Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»

Кафедра высшей математики

Элементы линейной алгебры, аналитической геометрии и математического анализа

Методические указания по дисциплине
«Высшая математика»
для студентов технических специальностей

Брест 2005

УДК 519.2 (076)

Разработка содержит методические материалы по разделам курса «Высшая математика», изучаемые в первом семестре студентами технических специальностей. В нее включены вопросы учебной программы, тексты аттестационных работ по темам «Линейная алгебра», «Аналитическая геометрия» и «Математический анализ», а также рекомендации к решению задач этих аттестационных работ. Методические указания помогут студентам успешно выполнить и защитить аттестационные работы и подготовиться к сдаче экзамена.

Составители

Гладкий И.И., *старший преподаватель,*
Маньяков Н.В., *старший преподаватель.*

Рецензент

Чичурин А.В., *к.ф.-м.н., доцент, зав. кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений БрГУ им. А.С. Пушкина*

Вопросы учебной программы за первый семестр

1. Матрицы. Операции над матрицами.
2. Определители. Свойства определителей.
3. Обратная матрица.
4. Ранг матрицы. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений. Теореме Кронекера−Капелли.
5. Матричный метод и метод Крамера решения систем линейных алгебраических уравнений.
6. Системы линейных однородных уравнений.
7. Векторы и операции над ними.
8. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис.
9. Декартова система координат. Координаты вектора. Условие коллинеарности векторов.
10. Скалярное произведение векторов.
11. Векторное и смешанное произведение векторов.
12. Радиус-вектор. Полярная система координат.
13. Линейный оператор. Матрица линейного оператора.
14. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.
15. Прямая на плоскости.
16. Кривые второго порядка. Их характеристики.
17. Плоскость.
18. Прямая в пространстве. Взаимное расположение двух прямых.
19. Взаимное расположение прямой и плоскости.
20. Поверхности второго порядка.
21. Понятие функции одной переменной. Элементарные функции. Алгебраические функции.
22. Предел числовой последовательности. Свойства сходящихся последовательностей.
23. Число е.
24. Предел функции в бесконечности. Предел функции в точке. Свойства функций, имеющих предел.
25. Первый замечательный предел.
26. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства.
27. Эквивалентные бесконечно малые функции.
28. Непрерывность функции. Точки разрыва.
29. Свойства функций непрерывных в точке и непрерывных на отрезке.
30. Производная функции. Её геометрический и механический смыслы.
31. Вывод производных элементарных функций.
32. Производная обратной функции.
33. Производная неявной функции. Логарифмическая производная.
34. Дифференцируемость функции.
35. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Инвариантность формы дифференциала.

36. Производные и дифференциалы высших порядков.
37. Дифференцирование параметрически заданной функции.
38. Теорема Ферма. Теорема Ролля.
39. Теорема Коши. Теорема Лагранжа.
40. Правило Лопиталя.
41. Формулы Тейлора с остаточными членами в форме Пеано и Лагранжа.
42. Разложение по формуле Тейлора функций e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^a$.
43. Условие монотонности функции.
44. Необходимое и достаточное условие экстремума.
45. Выпуклость функции.
46. Точки перегиба. Необходимое и достаточное условие существования точки перегиба.
47. Асимптоты к графику функции.
48. Вектор-функция скалярного аргумента. Касательная и нормальная плоскость к годографу. Кривизна кривой.
49. Функция нескольких переменных. Предел функции нескольких переменных.
50. Непрерывность функции двух переменных. Свойства непрерывных на множестве функций.
51. Частные производные. Их геометрический смысл.
52. Дифференцируемость функции. Необходимые условия дифференцируемости функции.
53. Достаточное условие дифференцируемости функции. Дифференциал функции двух переменных.
54. Дифференцирование сложной функции.
55. Дифференцирование неявной функции. Производные и дифференциалы высших порядков.
56. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
57. Локальный экстремум функции двух переменных. Необходимое и достаточное условие.
58. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.
59. Метод наименьших квадратов.

