УДК 539.3

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛ С СОГЛАСОВАННЫМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Мелешко И.Н., Пронкевич С.А.
Белорусский национальный технический университет,
Минск, Республика Беларусь

Разработка методов решения контактных задач для тел с согласованными поверхностями остается актуальной проблемой, исследованию которой посвящено достаточно большое количество работ [2, 3]. Неприменимость теории Герца в связи с увеличением области контакта до масштаба порядка характерного размера контактирующих тел требует иного подхода к решению таких задач [1, 2, 3].

Пусть упругий цилиндр, длина которого не менее порядка диаметра и более, вложен в упругое тело с цилиндрической полостью, так что по нижней границе они находятся в контакте. Под действием приложенных нагрузок в контактирующих телах возникают деформации и напряжения, которые удовлетворяют уравнениям равновесия так, что в сечении, расположенном достаточно далеко от торцов цилиндра напряженно – деформированное состояние является плоским (рисунок 1).

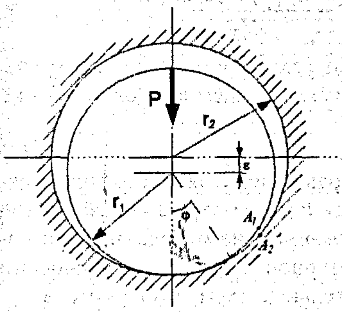

Рисунок 1 - Внутренний контакт областей с круговыми границами

В этом случае в области контакта выполняется соотношение:

$$u_{1r} + u_{2r} = \alpha\cos\varphi - \varepsilon(1-\cos\varphi),$$

где u_1 и u_2 – нормальные упругие перемещения точек цилиндра и полости, α – сближение тел при сжатии, $\varepsilon = r_2 - r_1$. Сближение тел α зависит от величины внешней нагрузки и механических свойств соприкасающихся поверхностей [1].

Задача, в итоге, сводится к решению интегро-дифференциального уравнения типа Прандтля:

$$\int_{-tg\,\varphi_0}^{tg\,\varphi_0} \frac{g'(t)dt}{t-\bar{x}} + \frac{\chi_1 r_1 + \chi_2 r_2}{(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2)(1+\bar{x}^2)} g(\bar{x}) = -\frac{q\bar{x} + \gamma\, arctg\,\bar{x}}{1+\bar{x}^2}, \quad -tg\,\varphi_0 < \bar{x} < tg\,\varphi_0 \qquad (1)$$

где $\vartheta_1 = \dfrac{\lambda_1 + 2\mu_1}{4\pi\mu_1(\lambda_1+\mu_1)}$, $\vartheta_2 = \dfrac{\lambda_2 + 2\mu_2}{4\pi\mu_2(\lambda_2+\mu_2)}$, $\chi_1 = \dfrac{1}{4(\lambda_1+\mu_1)}$, $\chi_2 = \dfrac{1}{4(\lambda_2+\mu_2)}$ - параметры, зависящие от материалов контактирующих поверхностей, $\gamma = \dfrac{2\vartheta_2 r_2 q + r_2 - r_1}{2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2)}$, $\bar{x} = tg\,\varphi$, $q = \displaystyle\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi')d\varphi'$.

Искомое контактное давление определяется выражением:

$$p(\varphi)=\sec^2\varphi g'(tg\varphi) \tag{2}$$

Перепишем выражение (1) в виде:

$$\frac{g(x)}{B(x)}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g'(t)}{t-x}dt=f(x),\ -1<x<1, \tag{3}$$

где $x=\dfrac{\overline{x}}{tg\varphi_0}, t=\dfrac{\tau}{tg\varphi_0}$,

$$B(x)=\frac{(\vartheta_1 r_1+\vartheta_2 r_2)\left(1+(x\cdot tg\varphi_0)^2\right)}{-\pi(\chi_1 r_1+\chi_2 r_2)}, f(x)=-\frac{1}{\pi}\frac{q(x\cdot tg\varphi_0)+\gamma arctg(x\cdot tg\varphi_0)}{1+(x\cdot tg\varphi_0)^2}.$$

Будем считать, что $B(x)$ и $f(x)$ – удовлетворяют условию Гельдера на отрезке [-1,1] и что функция $B(x)$ нигде, за возможным исключением концов, в нуль не обращается, кроме того,

$$g(-1)=g(1)=0 \ . \tag{4}$$

Традиционным подходом решения данного уравнения является метод, предложенный И. Векуа или метод конечных разностей. Рассмотрим новый подход к приближенному решению уравнения (3), основанный на методе, предложенном И.Н. Мелешко [4]. Использование квадратурной формулы специального вида позволяет значительно упростить вычислительную схему этого метода.

