2 + 2(z^2-\alpha)w + \beta/w \quad (1)$$

где $\alpha, \beta \in R$, z, w – действительные переменные.

Для (1) ставится задача: выделить класс правильных решений, обладающих свойством монотонности.

В уравнении (1) выполним замену: $2\sqrt{w} = u$ (2)
в результате получим:

$$u'' = \frac{3}{64}u^5 + \frac{1}{2}zu^3 + (z^2-\alpha)u + 8\beta/u^3 \quad (3)$$

Для $\{z \geq 0, u > 0\} = \mathcal{D}$ и $M(z_0, u_0) \in \mathcal{D}$ обозначим через $u = u_m(z, u_0')$ связную часть решения уравнения (3), лежащую в области $\mathcal{D}$, причём $u_m(z_0, u_0') = u_0$, $u_m'(z_0, u_0') = u_0'$

Из [2] следует.

Теорема. Пусть

$$\frac{3}{64}u^5 + \frac{1}{2}zu^3 + (z^2-\alpha)u + 8\beta/u^3 = 0$$

в области $\mathcal{D}$ определяет непрерывную функцию

$$u = \varphi(z) \quad (4)$$

В области $\mathcal{D}$ имеет место единственность решения задачи Коши, причём два решения на некотором отрезке $[z_1, z_2]$ целиком лежащие в $\mathcal{D}$, не могут дважды пересекаться на этом отрезке.

Тогда через каждую точку $M(z_0, u_0) \in \mathcal{D}$ проходит, по крайней мере, одно правильное решение $u = u_m(z, \bar{u}_0')$ (5)
уравнения (3).

Из последней теоремы и замены (2) следует решение $w = 0{,}25\, u_m^2(z\bar{u}_0')$ уравнения (1).

1. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения.-Харьков.1939. -463 с.;2.Яблонский А.И.О правильных решениях уравнения - ВесцI АН БССР, № 2, 1963.