Задания к аттестационной работе по темам «Линейная алгебра» и «Аналитическая геометрия»

Задание 1. Решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

различными способами: по формулам Крамера, методом Гаусса, матричным методом.

Вариант	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3
1.	1	2	1	2	− 3	1	3	1	3	3	2	4
2.	2	3	5	1	− 5	− 2	3	6	4	11	5	3
3.	1	2	− 1	2	1	1	1	1	1	2	7	6
4.	1	2	3	1	4	− 2	4	5	− 3	19	0	− 8
5.	1	2	− 1	2	− 1	1	3	− 5	2	7	2	− 7
6.	2	− 3	6	1	5	− 1	3	7	10	17	− 6	16
7.	1	2	3	2	1	−2	3	3	2	1	3	10
8.	7	3	2	3	1	2	5	6	4	1	2	2
9.	1	− 2	3	2	1	− 5	4	3	1	− 1	9	7
10.	1	2	− 1	2	− 1	1	3	− 5	2	7	2	− 7
11.	1	1	1	1	− 1	2	2	3	− 1	− 2	− 7	1
12.	1	− 2	2	− 3	8	−10	4	− 3	1	5	−25	1
13.	1	2	1	3	− 5	3	2	7	1	4	1	8
14.	1	1	− 1	4	− 3	1	2	1	− 1	− 2	1	1
15.	2	− 1	5	5	2	13	3	− 1	5	4	2	0
16.	3	1	1	1	− 4	− 2	− 3	5	6	21	−16	41
17.	5	8	− 1	7	2	− 3	2	9	1	2	3	1
18.	3	4	2	2	− 4	− 3	1	5	1	8	− 1	0
19.	1	2	4	5	1	2	3	− 1	1	31	20	9
20.	7	− 5	0	4	0	11	2	3	4	31	−43	−20
21.	1	− 4	− 2	3	1	1	3	− 5	− 6	− 3	5	− 9
22.	1	1	− 1	8	3	− 6	4	1	− 3	1	2	3
23.	3	4	2	2	− 1	− 3	1	5	1	8	− 4	0
24.	2	− 1	− 1	3	4	− 2	3	− 2	4	4	11	11
25.	1	1	2	2	− 1	2	4	1	4	− 1	− 4	− 2
26.	4	− 3	2	2	5	− 3	5	6	− 2	9	4	18
27.	1	− 2	3	2	3	− 4	3	− 2	− 5	6	20	6
28.	3	2	1	2	3	1	2	1	3	5	1	11
29.	− 3	5	6	3	1	1	1	− 4	− 2	− 8	− 4	− 3
30.	3	− 1	1	5	1	2	1	2	4	−11	8	16

Задание 2. Выяснить, является ли линейным преобразование f, переводящее любой вектор $\vec{x}$ в вектор $\vec{y}$, заданный координатами в том же базисе, что и вектор $\vec{x}$. В случае утвердительного ответа найти собственные векторы этого преобразования.