Решение уравнения (3) можно представить в следующем виде:

$$g(x)=\sqrt{1-x^2}\sum_{-n}^{n}A_k(x)u_k \tag{5}$$

где

$$A_k(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\left(x_k+\frac{h}{2}-x\right)H\left(x,x_k+\frac{h}{2}\right)-\left(x_k-\frac{h}{2}-x\right)H\left(x,x_k-\frac{h}{2}\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{\pi}\left[\arcsin\left(x_k+\frac{h}{2}\right)-\arcsin\left(x_k-\frac{h}{2}\right)\right].$$

$$H(x,t)=\ln\frac{1-xt+\sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}}{|t-x|}.$$

Используя (5), находим искомое давление (2).

В качестве примера решения было рассмотрено тело с отверстием единичного радиуса $R=0.1$ *м* и цилиндр радиуса $r=0.099$ *м*. Материалом для тела и для цилиндра является сталь со следующими физическими характеристиками: модуль Юнга $E=2*10^{11}$ *Па*, коэффициент Пуассона $\upsilon=0,3$.

Расчет контактного давления производился в системе компьютерной алгебры Mathematica.

Вышеизложенное решение сравнивалось с численным решением в конечно-элементной системе ANSYS.

На рисунке 2 представлено распределение контактного давления $p(\varphi)$, полученное на основе решения И.Я. Штаермана с помощью вышеизложенного алгоритма и в системе ANSYS.

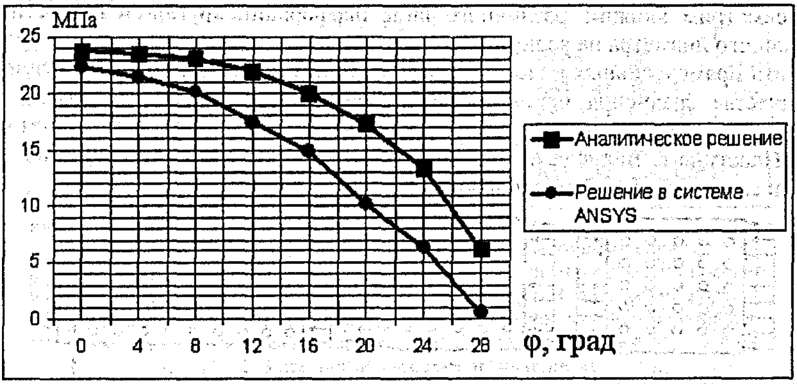

Рисунок 2 – Распределение давления $p(\varphi)$ в области контакта, полученное на основе предложенного численно-аналитического решения и в системе ANSYS

Сравнение результатов, полученных на основе построения приближенного решения (1) и с использованием конечно-элементного моделирования, показывают, что минимальное расхождение давления составляет около 10% в зоне наибольшего сближения тел. Далее наблюдается расхождение результатов.

В то же время отметим, что использование систем компьютерной математики (Mathematica, Mapple, MathCAD и др.) для решения такого рода задач значительно проще и не требует изучения таких громоздких систем, как ANSYS.

Моделирование данной задачи в системе ANSYS вызывает ряд затруднений, связанных с моделированием контактных пар контактирующих поверхностей, в частности контактной жесткости (Contact stiffness) и опций ее пересчета (update stiffness), необходимых для построения корректной конечно-элементной модели, учитывающей, например, выборку зазора при вхождении в контакт конечных элементов, изначально находящихся на определенном расстоянии друг от друга.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Штаерман, И.Я. Контактная задача теории упругости. – Л.: Гостехиздат, 1949. - 270 с.
2. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л.А. Галина. – М.: Наука, 1976. – 493 с.
3. Кравчук, А.С. Механика контактного взаимодействия тел с круговыми границами / А.С. Кравчук, А.В. Чигарев. – Минск: Технопринт, 2000. – 196 с.
4. Мелешко, И.М. К приближенному решению одного сингулярного интегро-дифференциального уравнения// Дифференц. уравнения. – 1989. – Т.25, № 5. – С. 888-897.