**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**Учреждение образования**
**«Брестский государственный технический университет»**

**Кафедра высшей математики**



# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации и варианты контрольной работы по разделам «Элементы линейной алгебры», «Основы аналитической геометрии», «Основы математического анализа» и «Основы дифференциального исчисления функции одной переменной» общего курса дисциплины «Высшая математика» для студентов экономических специальностей заочной формы обучения (сокращенной)

Брест 2010

**УДК 51(075.8)**

В настоящей методической разработке приведены варианты контрольных заданий по разделам «Элементы линейной алгебры», «Основы аналитической геометрии», «Основы математического анализа» и «Основы дифференциального исчисления функции одной переменной» общего курса дисциплины «Высшая математика» для студентов экономических специальностей заочной формы обучения (сокращенной). Даны методические рекомендации, полезные для успешного выполнения контрольной работы.

**Составители:** **Гладкий И.И.**, старший преподаватель,
**Дерачиц Н.А.**, ассистент
**Каримова Т.И.**, доцент, к.ф.-м.н.
**Махнист Л.П.** , доцент, к.т.н.

**Рецензент:** **Мирская Е.И.**, доцент кафедры информатики и прикладной математики учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н.

## Организационно-методические указания

В контрольную работу по разделам «Элементы линейной алгебры», «Основы аналитической геометрии», «Основы математического анализа» и «Основы дифференциального исчисления функции одной переменной» общего курса дисциплины «Высшая математика» включено шесть заданий. В нумерации задач первое число – номер задания (задачи), второе (после точки) – номер варианта.

Контрольная работа должна выполняться студентом в соответствии со своим вариантом. **Номер варианта определяется по двум последним цифрам шифра (номера зачетной книжки студента).**

**При выполнении контрольной работы условия задач нужно записывать полностью.** В случае, если задача имеет общую формулировку, ее условие следует переписывать, заменяя общие данные конкретными, соответствующими номеру варианта.

Решение всех задач приводить подробно и аккуратно, давать достаточные пояснения и делать необходимые рисунки и таблицы.

**В конце каждой задачи должен быть ответ.**

## Вопросы учебной программы

1. Определители второго и третьего порядков, их свойства и вычисление. Понятие определителя n-го порядка.
2. Матрицы и их виды. Линейные операции над матрицами. Произведение матриц.
3. Обратная матрица.
4. Системы линейных алгебраических уравнений, их матричная запись.
5. Элементарные преобразования матрицы. Понятие ранга матрицы. Метод Гаусса.
6. Решение невырожденных линейных систем по формулам Крамера и методом обратной матрицы.
7. Линейные модели в экономике (балансовая модель Леонтьева и модель международной торговли).
8. Векторы в трехмерном пространстве $R^3$. Линейные операции над векторами. Линейная зависимость векторов. Базис в $R^3$. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов в $R^3$.
9. Прямая на плоскости. Виды уравнений прямой на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
10. Предел функции в точке. Односторонние пределы. Свойства функций, имеющих предел в точке.
11. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства. Неопределенные выражения.

12. Первый и второй замечательные пределы.
13. Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке.
14. Точки разрыва функции и их классификация.
15. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
16. Производная функции, ее геометрический и экономический смысл. Производные основных элементарных функций.
17. Основные правила дифференцирования: производная суммы, произведения и частного, производная сложной функции.
18. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Приложения дифференциала.
19. Производные и дифференциалы высших порядков.
20. Основные теоремы дифференциального исчисления (формулировка и геометрическая интерпретация теорем Ферма, Ролля и Лагранжа).
21. Правило Лопиталя.
22. Исследование функции на монотонность с помощью производной.
23. Локальный экстремум функции одной переменной. Необходимое и достаточные условия.
24. Асимптоты графика функции.
25. Производная в экономике (предельные величины в экономике, эластичность).

## Задания контрольной работы

### Задание 1

В таблице представлены данные об использовании баланса за отчетный период (усл. ден. ед.).

| Отрасли производства | Потребляющие отрасли: межотраслевые потоки текущих затрат, $x_{ij}$ | | | Конечный продукт, $y_i$ | Валовый выпуск, $x_j$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | | |
| I | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $y_1$ | $x_1$ |
| II | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | $y_2$ | $x_2$ |
| III | $x_{31}$ | $x_{32}$ | $x_{33}$ | $y_3$ | $x_3$ |

Требуется:

1) найти матрицу прямых затрат, отвечающую вектору валового выпуска $X=(x_1,x_2,x_3)$;

2) найти матрицы полных и косвенных затрат;

3) рассчитать валовой выпуск $X^*=\left(x_1^*,x_2^*,x_3^*\right)$ на новый ассортимент

конечного продукта $Y^* = \left(y_1^*, y_2^*, y_3^*\right)$, если объем конечного продукта первой отрасли увеличивается на $\alpha\%$, второй отрасли уменьшается на $\beta\%$, а величина конечного продукта третьей отрасли не меняется.

Необходимые числовые данные для каждого варианта приведены в таблице 1:

Таблица 1

| | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | $x_{31}$ | $x_{32}$ | $x_{33}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $\alpha\%$ | $\beta\%$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1.01** | 17 | 21 | 13 | 12 | 15 | 14 | 21 | 30 | 20 | 110 | 100 | 100 | 59 | 59 | 29 | 1 | 2 |
| **1.02** | 13 | 13 | 5 | 5 | 10 | 4 | 4 | 20 | 7 | 60 | 100 | 80 | 29 | 81 | 49 | 3 | 5 |
| **1.03** | 14 | 23 | 50 | 10 | 15 | 30 | 13 | 40 | 10 | 90 | 100 | 100 | 3 | 45 | 37 | 2 | 4 |
| **1.04** | 27 | 14 | 23 | 30 | 16 | 15 | 21 | 15 | 12 | 110 | 100 | 80 | 46 | 39 | 32 | 5 | 3 |
| **1.05** | 23 | 7 | 14 | 15 | 16 | 17 | 21 | 8 | 5 | 60 | 80 | 50 | 16 | 32 | 16 | 4 | 5 |
| **1.06** | 24 | 16 | 50 | 34 | 17 | 10 | 18 | 31 | 15 | 110 | 80 | 110 | 20 | 19 | 46 | 2 | 6 |
| **1.07** | 45 | 23 | 51 | 18 | 13 | 14 | 21 | 17 | 15 | 130 | 80 | 100 | 11 | 35 | 47 | 8 | 7 |
| **1.08** | 21 | 45 | 45 | 60 | 14 | 43 | 12 | 17 | 60 | 130 | 130 | 150 | 19 | 13 | 61 | 12 | 15 |
| **1.09** | 61 | 45 | 30 | 70 | 40 | 10 | 10 | 40 | 15 | 230 | 200 | 100 | 94 | 80 | 35 | 3 | 8 |
| **1.10** | 35 | 8 | 11 | 6 | 9 | 12 | 7 | 10 | 13 | 60 | 40 | 50 | 6 | 13 | 20 | 10 | 6 |
| **1.11** | 10 | 13 | 21 | 17 | 9 | 8 | 15 | 14 | 13 | 50 | 50 | 60 | 6 | 16 | 18 | 12 | 5 |
| **1.12** | 16 | 14 | 25 | 4 | 7 | 14 | 15 | 13 | 25 | 70 | 50 | 80 | 15 | 25 | 27 | 5 | 10 |
| **1.13** | 10 | 13 | 17 | 14 | 12 | 4 | 16 | 25 | 19 | 100 | 80 | 80 | 60 | 50 | 20 | 3 | 4 |
| **1.14** | 15 | 13 | 12 | 11 | 5 | 4 | 18 | 6 | 7 | 50 | 50 | 40 | 10 | 30 | 9 | 4 | 8 |
| **1.15** | 110 | 150 | 60 | 90 | 70 | 100 | 45 | 25 | 40 | 400 | 300 | 250 | 80 | 40 | 140 | 6 | 2 |
| **1.16** | 21 | 15 | 14 | 70 | 8 | 16 | 3 | 17 | 21 | 210 | 100 | 60 | 160 | 6 | 19 | 3 | 10 |
| **1.17** | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 19 | 8 | 7 | 100 | 100 | 110 | 58 | 67 | 76 | 5 | 2 |
| **1.18** | 21 | 14 | 20 | 17 | 16 | 15 | 13 | 15 | 30 | 110 | 80 | 70 | 55 | 32 | 12 | 1 | 15 |
| **1.19** | 44 | 13 | 60 | 70 | 21 | 15 | 20 | 51 | 30 | 180 | 150 | 150 | 63 | 44 | 49 | 20 | 5 |
| **1.20** | 15 | 8 | 20 | 13 | 7 | 21 | 4 | 12 | 15 | 50 | 110 | 100 | 7 | 69 | 69 | 30 | 10 |
| **1.21** | 110 | 80 | 90 | 70 | 30 | 40 | 100 | 10 | 15 | 300 | 210 | 150 | 20 | 70 | 25 | 6 | 3 |
| **1.22** | 70 | 60 | 10 | 45 | 14 | 50 | 10 | 20 | 40 | 200 | 130 | 110 | 60 | 21 | 40 | 50 | 10 |
| **1.23** | 110 | 45 | 30 | 21 | 30 | 60 | 50 | 70 | 10 | 230 | 150 | 150 | 45 | 39 | 20 | 10 | 20 |
| **1.24** | 50 | 40 | 23 | 17 | 20 | 16 | 51 | 31 | 20 | 160 | 110 | 150 | 47 | 57 | 48 | 30 | 15 |
| **1.25** | 110 | 31 | 60 | 50 | 34 | 16 | 80 | 70 | 20 | 300 | 220 | 200 | 99 | 120 | 30 | 9 | 4 |
| **1.26** | 3 | 10 | 15 | 17 | 12 | 17 | 14 | 16 | 18 | 50 | 60 | 100 | 22 | 14 | 52 | 15 | 6 |
| **1.27** | 31 | 22 | 81 | 17 | 33 | 15 | 46 | 51 | 17 | 200 | 150 | 180 | 66 | 85 | 66 | 40 | 18 |
| **1.28** | 17 | 15 | 19 | 16 | 17 | 21 | 31 | 18 | 37 | 160 | 80 | 100 | 109 | 26 | 14 | 60 | 20 |
| **1.29** | 52 | 14 | 13 | 17 | 50 | 81 | 13 | 10 | 50 | 210 | 200 | 200 | 131 | 52 | 127 | 12 | 8 |
| **1.30** | 12 | 13 | 51 | 21 | 16 | 14 | 71 | 45 | 13 | 150 | 100 | 180 | 74 | 49 | 51 | 20 | 15 |

## Задание 2

Осуществляется сбалансированная бездефицитная торговля четырёх стран со структурной матрицей $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,4}$. Найти бюджеты стран при условии, что сумма бюджетов составляет $S$ условных единиц.

**2.01** $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$; $S = 22204$.

**2.02** $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$; $S = 16254$.

**2.03** $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}$; $S = 59480$.

**2.04** $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}$; $S = 89110$.

**2.05** $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$; $S = 49880$.

**2.06** $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$; $S = 93360$.

**2.07** $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$; $S = 50920$.

**2.08** $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}; \quad S = 47584.$

**2.09** $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}; \quad S = 52920.$

**2.10** $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}; \quad S = 40680.$

**2.11** $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}; \quad S = 58650.$

**2.12** $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}; \quad S = 40920.$

**2.13** $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}; \quad S = 63210.$

**2.14** $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}; \quad S = 55090.$

**2.15** $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}; \quad S = 58590.$

**2.16** $A=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3\end{pmatrix}$; $S=70290$.

**2.17** $A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3\end{pmatrix}$; $S=61530$.

**2.18** $A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3\end{pmatrix}$; $S=109710$.

**2.19** $A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3\\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2\end{pmatrix}$; $S=44360$.

**2.20** $A=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3\\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3\end{pmatrix}$; $S=4914$.

**2.21** $A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1\end{pmatrix}$; $S=81690$.

**2.22** $A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3\end{pmatrix}$; $S=106290$.

**2.23** $A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3\\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3\end{pmatrix}$; $S=40040$.

**2.24** $A=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3\end{pmatrix}$; $S=34529$.

**2.25** $A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3\end{pmatrix}$; $S=50568$.

**2.26** $A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3\\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3\\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3\end{pmatrix}$; $S=65826$.

**2.27** $A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3\\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3\end{pmatrix}$; $S=133080$.

**2.28** $A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3\end{pmatrix}$; $S=76930$.

**2.29** $A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3\end{pmatrix}$; $S=92316$.

**2.30** $A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3\end{pmatrix}$; $S=70770$.



### Задание 3

Даны координаты вершин треугольника $ABC$. Найти:

а) уравнение стороны $AB$;
б) уравнение медианы $AK$;
в) уравнение высоты $CH$;

г) расстояние от точки $C$ до прямой $AB$;
д) площадь треугольника $ABC$.

Необходимые числовые данные для каждого варианта приведены в таблице 2:

Таблица 2

| | **A** | **B** | **C** | | **A** | **B** | **C** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **3.01** | $(-2;4)$; | $(3;1)$; | $(5;8)$. | **3.02** | $(14;4)$; | $(-3;-2)$; | $(6;8)$. |
| **3.03** | $(10;-3)$; | $(-3;-1)$; | $(1;7)$. | **3.04** | $(3;1)$; | $(-3;-1)$; | $(5;-12)$. |
| **3.05** | $(4;3)$; | $(-3;-3)$; | $(2;7)$. | **3.06** | $(4;6)$; | $(-4;0)$; | $(-1;-4)$. |
| **3.07** | $(-6;-6)$; | $(-3;-1)$; | $(2;3)$. | **3.08** | $(-4;2)$; | $(3;-5)$; | $(5;0)$. |
| **3.09** | $(1;2)$; | $(3;7)$; | $(5;-13)$. | **3.10** | $(3;1)$; | $(5;4)$; | $(1;3)$. |
| **3.11** | $(2;-1)$; | $(4;5)$; | $(5;-13)$. | **3.12** | $(4;6)$; | $(-4;2)$; | $(1;-4)$. |
| **3.13** | $(-2;-2)$; | $(4;5)$; | $(7;7)$. | **3.14** | $(0;5)$; | $(2;2)$; | $(-4;-6)$. |
| **3.15** | $(-3;6)$; | $(3;4)$; | $(6;-3)$. | **3.16** | $(-6;2)$; | $(2;-2)$; | $(5;10)$. |
| **3.17** | $(-6;-3)$; | $(-4;3)$; | $(9;2)$. | **3.18** | $(-3;6)$; | $(3;-4)$; | $(6;3)$. |
| **3.19** | $(-4;2)$; | $(-2;-2)$; | $(6;8)$. | **3.20** | $(3;5)$; | $(6;-2)$; | $(-4;-1)$. |
| **3.21** | $(3;6)$; | $(1;-2)$; | $(-5;2)$. | **3.22** | $(-2;-1)$; | $(6;5)$; | $(1;3)$. |
| **3.23** | $(2;3)$; | $(4;-1)$; | $(-3;5)$. | **3.24** | $(3;5)$; | $(-1;3)$; | $(1;-3)$. |
| **3.25** | $(-2;4)$; | $(0;7)$; | $(1;-4)$. | **3.26** | $(-3;-1)$; | $(-4;-5)$; | $(8;1)$. |
| **3.27** | $(-4;6)$; | $(3;-8)$; | $(-7;-2)$. | **3.28** | $(10;2)$; | $(-3;1)$; | $(4;-5)$. |
| **3.29** | $(-7;3)$; | $(-7;-2)$; | $(5;-5)$. | **3.30** | $(-4;2)$; | $(4;10)$; | $(6;-4)$. |