Вариант		$\vec{x}$	$\vec{y}$
1.	**а)**	(α_1,α_2),	$(-4\alpha_1-\alpha_2;3\alpha_1-8\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,	$(4\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3;-\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3;\alpha_1-2\alpha_2+2\alpha_3)$.
2.	**а)**	(α_1,α_2),	$(\alpha_1-3\alpha_2;4\alpha_1-7\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,	$(2\alpha_1-\alpha_2;-\alpha_1+2\alpha_2;\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)$.
3.	**а)**	(α_1,α_2),	$(2\alpha_1-3\alpha_2;4\alpha_1-5\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,	$(3\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3;2\alpha_2-\alpha_3;-\alpha_2+2\alpha_3)$.
4.	**а)**	(α_1,α_2),	$(2\alpha_1+\alpha_2;\alpha_1+2\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,	$(5\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3;4\alpha_2-\alpha_3;-\alpha_2+4\alpha_3)$.
5.	**а)**	(α_1,α_2),	$(2\alpha_1+2\alpha_2;\alpha_1+3\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,	$(6\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3;-\alpha_1+5\alpha_2-\alpha_3;\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3)$.
6.	**а)**	(α_1,α_2),	$(4\alpha_1+\alpha_2;3\alpha_1+2\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,	$(3\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3;2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3;-2\alpha_1+\alpha_2+4\alpha_3)$.
7.	**а)**	(α_1,α_2),	$(3\alpha_1+2\alpha_2;\alpha_1+4\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,	$(2\alpha_1-\alpha_3;\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3;-\alpha_1+2\alpha_3)$.
8.	**а)**	(α_1,α_2),	$(3\alpha_1+2\alpha_2;4\alpha_1+\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,	$(2\alpha_1+\alpha_2;\alpha_1+2\alpha_2;-\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3)$.
9.	**а)**	(α_1,α_2),	$(4\alpha_1+8\alpha_2;3\alpha_1+2\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,	$(4\alpha_1+\alpha_2;\alpha_1+4\alpha_2;-\alpha_1+\alpha_2+5\alpha_3)$.
10.	**а)**	(α_1,α_2),	$(3\alpha_1+6\alpha_2;2\alpha_1+7\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,	$(3\alpha_1+\alpha_2;2\alpha_1+2\alpha_2;2\alpha_1+\alpha_2+4\alpha_3)$.
11.	**а)**	(α_1,α_2),	$(2\alpha_1+3\alpha_2;5\alpha_1+4\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,	$(5\alpha_1-4\alpha_2+4\alpha_3;2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3;2\alpha_1+3\alpha_3)$.

Вариант		$\vec{x}$	$\vec{y}$
12.	**а)**	(α_1,α_2),	$(2\alpha_1-2\alpha_2;-9\alpha_1-\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,	$(3\alpha_1-2\alpha_2+2\alpha_3;2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3;2\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3)$.
13.	**а)**	(α_1,α_2),	$(5\alpha_1+3\alpha_2;\alpha_1+3\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,	$(3\alpha_1-2\alpha_2+2\alpha_3;3\alpha_2;2\alpha_2+\alpha_3)$.
14.	**а)**	(α_1,α_2),	$(4\alpha_1+3\alpha_2;5\alpha_1+2\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,	$(5\alpha_1-2\alpha_2+2\alpha_3;5\alpha_2;2\alpha_2+3\alpha_3)$.
15.	**а)**	(α_1,α_2),	$(5\alpha_1+\alpha_2;8\alpha_1-2\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,	$(7\alpha_1-4\alpha_2+4\alpha_3;2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3;2\alpha_1+5\alpha_3)$.
16.	**а)**	(α_1,α_2),	$(-2\alpha_1-7\alpha_2;-3\alpha_1+2\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,	$(7\alpha_1-6\alpha_2+6\alpha_3;4\alpha_1-\alpha_2+4\alpha_3;4\alpha_1-2\alpha_2+5\alpha_3)$.
17.	**а)**	(α_1,α_2),	$(5\alpha_1+6\alpha_2;3\alpha_1+2\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,	$(7\alpha_1-6\alpha_2+6\alpha_3;2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3;2\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3)$.
18.	**а)**	(α_1,α_2),	$(3\alpha_1+2\alpha_2;9\alpha_1-4\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,	$(13\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3;6\alpha_1+9\alpha_2-6\alpha_3;2\alpha_1-2\alpha_2+5\alpha_3)$.
19.	**а)**	(α_1,α_2),	$(\alpha_1+3\alpha_2;8\alpha_1+6\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,	$(3\alpha_1;2\alpha_1+3\alpha_2-2\alpha_3;\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3)$.
20.	**а)**	(α_1,α_2),	$(9\alpha_1+3\alpha_2;2\alpha_1+4\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,	$(2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3;\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3;\alpha_3)$.
21.	**а)**	(α_1,α_2),	$(4\alpha_1+7\alpha_2;5\alpha_1+2\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,	$(3\alpha_1;\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3;\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3)$.
22.	**а)**	(α_1,α_2),	$(3\alpha_1+2\alpha_2;6\alpha_1-\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,	$(5\alpha_1;\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3;\alpha_1-\alpha_2+4\alpha_3)$.
23.	**а)**	(α_1,α_2),	$(6\alpha_1+9\alpha_2;\alpha_1-2\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,	$(3\alpha_1+\alpha_3;2\alpha_1+2\alpha_2;-3\alpha_3)$.
24.	**а)**	(α_1,α_2),	$(9\alpha_1+4\alpha_2;3\alpha_1-2\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,	$(7\alpha_1-4\alpha_2-2\alpha_3;-2\alpha_1+5\alpha_2-2\alpha_3;9\alpha_3)$.