## Задание 4

Найти пределы.

| | а) | б) | в) |
|---|---|---|---|
| **4.01** | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)(3x-2)}{x^2-4x+2}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^{x+3}$. |
| **4.02** | $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x+12}}{x^2+x-12}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+7x+2}{1-x+x^2}$; | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x-\cos 2x}{2x^2}$. |
| **4.03** | $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{x^2-4}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)(3x-2)}{x^2-4x+2}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{2x-1}$. |
| **4.04** | $\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}}\dfrac{4x^2-25}{2x^2-9x+10}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2-3}{x^3+x^2+4x+1}$; | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin x}{6x}$. |

| | а) | б) | в) |
|---|---|---|---|
| **4.05** | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^3}{2x^3+x-1}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{1-x}$. |
| **4.06** | $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3x-2}{x^2+x}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x-5}{3x^2-x+10}$; | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^2}$. |
| **4.07** | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{x+3}}{x^2+5x-6}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+x+1}{4+4x+x^2}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^{3x+1}$. |
| **4.08** | $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+x^2+2x}{x^3+x+3}$; | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{2x^2}$. |
| **4.09** | $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5x^2-24x-5}{(x-5)(7-x)}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-7x+3}{(2x+1)^2}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{4x+2}$. |
| **4.10** | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+2x}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+x^2-1}{4-x-x^2-x^3}$; | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}6x}{\sin 3x}$. |
| **4.11** | $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{3x^2+17x-6}{(x+6)(x+7)}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x+4}{8x^2+x+5}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x-4}\right)^{5x+1}$. |
| **4.12** | $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-8}{\sqrt{6-x}-\sqrt{2+x}}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+x+6x^2}{1-3x+3x^2}$; | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sin\frac{\pi}{2}x}{(1-x)^2}$. |
| **4.13** | $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{2x^2+15x+7}{(x+8)(x+7)}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+9}{3x^2-4x+1}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-1}\right)^{x+2}$. |
| **4.14** | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{6+3x}-\sqrt{10-x}}{x^2-3x+2}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x+2}{2x^2+7x+8}$; | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}x}{1-\cos^2 x}$. |
| **4.15** | $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{(x+3)(4-x)}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^2+x-2}{5x^2+3x+1}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$. |
| **4.16** | $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-5x-7}{\sqrt{3-x}-\sqrt{5+x}}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2+1}{2x^4+x^3+2}$; | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 2x}$. |
| **4.17** | $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{x-\frac{1}{2}}{2x^2+3x-2}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+5x^2+9}{2x^3+x+1}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{2x+3}$. |
| **4.18** | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}{2x^2-x-1}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-x+2}{2x^3+x+1}$; | $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}$. |
| **4.19** | $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{2\left(x^2+x\right)}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+2}\right)^{x}$. |

| | а) | б) | в) |
|---|---|---|---|
| **4.20** | $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-4}$; | $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{2x\,\mathrm{tg}\,2x}$. |
| **4.21** | $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{6x^2-x-1}{2x-1}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+x+3}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$. |
| **4.22** | $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x(x+2)}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+3x^4}{2+3x-x^4}$; | $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos6x}{1-\cos4x}$. |
| **4.23** | $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+7}{2x^2+2x+3}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x-5}$. |
| **4.24** | $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$; | $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin7x+\sin3x}{4x\cos2x}$. |
| **4.25** | $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x+4}{2x^3-4x^2+5}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$. |
| **4.26** | $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{10x^2+x-5}$; | $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x-\sin^2 x}{2x^2}$. |
| **4.27** | $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-2x^2+4x+1}{2x^2+5}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-6}{x+1}\right)^{4x-2}$. |
| **4.28** | $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-3x-x^2}{1+x+5x^2}$; | $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{4x^2}$. |
| **4.29** | $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{5x^2+4x-1}{3x^2+x-2}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-x^3+1}{x^4+x^2+x}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x}$. |
| **4.30** | $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{1-x}}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2-4x+5}{4+2x-3x^2}$; | $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}\,2x-\sin2x}{3x^2}$. |

## Задание 5

Найти производные следующих функций.

**5.01 а)** $y=3x^3-\sqrt[5]{x^2}+\dfrac{2}{x}+1$;

**б)** $y=\left(x^2-4\right)\cdot\mathrm{tg}^2\,3x$;

**в)** $y=\dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2-4x+2}}$.

**5.02 а)** $y=\dfrac{6}{x^3}+\dfrac{2}{x}-\sqrt[3]{x^2}+2$;

**б)** $y=\left(x^2+3x\right)\cdot\sin5x^2$;

**в)** $y=\dfrac{(x+4)^2}{e^{\mathrm{arctg}\,x}}$.

**5.03 а)** $y = 4x^2 - \dfrac{5}{x} + \sqrt[5]{x^3} + \dfrac{1}{x^3}$;

**б)** $y = \left(1 + 2x^2\right) \cdot \cos 3x^2$;

**в)** $y = \dfrac{e^{-\operatorname{ctg} 5x}}{\sqrt{3x^2 - x + 4}}$.

**5.04 а)** $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{2}{x} + \sqrt[6]{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

**б)** $y = \left(4 - x^2\right) \cdot \operatorname{tg} \sqrt{x}$;

**в)** $y = \dfrac{\sqrt{6x^2 + 3x - 1}}{e^{-\cos x}}$.

**5.05 а)** $y = 4 - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{7}{\sqrt[3]{x^2}}$;

**б)** $y = \left(x^2 - 3x + 1\right) \cdot \sin^2 2x$;

**в)** $y = \dfrac{e^{\operatorname{tg} 3x}}{\sqrt{3x^2 + x + 4}}$.

**5.06 а)** $y = 2x + \dfrac{3}{x^5} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{4}{x}$;

**б)** $y = \left(2x^2 - 5\right) \cdot \sin 3x^2$;

**в)** $y = \dfrac{e^{\cos 4x}}{(4 - x)^6}$.

**5.07 а)** $y = 2x^5 - \dfrac{4}{x^3} + \dfrac{6}{x} + 3\sqrt{x}$;

**б)** $y = \left(1 - 4x^2\right) \cdot \operatorname{tg} \sqrt[3]{x}$;

**в)** $y = \dfrac{\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 5}}{e^{-x}}$.

**5.08 а)** $y = x\sqrt[3]{x} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 3$;

**б)** $y = \left(3 + 7x^2\right) \cdot \cos(3x + 1)$;

**в)** $y = \dfrac{\sqrt{x^3 + 4x + 1}}{e^{x^2}}$.

**5.09 а)** $y = 3x^5 - \dfrac{2}{x\sqrt{x}} + \dfrac{7}{x^2} + 3$;

**б)** $y = \left(6 - 3x^2\right) \cdot \cos\left(2\sqrt{x} - 1\right)$;

**в)** $y = \dfrac{e^{-\operatorname{ctg} 3x}}{(2x + 7)^3}$.

**5.10 а)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}} + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2x^3} + \sqrt[7]{x^2}$;

**б)** $y = \left(1 - 3x^2\right) \cdot \operatorname{tg}^2 3x$;

**в)** $y = \dfrac{\sqrt{3 - x - 2x^2}}{e^{-x^3}}$.

**5.11 а)** $y = 8x^2 - x^2 \cdot \sqrt[3]{x} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^3}$;

**б)** $y = \left(3x^2 + 5\right) \cdot \operatorname{tg} 3x^2$;

**в)** $y = \dfrac{e^{-3x}}{\sqrt{3x^2 - 4x + 7}}$.

**5.12 а)** $y = x^3 - \dfrac{8}{x^2} + 3\sqrt{x} - \dfrac{1}{x}$;

**б)** $y = (2x - \sin 2x) \cdot \left(1 - 3x^3\right)^2$;

**в)** $y = \dfrac{e^{-\cos x^2}}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$.

**5.13 а)** $y = 4x^4 - \frac{7}{\sqrt[3]{x}} + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3}$;

**б)** $y = \left(1 + \cos^2 x\right) \cdot (1 + 4x)^2$;

**в)** $y = \frac{e^{-\sin 5x}}{\sqrt{x^2 + 2x}}$.

**5.14 а)** $y = 2\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x^2} + 3x$;

**б)** $y = \left(2 + \ln^2 x\right) \cdot \left(4 + 3x^2\right)$;

**в)** $y = \frac{e^{\operatorname{ctg} 7x}}{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}$.

**5.15 а)** $y = 2x + x^2\sqrt{x} - \frac{3}{x^4} + \frac{9}{x}$;

**б)** $y = \left(1 + \sqrt{x}\right) \cdot \ln\left(3x^2 + 2\right)$;

**в)** $y = \frac{(2x + 5)^3}{e^{\operatorname{tg} 3x}}$.

**5.16 а)** $y = 3x^3 - \frac{3}{x} + \sqrt[3]{x^5} + \frac{1}{x^4}$;

**б)** $y = \left(7x^2 + 14x\right) \cdot \operatorname{ctg}\sqrt{2x}$;

**в)** $y = \frac{e^{-\operatorname{tg} 5x}}{4x^2 - 3x + 5}$.

**5.17 а)** $y = \frac{1}{x} + x\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{x^2} + 3\sqrt{x}$;

**б)** $y = \left(6x^3 - 18x\right)\left(2 + 3\cos 3x\right)$;

**в)** $y = \frac{3x^2 - 5x + 10}{e^{-x^2}}$.

**5.18 а)** $y = 8x^3 - \frac{5}{x^4} + \frac{1}{x} + 2\sqrt[3]{x^5}$;

**б)** $y = \left(3x^3 + 9x\right) \cdot (x - \ln x)$;

**в)** $y = \frac{e^{-\sin 4x}}{(5 - 2x)^3}$.

**5.19 а)** $y = \frac{6}{x^3} - \frac{3}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 6x$;

**б)** $y = \left(1 - 2x^3\right)\left(tg^2 x + 2\right)$;

**в)** $y = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{2x^2 - x + 4}}$.

**5.20 а)** $y = x^3 - \frac{7}{\sqrt{x}} + 3x^2 \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{x}$;

**б)** $y = \left(1 + \ln\left(x^2 + 1\right)\right) \cdot \sin 5x$;

**в)** $y = \frac{(3x + 5)^3}{e^{4x+2}}$.

**5.21 а)** $y = \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}} + x\sqrt{x}$;

**б)** $y = \sqrt[3]{6x + 3} \cdot \cos^2 x$;

**в)** $y = \frac{5x^2 + 4x + 3}{e^{-x}}$.

**5.22 а)** $y = 2x^3 - \frac{8}{x^2} - \frac{3}{\sqrt{x}} + x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$;

**б)** $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 1} \cdot \ln(3x + 2)$;

**в)** $y = \frac{e^{-\sin 2x}}{(2x - 5)^3}$.

**5.23 а)** $y = 5 + 2\sqrt[6]{x} + \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{1}{x}$;

**б)** $y = e^{-2x}(1 + \cos 6x)$;

**в)** $y = \dfrac{\sqrt{5x^2 + 3x + 1}}{\ln(2x + 3)}$.

**5.24 а)** $y = 6x^3 - \dfrac{1}{x^3} + \sqrt{x^3} + \dfrac{3}{x}$;

**б)** $y = \sqrt[3]{3x + 2} \cdot \mathrm{ctg}\, 4x^2$;

**в)** $y = \dfrac{e^{\sin 5x}}{(3x - 2)^2}$.

**5.25 а)** $y = 2\sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}$;

**б)** $y = \mathrm{tg}\sqrt{x} \cdot (2x + 7)^3$;

**в)** $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 1}}{e^{-\cos 2x}}$.

**5.26 а)** $y = \dfrac{9}{x^3} - \dfrac{6}{x} - 5x^3 + 3x \cdot \sqrt[5]{x}$;

**б)** $y = \left(x^4 + 3x^2\right) \cdot e^{1-2x}$;

**в)** $y = \dfrac{\mathrm{tg}^2(3x + 1)}{\sqrt{x^2 + 4x}}$.

**5.27 а)** $y = 7x^3 + \dfrac{3}{x} - \sqrt[5]{x^4} + \dfrac{5}{x^3}$;

**б)** $y = \sqrt{x^2 + 3x + 4} \cdot \left(1 - \cos 3x^2\right)$;

**в)** $y = \dfrac{(3x + 6)^3}{e^{-\sin 6x}}$.

**5.28 а)** $y = 4x^2 + \dfrac{4}{x} + 4x^4\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

**б)** $y = \left(2 - 3x^2\right) \cdot \sqrt{1 + \sin 2x}$;

**в)** $y = \dfrac{e^{3+x^2}}{x^2 + 4x + 9}$.

**5.29 а)** $y = 6 - \dfrac{2}{x^4} + x^3 \cdot \sqrt{x} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$;

**б)** $y = \sqrt[3]{3x^2 - 6x} \cdot (1 + \sin 3x)$;

**в)** $y = \dfrac{e^{-\mathrm{tg}\, x^2}}{x^2 + 4x + 9}$.

**5.30 а)** $y = 10x^2 - \dfrac{3}{x^3} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}} + \sqrt[5]{x^4}$;

**б)** $y = \left(1 - x - 2x^2\right)(2 - 3\ln x)$;

**в)** $y = \dfrac{e^{-2\cos 3x}}{\sqrt{4 + 2x^2}}$.

## Задание 6

Зависимость между издержками производства $C$ и объемом выпускаемой продукции $q$ выражается функцией $C(q) = \alpha q - \beta q^3$ (ден. ед.).

Требуется:

а) найти непосредственно приращение издержек при изменении объема выпуска от величины $q_0$ до $q_0 + \Delta q$;

б) найти средние и предельные издержки при объеме выпуска, равном $q_0$;

в) с помощью дифференциала найти приращение издержек при изменении объема выпуска от $q_0$ до $q_0 + \Delta q$. Указать абсолютную и относительную погрешность замены приращения функции $C$ ее дифференциалом;

г) вычислить эластичность издержек при объеме выпуска $q_0$;

д) при каком объеме выпуска продукции издержки будут максимальными?

Необходимые числовые данные приведены в таблице 3.