Вариант		$\vec{x}$	$\vec{y}$
25.	**а)**	(α_1, α_2),	$(5\alpha_1 + 7\alpha_2; 4\alpha_1 - 7\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,	$(4\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_3; \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3; \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3)$.
26.	**а)**	(α_1, α_2),	$(8\alpha_1 + 3\alpha_2; 2\alpha_1 + 3\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,	$(\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3; 2\alpha_1 + 5\alpha_2 - 2\alpha_3; 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 5\alpha_3)$.
27.	**а)**	(α_1, α_2),	$(3\alpha_1 + 2\alpha_2; \alpha_1 + 2\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,	$(3\alpha_1; 2\alpha_1 + 7\alpha_2 - 4\alpha_3; 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 5\alpha_3)$.
28.	**а)**	(α_1, α_2),	$(4\alpha_1 + 5\alpha_2; 3\alpha_1 + 2\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,	$(7\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3; 4\alpha_1 + 5\alpha_2 - 2\alpha_3; \alpha_3)$.
29.	**а)**	(α_1, α_2),	$(3\alpha_1 + 2\alpha_2; 4\alpha_1 + 5\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,	$(5\alpha_1; \alpha_1 + 13\alpha_2 - 4\alpha_3; 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 11\alpha_3)$.
30.	**а)**	(α_1, α_2),	$(6\alpha_1 + 7\alpha_2; 9\alpha_1 + 8\alpha_2)$;
	б)	$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,	$(5\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\alpha_3; \alpha_2; -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 7\alpha_3)$.

Задание 3. По координатам точек A, B, C и D для векторов $\vec{a} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CB} - 3\overrightarrow{AD}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}$ найти:

1. модуль $\vec{a}$;
2. проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{c}$;
3. проверить, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{d}$ неколлинеарные и найти угол между ними;
4. найти площадь параллелограмма построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{d}$;
5. показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарные и найти объём параллелепипеда, построенного на этих векторах;
6. разложить вектор $\vec{d}$ по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Вариант	A	B	C	D
1.	(−3, 3, 4)	(1, 2, 3)	(4, 5, −7)	(1, 1, 0)
2.	(1, 2, 3)	(0, −2, 4)	(1, 5, 0)	(2, 2, 0)
3.	(−5, 3, −2)	(0, 4, 2)	C(6, 2, −3)	(3, 3, 0)
4.	(−4, 2, 3)	(0, 2, 1)	(−3, 2, 4)	(4, 4, 0)
5.	(2, 0, 0)	(−2, 3, 4)	(−5, 2, 4)	(5, 5, 0)
6.	(4, −5, 2)	(−2, 3, 2)	(−1, 0, 5)	(6, 6, 0)
7.	(0, −5, 3)	(−4, −2, 0)	(3, 4, 0)	(7, 7, 0)