Таблица 3

| | **6.01** | **6.02** | **6.03** | **6.04** | **6.05** | **6.06** | **6.07** | **6.08** | **6.09** | **6.10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 3375 | 1200 | 600 | 1875 | 900 | 1500 | 1800 | 2160 | 2940 | 1521 |
| $\beta$ | 0,05 | 0,01 | 0,02 | 0,04 | 0,03 | 0,03 | 0,06 | 0,05 | 0,05 | 0,03 |
| $q_0$ | 60 | 20 | 15 | 19 | 25 | 30 | 53 | 18 | 20 | 25 |
| $\Delta q$ | 0,1 | -0,2 | -0,2 | 0,15 | 0,12 | -0,14 | 0,08 | -0,15 | 0,21 | -0,01 |

| | **6.11** | **6.12** | **6.13** | **6.14** | **6.15** | **6.16** | **6.17** | **6.18** | **6.19** | **6.20** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 1452 | 1536 | 972 | 1344 | 1944 | 1176 | 2028 | 1734 | 1500 | 1350 |
| $\beta$ | 0,04 | 0,02 | 0,04 | 0,07 | 0,02 | 0,08 | 0,04 | 0,02 | 0,05 | 0,02 |
| $q_0$ | 37 | 30 | 44 | 28 | 23 | 53 | 19 | 24 | 30 | 29 |
| $\Delta q$ | -0,13 | 0,08 | -0,15 | 0,21 | -0,11 | 0,07 | 0,06 | -0,05 | 0,15 | 0,06 |

| | **6.21** | **6.22** | **6.23** | **6.24** | **6.25** | **6.26** | **6.27** | **6.28** | **6.29** | **6.30** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 1764 | 1296 | 1215 | 3042 | 2100 | 1875 | 2025 | 1083 | 3750 | 1536 |
| $\beta$ | 0,03 | 0,03 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,04 | 0,03 | 0,01 | 0,08 | 0,02 |
| $q_0$ | 45 | 36 | 41 | 30 | 28 | 42 | 33 | 50 | 37 | 24 |
| $\Delta q$ | -0,03 | 0,13 | 0,08 | -0,25 | 0,16 | -0,05 | -0,04 | 0,12 | 0,14 | -0,08 |

## Рекомендации для выполнения заданий

### Задание 1

В таблице представлены данные об использовании баланса за отчетный период (усл. ден. ед.).

| Отрасли производства | Потребляющие отрасли: межотраслевые потоки текущих затрат, $x_{ij}$ | | | Конечный продукт, $y_i$ | Валовый выпуск, $x_j$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | | |
| I | 30 | 30 | 20 | 120 | 200 |
| II | 40 | 45 | 20 | 45 | 150 |
| III | 32 | 18 | 40 | 160 | 250 |

Требуется:

1) найти матрицу прямых затрат, отвечающую вектору валового выпуска $X = (x_1, x_2, x_3)$;

2) найти матрицы полных и косвенных затрат;

3) рассчитать валовой выпуск $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ на новый ассортимент конечного продукта $Y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$, если объем конечного продукта первой отрасли увеличивается на $6\%$, второй отрасли уменьшается на $7\%$, а величина конечного продукта третьей отрасли не меняется.

**Решение**

Матричное уравнение межотраслевого баланса имеет вид

$$AX + Y = X; \quad AX + Y = EX; \quad EX - AX = Y; \quad (E - A)X = Y.$$

1) Выпишем матрицы, входящие в уравнение

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 250 \end{pmatrix}; \qquad Y = \begin{pmatrix} 120 \\ 45 \\ 160 \end{pmatrix}.$$

матрица $A$ – структурная матрица межотраслевого баланса. Элементы матрицы $A$ являются коэффициентами прямых затрат. Они определяются по формуле

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}.$$

В нашем случае будем иметь

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{30}{200} = 0{,}15; \quad a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{30}{150} = 0{,}20; \quad a_{13} = \frac{x_{13}}{x_3} = \frac{20}{250} = 0{,}08;$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{40}{200} = 0{,}20; \quad a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{45}{150} = 0{,}30; \quad a_{23} = \frac{x_{23}}{x_3} = \frac{20}{250} = 0{,}08;$$

$$a_{31} = \frac{x_{31}}{x_1} = \frac{32}{200} = 0{,}16; \quad a_{32} = \frac{x_{32}}{x_2} = \frac{18}{150} = 0{,}12; \quad a_{33} = \frac{x_{33}}{x_3} = \frac{40}{250} = 0{,}16.$$

Следовательно, структурная матрица примет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}20 & 0{,}08 \\ 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}08 \\ 0{,}16 & 0{,}12 & 0{,}16 \end{pmatrix}.$$

Матрица $A$ продуктивна, т.к. все ее элементы положительны и сумма ее элементов по любому столбцу и по любой строке меньше единицы.

Матрица $A$ – искомая матрица прямых затрат.

2) Решая уравнение $(E - A)X = Y$, получим, что

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y.$$

Найдем матрицу $(E-A)^{-1}$, которая называется матрицей полных затрат.

$$E-A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,15&0,20&0,08\\0,20&0,30&0,08\\0,16&0,12&0,16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,85&-0,20&-0,08\\-0,20&0,70&-0,08\\-0,16&-0,12&0,84\end{pmatrix}.$$

$$\det(E-A)=\begin{vmatrix}0,85&-0,20&-0,08\\-0,20&0,70&-0,08\\-0,16&-0,12&0,84\end{vmatrix}=0,85\cdot(0,70\cdot0,84-0,12\cdot0,08)-$$

$$-(-0,20)\cdot(-0,84\cdot0,20-0,16\cdot0,08)+(-0,08)\cdot(0,20\cdot0,12+0,16\cdot0,70)=$$
$$=0,85\cdot0,5784+0,20\cdot(-0,1808)-0,08\cdot0,1360=0,4446.$$

Так как $\det(E-A)\neq0$, то обратная матрица существует и единственна. Вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы $E-A$:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}0,70&-0,08\\-0,12&0,84\end{vmatrix}=0,70\cdot0,84-(-0,08)\cdot(-0,12)=0,5784;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}-0,20&-0,08\\-0,16&0,84\end{vmatrix}=-(-0,20\cdot0,84-(-0,08)\cdot(-0,16))=0,1808;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}-0,20&0,70\\-0,16&-0,12\end{vmatrix}=(-0,20)\cdot(-0,12)-0,70\cdot(-0,16)=0,1360;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-0,20&-0,08\\-0,12&0,84\end{vmatrix}=-(-0,20\cdot0,84-(-0,08)\cdot(-0,12))=0,1776;$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}0,85&-0,08\\-0,16&0,84\end{vmatrix}=0,85\cdot0,84-(-0,08)\cdot(-0,16)=0,7012;$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}0,85&-0,20\\-0,16&-0,12\end{vmatrix}=-(0,85\cdot(-0,12)-(-0,20)\cdot(-0,16))=0,1340;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-0,20&-0,08\\0,70&-0,08\end{vmatrix}=-0,20\cdot(-0,08)-0,70\cdot(-0,08)=0,0720;$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}0,85&-0,08\\-0,20&-0,08\end{vmatrix}=-(0,85\cdot(-0,08)-(-0,20)\cdot(-0,08))=0,0840;$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}0,85&-0,20\\-0,20&0,70\end{vmatrix}=0,85\cdot0,70-(-0,20)\cdot(-0,20)=0,5550.$$

$$(E-A)^{-1}=\frac{1}{0,4446}\begin{pmatrix}0,5784&0,1776&0,0720\\0,1808&0,7012&0,0840\\0,1360&0,1340&0,5550\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,3009&0,3995&0,1619\\0,4067&1,5771&0,1889\\0,3059&0,3014&1,2483\end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы $S=(E-A)^{-1}$ и являются коэффициентами полных затрат.

Матрица косвенных затрат равна:

$$S-A=\begin{pmatrix}1,3009 & 0,3995 & 0,1619\\ 0,4067 & 1,5771 & 0,1889\\ 0,3059 & 0,3014 & 1,2483\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,15 & 0,20 & 0,08\\ 0,20 & 0,30 & 0,08\\ 0,16 & 0,12 & 0,16\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1,1509 & 0,1995 & 0,0819\\ 0,2067 & 1,2771 & 0,1089\\ 0,1459 & 0,1814 & 1,0883\end{pmatrix}.$$

3) Предположим, что объем конечного продукта по первой отрасли увеличился на 6%, по второй – уменьшился на 7%, а по третьей – не изменился. Это значит, что новый конечный продукт будет определяться вектором $Y^*=\left(y_1^*,\, y_2^*,\, y_3^*\right)$, где

$$y_1^*=120\cdot\left(1+\frac{6}{100}\right)=120\cdot 1,06=127,2,$$

$$y_2^*=45\cdot\left(1-\frac{7}{100}\right)=45\cdot 0,93=41,85,$$

$$y_3^*=160.$$

Тогда необходимый объем валового выпуска по отраслям для вектора конечного продукта $Y^*=(127,2;\ 41,85;\ 160)$ будет равен:

$$X^*=S\cdot Y^*=\begin{pmatrix}1,3009 & 0,3995 & 0,1619\\ 0,4067 & 1,5771 & 0,1889\\ 0,3059 & 0,3014 & 1,2483\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}127,2\\ 41,85\\ 160\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}208,1085\\ 147,9599\\ 251,2530\end{pmatrix}.$$

Сравнивая компоненты векторов $X$ и $X^*$, приходим к заключению: если объемы конечного продукта по первой отрасли увеличить на 6%, по второй уменьшить на 7%, а по третьей не изменять, то валовой выпуск по первой отрасли увеличится на 4,05%, т.к.

$$\frac{x_1^*-x_1}{x_1}\cdot 100=\frac{208,1085-200}{200}\cdot 100=4,05\%.$$

Аналогично определяем, что валовой выпуск по второй отрасли уменьшится на 1,36%, а по третьей увеличится на 0,5%.

## Задание 2

Осуществляется сбалансированная бездефицитная торговля четырёх стран со структурной матрицей $A$:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты стран при условии, что сумма бюджетов составляет $S = 17289$ у.е.

## Решение

Пусть $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ – вектор бюджетов торгующих стран. Тогда по условию задачи

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17289 \qquad (*)$$

С другой стороны, вектор $X$ есть собственный вектор структурной матрицы $A$, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$ и удовлетворяющий уравнению

$$AX = X \qquad \text{или} \qquad (A - E) \cdot X = 0$$

или

$$\begin{pmatrix} -0,7 & 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & -0,8 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & -0,8 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 & -0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, координаты $x_1, x_2, x_3, x_4$ вектора $X$ являются ненулевыми решениями однородной линейной системы.

$$\begin{cases} -0,7x_1 + 0,5x_2 + 0,2x_3 + 0,3x_4 = 0, \\ 0,1x_1 - 0,8x_2 + 0,4x_3 + 0,1x_4 = 0, \\ 0,2x_1 + 0,2x_2 - 0,8x_3 + 0,3x_4 = 0, \\ 0,4x_1 + 0,1x_2 + 0,2x_3 - 0,7x_4 = 0. \end{cases}$$

Решим полученную систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -0,7 & 0,5 & 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & -0,8 & 0,4 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & -0,8 & 0,3 & 0 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 & -0,7 & 0 \end{array}\right) \sim^1 \left(\begin{array}{cccc|c} -7 & 5 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -8 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -8 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim^2$$

$$\sim \begin{pmatrix} -7 & 5 & 2 & 3 & \vert & 0 \\ 0 & -51 & 30 & 10 & \vert & 0 \\ 0 & 24 & -52 & 27 & \vert & 0 \\ 0 & 27 & 22 & -37 & \vert & 0 \end{pmatrix} \sim^3 \begin{pmatrix} -7 & 5 & 2 & 3 & \vert & 0 \\ 0 & -51 & 30 & 10 & \vert & 0 \\ 0 & 0 & -1932 & 1617 & \vert & 0 \\ 0 & 0 & 1932 & -1617 & \vert & 0 \end{pmatrix} \sim^4$$

$$\sim \begin{pmatrix} -7 & 5 & 2 & 3 & \vert & 0 \\ 0 & -51 & 30 & 10 & \vert & 0 \\ 0 & 0 & -1932 & 1617 & \vert & 0 \end{pmatrix} \sim^5 \begin{pmatrix} -7 & 5 & 2 & 3 & \vert & 0 \\ 0 & -51 & 30 & 10 & \vert & 0 \\ 0 & 0 & 92 & -77 & \vert & 0 \end{pmatrix}.$$

$\sim^1$)

а) элементы каждой строки были умножены на (10).

$\sim^2$)

а) элементы второй строки умножили на (7) и сложили с элементами первой строки;

б) сложили элементы третьей строки, умноженные на (7) с соответствующими элементами первой строки, умноженными на (2);

в) сложили элементы четвертой строки, умноженные на (7) с соответствующими элементами первой строки, умноженными на (4).

$\sim^3$)

а) сложили элементы третьей строки, умноженные на (51) с соответствующими элементами второй строки, умноженными на (24);

б) сложили элементы четвертой строки, умноженные на (51) с соответствующими элементами второй строки, умноженными на (27).

$\sim^4$)

а) сложили третью и четвертую строки;

б) отбросили нулевую строку.

$\sim^5$)

а) элементы третьей строки разделили на (21).

В результате получили матрицу трапециевидной формы.

Пусть переменные $x_1$, $x_2$, $x_3$ – базисные, а $x_4$ – свободная. При $x_4 = m \neq 0$, $m \in R$ последней полученной матрице соответствует система:

$$\begin{cases} -7x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -3m, \\ -51x_2 + 30x_3 = -10m, \\ 92x_3 = 77m. \end{cases}$$

Методом исключения находим:

$$x_3 = \frac{77}{92}m, \quad x_2 = \frac{3230}{4692}m, \quad x_1 = \frac{5440}{4692}m, \quad x_4 = m.$$

Подставляя значения $x_1, x_2, x_3$ и $x_4$ в условие (*), получаем

$$\frac{5440}{4692}m+\frac{3230}{4692}m+\frac{77}{92}m+m=\frac{17289}{4692}m=17289.$$

Откуда находим, что

$$m=4692.$$

Тогда

$$x_1=5440,\quad x_2=3230,\quad x_3=3927,\quad x_4=4692.$$

Окончательно имеем искомый вектор бюджета

$$X=\left(5440;\quad 3230;\quad 3927;\quad 4692\right).$$

*Ответ.* $X=\left(5440;\quad 3230;\quad 3927;\quad 4692\right)$.

## Задание 3

Даны координаты вершин треугольника $ABC$: $A(1;2)$, $B(2;5)$ и $C(-6;-3)$. Найти:

а) уравнение стороны $AB$;
б) уравнение медианы $AK$;
в) уравнение высоты $CH$;
г) расстояние от точки $C$ до прямой $AB$;
д) площадь треугольника $ABC$.

## Решение

а) Уравнение стороны $AB$ запишем по формуле

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}.$$

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-2}{5-2};\quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{3};\quad 3\left(x-1\right)=y-2;\quad y=3x-1.$$

Угловой коэффициент прямой $AB$ равен $k_{AB}=3$.

Общее уравнение прямой $AB$: $3x-y-1=0$.