Вариант	*A*	*B*	*C*	*D*
8.	(−2, −4, −1)	(7, −2, 5)	(−2, 0, 3)	(8, 8, 0)
9.	(3, 4, −1)	(7, 0, 2)	(−2, −1, 4)	(9, 9, 0)
10.	(3, −6, 2)	(1, 0, −3)	(3, 5, 0)	(1, 1, 0)
11.	(4, −2, −1)	(−3, −7, −1)	(6, −2, 4)	(2, 2, 0)
12.	(−3, 4, 5)	(6, 1, −4)	(0, −3, 2)	(3, 3, 0)
13.	(−2, 3, 0)	(1, 2, 4)	(2, −4, 5)	(4, 4, 0)
14.	(2, −4, 5)	(2, 3, −4)	(2, 3, −1)	(5, 5, 0)
15.	(0, 2, 4)	(2, −3, 4)	(5, 2, 0)	(6, 6, 0)
16.	(4, 5, −1)	(2, 4, −3)	(2, −7, 3)	(4, 4, 0)
17.	(5, 6, −5)	(2, 4, 0)	(1, −3, −2)	(5, 5, 0)
18.	(−3, −1, −5)	(4, 5, −3)	(4, −2, 1)	(6, 6, 0)
19.	(−2, 3, 1)	(−4, −1, 2)	(−3, −6, −3)	(1, 1, 0)
20.	(2, −4, 1)	(0, 3, 4)	(3, −2, −2)	(2, 2, 0)
21.	(−1, 2, 3)	(5, −2, 1)	(6, 7, −1)	(3, 3, 0)
22.	(2, −3, 6)	(1, 4, −2)	(0, 3, 4)	(4, 4, 0)
23.	(2, −3, −2)	(−2, 3, 4)	(3, 1, 0)	(5, 5, 0)
24.	(3, 2, 2)	(−4, 3, 3)	(4, 1, 3)	(6, 6, 0)
25.	(2, 3, −4)	(4, 2, 2)	(1, 2, 1)	(1, 1, 0)
26.	(3, 4, 4)	(1, 2, 2)	(0, 1, 6)	(2, 2, 0)
27.	(2, −4, 4)	(5, 0, −2)	(−1, −1, 2)	(3, 3, 0)
28.	(2, 3, 1)	(2, −2, 3)	(−3, −5, 3)	(1, 1, 0)
29.	(3, 4, 1)	(−2, −3, −4)	(−2, 0, 6)	(2, 2, 0)
30.	(−3, 2, 3)	(1, 0, 6)	(−5, 4, 5)	(3, 3, 0)

Задание 4. Треугольник ABC задан координатами своих вершин. Найти:
а) уравнение стороны AB;
б) точку пересечения высоты CH и медианы BM;
в) уравнение прямой проходящей через точку C параллельно стороне AB;
г) расстояние от точки B до прямой AC;
д) площадь треугольника ABC.

Вариант	A	B	C
1.	(2; 5)	(1; −3)	(4; 0)
3.	(7; 2)	(1; 3)	(0; −4)
5.	(1; −3)	(3; 1)	(2; −6)
7.	(3; −2)	(1; 0)	(8; 6)
9.	(−1; 1)	(−4; 5)	(−8; 2)
11.	(7; −1)	(1; 3)	(0; 5)
13.	(5; 1)	(4; −2)	(1; −3)
15.	(6; −3)	(−1; 4)	(7; 0)
17.	(1; 4)	(3; −1)	(2; 5)
19.	(1; 5)	(−1; 7)	(2; −3)

Вариант	A	B	C
2.	(2; 7)	(0; 6)	(−2; 4)
4.	(−3; −1)	(0; 2)	(4; −5)
6.	(4; −1)	(−2; 5)	(8; 0)
8.	(4; 7)	(−2; 3)	(−6; 0)
10.	(2; 6)	(0; −4)	(6; 10)
12.	(−4; 0)	(−1; 4)	(3; 1)
14.	(3; 5)	(−2; 4)	(1; −1)
16.	(3; 9)	(−1; 4)	(0; −12)
18.	(−5; 2)	(3; 4)	(1; 0)
20.	(−2; 1)	(−4; 3)	(0; 5)

Вариант	A	B	C	Вариант	A	B	C
21.	(0; −4)	(8; 2)	(6; 4)	**22.**	(3; −1)	(5; −2)	(4; 1)
23.	(2; 1)	(−1; 0)	(3; 2)	**24.**	(−4; 0)	(1; 3)	(−2; 4).
25.	(2; −8)	(4; 0)	(−5; −1)	**26.**	(3; 2)	(−1; 8)	(0; −5)
27.	(1; 0)	(−2; 4)	(8; −1)	**28.**	(−3; −5)	(0; 2)	(3; −1)
29.	(0; −2)	(3; 2)	(4; 1)	**30.**	(2; −1)	(6; −4)	(4; 1)