б) Находим координаты точки $K$ – середины стороны $BC$:

$$x_K=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{2-6}{2}=-2,$$

$$y_K=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{5-3}{2}=1,$$

$$K\left(-2;1\right).$$

Уравнение медианы АК:

$$\frac{x-x_A}{x_M-x_A}=\frac{y-y_A}{y_M-y_A};$$

$$\frac{x-1}{-2-1}=\frac{y-1}{1-2};\quad \frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{-1};\quad x-1=3(y-2);\ x-3y+5=0;$$

Общее уравнение медианы АК: $x-3y+5=0$.

в) Угловой коэффициент прямой $AB$ равен $k_{AB} = 3$. Тогда угловой коэффициент прямой СН находим из равенства

$$k_{AB} \cdot k_{CH} = -1,$$

т.е.

$$k_{CH} = -\frac{1}{3}.$$

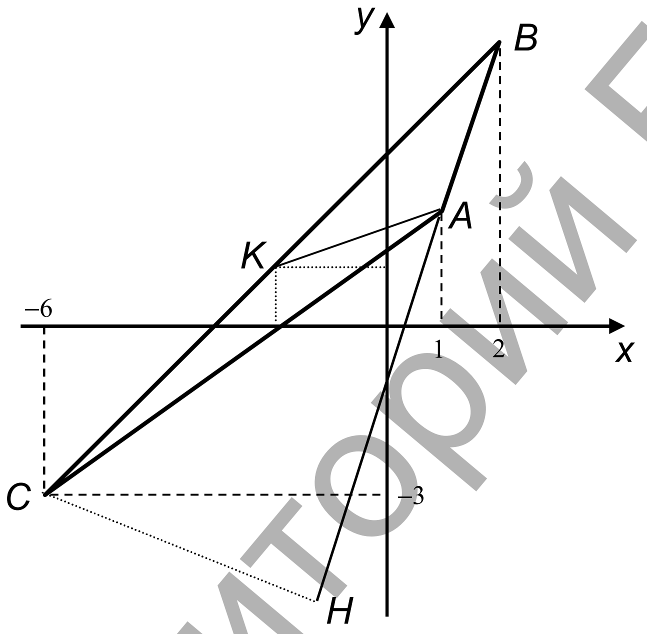
Уравнение прямой $CH$:

$$y - y_C = k_{CH}(x - x_C);$$

$$y + 3 = -\frac{1}{3}(x + 6); \quad 3y + x + 15 = 0.$$

Общее уравнение высоты $CH$: $3y + x + 15 = 0$.

Проиллюстрируем решение:




г) Расстояние точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $l$: $Ax + By + C = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

В нашем случае расстояние от точки $C(-6; -3)$ до прямой АВ: $3x - y - 1 = 0$ равно:

$$|CH| = \frac{|3 \cdot (-6) - 1 \cdot (-3) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{16}{\sqrt{10}} = \frac{8}{5}\sqrt{10}.$$

д) Площадь треугольника АВС равна:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CH|.$$

Так как $|AB| = \sqrt{(2-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{10}$, то

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{16}{\sqrt{10}}=8\,(\textit{кв.ед.})$$

*Ответ.* а) $AB: 3x-y-1=0$; б) $AK: x-3y+5=0$;

в) $CH: 3y+x+15=0$; г) $|CH|=\frac{8}{5}\sqrt{10}$;

д) $S_{\Delta ABC}=8\,(\textit{кв.ед.})$.

## Задание 4

Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+7}{4x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{5x-6}}{x^2-6x+8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}7x}{8x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$.

## Решение

а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+7}{4x^2-x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1+0+0}{4-0+0}=\frac{1}{4}=0{,}25.$$

á) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{5x-6}}{x^2-6x+8}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{5x-6})\cdot(\sqrt{2+x}+\sqrt{5x-6})}{(x-2)\cdot(x-4)\cdot(\sqrt{2+x}+\sqrt{5x-6})}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2+x-5x+6}{(x-2)\cdot(x-4)\cdot(\sqrt{2+x}+\sqrt{5x-6})}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-4(x-2)}{(x-2)\cdot(x-4)\cdot(\sqrt{2+x}+\sqrt{5x-6})}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-4}{(x-4)\cdot(\sqrt{2+x}+\sqrt{5x-6})}=\frac{-4}{(2-4)\cdot(\sqrt{2+2}+\sqrt{5\cdot 2-6})}=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

в) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}7x}{8x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{8x\cdot\cos 7x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\frac{7}{8\cdot\cos 7x}\right)=1\cdot\frac{7}{8\cdot 1}=0{,}875.$$

ã) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+1+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2}{x-1}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{x}}}=e^{\frac{2}{1-0}}=e^2.$$

*Ответ.* а) 0,25; б) 0,5; в) 0.875; г) $e^2$.

## Задание 5

Найти производные следующих функций:

а) $y=\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{2}{x}+2002;$  б) $y=(19x^2+6x)\cdot\cos 3x;$  в) $y=\dfrac{e^{4x+7}}{x+\ln x-1}.$

## Решение

а) $y=\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{2}{x}+2002;$

$$y'=\left(x^{\frac{2}{3}}+2\cdot x^{-1}+2002\right)'=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'+2\left(x^{-1}\right)'+\left(2002\right)'=$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}+2\cdot(-1)\cdot x^{-1-1}+0=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-2x^{-2}=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}-\frac{2}{x^2}.$$

б) $y=\left(19x^2+6x\right)\cdot\cos 3x;$

$$y'=\left(19x^2+6x\right)'\cdot\cos 3x+\left(19x^2+6x\right)\cdot\left(\cos 3x\right)'=$$

$$=\left(19\cdot 2x+6\right)\cdot\cos 3x-\left(19x^2+6x\right)\cdot\sin 3x\cdot\left(3x\right)'=$$

$$=\left(38x+6\right)\cdot\cos 3x-\left(19x^2+6x\right)\cdot\sin 3x\cdot 3=$$

$$=\left(38x+6\right)\cdot\cos 3x-\left(57x^2+18x\right)\cdot\sin 3x;$$

в) $y=\dfrac{e^{4x+7}}{x+\ln x-1};$

$$y'=\left(\frac{e^{4x+7}}{x+\ln x-1}\right)'=\frac{\left(e^{4x+7}\right)'\cdot\left(x+\ln x-1\right)-e^{4x+7}\cdot\left(x+\ln x-1\right)'}{\left(x+\ln x-1\right)^2}=$$

$$=\frac{e^{4x+7}\cdot\left(4x+7\right)'\cdot\left(x+\ln x-1\right)-e^{4x+7}\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}-0\right)}{\left(x+\ln x-1\right)^2}=$$

$$=\frac{e^{4x+7}\cdot 4\cdot\left(x+\ln x-1\right)-e^{4x+7}\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\left(x+\ln x-1\right)^2}=\frac{4e^{4x+7}\left(x+\ln x-1\right)-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{4x+7}}{\left(x+\ln x-1\right)^2}.$$

*Ответ.* а) $y'=\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}-\dfrac{2}{x^2}$; б) $y'=\left(38x+6\right)\cos 3x-\left(57x^2+18x\right)\sin 3x$;

в) $y'=\dfrac{4e^{4x+7}\left(x+\ln x-1\right)-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{4x+7}}{\left(x+\ln x-1\right)^2}.$

## Задание 6

Зависимость между издержками производства $C$ и объемом выпускаемой продукции $q$ выражается функцией

$$C(q) = 2400q - 0{,}02q^3 \ (\textit{ден. ед.}).$$

Требуется:

а) найти непосредственно приращение издержек при изменении объема выпуска от величины $q_0 = 50$ до $q_0 + \Delta q = 50 - 0{,}15 = 49{,}85$;

б) найти средние и предельные издержки при объеме выпуска, равном 50;

в) с помощью дифференциала найти приращение издержек при изменении объема выпуска от 50 до 49,85. Указать абсолютную и относительную погрешность замены приращения функции $C(q)$ ее дифференциалом;

г) вычислить эластичность издержек при объеме выпуска 50;

д) при каком объеме выпуска продукции издержки будут максимальными?

### Решение

а) Издержки производства определяются функцией

$$C = 2400q - 0{,}02q^3.$$

Приращение издержек $\Delta C$ при изменении объема выпуска от 50 до 49,85 единиц составит

$$\Delta C = C(q_0 + \Delta q) - C(q_0) = C(49{,}85) - C(50) =$$

$$= 2400 \cdot 49{,}85 - 0{,}02 \cdot (49{,}85)^3 - \left(2400 \cdot 50 - 0{,}02 \cdot 50^3\right) \approx$$

$$\approx 119640 - 2477{,}5674 - 120000 + 2500 = 122140 - 122477{,}5674 =$$

$$= -337{,}5674.$$

Значит, при уменьшении объема выпуска с 50 до 49,85 единиц издержки уменьшатся на 337,5674 *ден.ед*.

б) Находим средние и предельные издержки:

$$\overline{C} = AC = \frac{C(q)}{q} = 2400 - 0{,}02q^2,$$

$$MC = C'(q) = 2400 - 0{,}06q^2.$$

При $q_0 = 50$ получим

$$AC(50) = 2400 - 0{,}02 \cdot 50^2 = 2400 - 50 = 2350(\textit{ден.ед.}),$$

$$MC(50) = 2400 - 0{,}06 \cdot 50^2 = 2400 - 150 = 2250(\textit{ден.ед.}).$$

Отсюда следует, что при средних издержках на производство единицы продукции равных 2350 *ден.ед*., дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции составят 2250 *ден.ед.*

в) Дифференциал функции $C(q)$ равен

$$dC = MC \cdot \Delta q = (2400 - 0{,}06q^2) \cdot \Delta q .$$

Заменяя приращение функции $\Delta C$ ее дифференциалом $dC$, получим

$$\Delta C \approx d\,C = (2400 - 0{,}06q^2) \cdot \Delta q .$$

Если $q_0 = 50$, а $\Delta q = -0{,}15$, то

$$\Delta C \approx \left(2400 - 0{,}06 \cdot 50^2\right) \cdot \left(-0{,}15\right) = 2250 \cdot \left(-0{,}15\right) = -337{,}5\,\textit{ден.ед.}$$

Абсолютная погрешность замены:

$$\left|\Delta C - d\,C\right| = \left|-337{,}5674 - (-337{,}5)\right| = 0{,}0674 .$$

Относительная погрешность замены:

$$\left|\frac{\Delta C - dC}{\Delta C}\right| = \left|\frac{-337{,}5674 - (-337{,}5)}{-337{,}5674}\right| = 0{,}0002 \text{ или } 0{,}02\% .$$

г) Эластичность издержек:

$$E_q(C) = q \cdot \frac{C'(q)}{C(q)} = q \cdot \frac{2400 - 0{,}06q^2}{2400q - 0{,}02q^3} = \frac{2400 - 0{,}06q^2}{2400 - 0{,}02q^2} .$$

При объеме выпуска $q_0 = 50$ эластичность издержек равна:

$$E_{50}(C) = \frac{2400 - 0{,}06 \cdot 50^2}{2400 - 0{,}02 \cdot 50^2} = \frac{2250}{2350} = 0{,}96 .$$

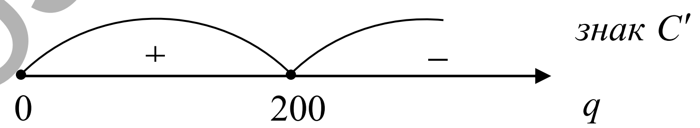
Следовательно, при данном объеме выпуска продукции в 50 единиц его увеличение на 1% приведет к увеличению издержек на 0,96%.

д) Найдем стационарную точку функции $C(q)$ из условия $MC = 0$:

$$2400 - 0{,}06q^2 = 0 ,$$

$$q_1 = -200 \text{ и } q_2 = 200 .$$

Так как $q \ge 0$, то значение $q_1$ следует отбросить.




В окрестности точки $q = 200$ производная $C'(q)$ меняет знак с плюса на минус. Значит, в точке $q = 200$ функция издержек принимает максимальное значение, равное

$$C_{\max} = 2400 \cdot 200 - 0{,}02 \cdot 200^3 = 320000\,\textit{ден.ед.}$$

Окончательно, при объеме выпуска продукции, равном 200 единицам, издержки будут максимальны и составят 320000 *ден.ед*.

## Рекомендуемая литература

1 Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пос.: в 2-х ч. Ч. 1 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко. – 7-е изд., испр. – Москва: Оникс: Мир и образование, 2009. – 368 с.

2 Высшая математика для экономистов: практикум / под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: ЮНИТИ, 2010. – 479 с.

3 Жевняк, Р.М. Общий курс высшей математики: Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук, А.И. Марченко, В.Т. Унукович – Орша: Оршанская типография, 1996. – 320 с.

4 Индивидуальные задания по высшей математике: учеб. пос.: в 4-х ч. Ч. 1: Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / Под общ. ред. А.П. Рябушко. – 4-е изд. – Минск : Высшая школа, 2008. – 304 с.

5 Красс, М.С. Математика для экономистов: учеб. пос. / М.С. Красс; Б.П. Чупрынов. – Санкт-Петербург: Питер, 2009. – 464 с.

6 Кузнецов, А.В. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Общий курс: Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов / А.В. Кузнецов, Д.С. Кузнецова, Е.И. Шилкина и др. – Мн: Выш. шк., 1994. – 284 с.

7 Минюк, С.А. Высшая математика для экономистов: учеб. пос. / С.А. Минюк. – 2-е изд. испр. – Мн, 2007. – 512 с.

8 Сборник задач по высшей математике для экономистов: уч. пос. / Под ред. В.И. Ермакова. – 2-е изд. – М., 2008. – 575 с.

9 Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: 36 лекций. Ч. 1 / Д.Т. Письменный. – 3-е изд. – М., 2004. – 288 с.

10 Солодовников, А.С. Математика в экономике. В двух частях / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браимов, И.Г. Шандра. – М.: Финансы и статистика, 2001.

11 Яблонский, А.И. Высшая математика: Общий курс: Учебник для студентов экономических специальностей вузов / А.И. Яблонский, А.В. Кузнецов, Е.И. Шилкина и др. – 2-е изд., перераб. – Мн: Выш. шк., 2000. – 351 с.

## Содержание

Учебное издание

**Составители:** **Гладкий Иван Иванович**
**Дерачиц Наталья Александровна**
**Каримова Татьяна Ивановна**
**Махнист Леонид Петрович**

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации и варианты контрольной работы по разделам «Элементы линейной алгебры», «Основы аналитической геометрии», «Основы математического анализа» и «Основы дифференциального исчисления функции одной переменной» общего курса дисциплины «Высшая математика» для студентов экономических специальностей заочной формы обучения (сокращенной)

Ответственный за выпуск: Гладкий И.И.
Редактор: Строкач Т.В.
Корректор: Никитчик Е.В.

---

Подписано в печать 7.07.2010. Формат 60х84 1/16. Бумага «Снегурочка».
Усл. п. л. 1,86. Уч. изд. л. 2,0. Заказ № 736. Тираж 150 экз.
Отпечатано на ризографе Учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267