Задание 5. Заданы четыре точки A_1, A_2, A_3 и A_4. Выполнить следующие задания:

1) составить уравнение плоскости проходящей через точки A_1, A_2 и A_3;
2) составить уравнение прямой, которой принадлежат точки A_1 и A_2;
3) составить уравнение прямой перпендикулярной плоскости из пункта 1), которая проходит через точку A_4;
4) составить уравнение прямой, которой принадлежит точка A_3 и которая параллельна прямой из пункта 2);
5) составить уравнение плоскости, которая проходит через точку A_4 и перпендикулярна прямой из пункта 2);
6) вычислить синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;
7) вычислить косинус угла между координатной плоскостью xOy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

Вариант	A_1	A_2	A_3	A_4
1.	(3, 1, 4)	(−1, 6, 1)	(−1, 1, 6)	(0, 4, −1)
2.	(3, −1, 2)	(−1, 0, 1)	(1, 7, 3)	(8, 5, 8)
3.	(3, 5, 4)	(5, 8, 3)	(1, 2, −2)	(−1, 0, 2)
4.	(2, 4, 3)	(1, 1, 5)	(4, 9, 3)	(3, 6, 7)
5.	(9, 5, 5)	(−3, 7, 1)	(5, 7, 8)	(6, 9, 2)
6.	(0, 7, 1)	(2, −1, 5)	(1, 6, 3)	(3, −9, 8)
7.	(5, 5, 4)	(1, −1, 4)	(3, 5, 1)	(5, 8, −1)
8.	(6, 1, 1)	(4, 6, 6)	(4, 2, 0)	(1, 2, 6)
9.	(7, 5, 3)	(9, 4, 4)	(4, 5, 7)	(7, 9, 6)
10.	(6, 8, 2)	(5, 4, 7)	(2, 4, 7)	(7, 3, 7)
11.	(4, 2, 5)	(0, 7, 1)	(0, 2, 7)	(1, 5, 0)
12.	(4, 4, 10)	(7, 10, 2)	(2, 8, 4)	(9, 6, 9)
13.	(4, 6, 5)	(6, 9, 4)	(2, 10, 10)	(7, 5, 9)
14.	(3, 5, 4)	(8, 7, 4)	(5, 10, 4)	(4, 7, 8)
15.	(10, 9, 6)	(2, 8, 2)	(9, 8, 9)	(7, 10, 3)
16.	(1, 8, 2)	(5, 2, 6)	(5, 7, 4)	(4, 10, 9)
17.	(6, 6, 5)	(4, 9, 5)	(4, 6, 11)	(6, 9, 3)

Вариант	A_1	A_2	A_3	A_4
18.	(7, 2, 2)	(−5, 7, −7)	(5, −3, 1)	(2, 3, 7)
19.	(8, −6, 4)	(10, 5, −5)	(5, 6, −8)	(8, 10, 7)
20.	(1, −1, 3)	(6, 5, 8)	(3, 5, 8)	(8, 4, 1)
21.	(1, −2, 7)	(4, 2, 10)	(2, 3, 5)	(5, 3, 7)
22.	(4, 2, 10)	(1, 2, 0)	(3, 5, 7)	(2, −3, 5)
23.	(2, 3, 5)	(5, 3, −7)	(1, 2, 7)	(4, 2, 0)
24.	(5, 3, 7)	(−2, 3, 5)	(4, 2, 10)	(1, 2, 7)
25.	(4, 3, 5)	(1, 9, 7)	(0, 2, 0)	(5, 3, 10)
26.	(3, 2, 5)	(4, 0, 6)	(2, 6, 5)	(6, 4, −1)
27.	(2, 1, 6)	(1, 4, 9)	(2, −5, 8)	(5, 4, 2)
28.	(2, 1, 7)	(3, 3, 6)	(2, −3, 9)	(1, 2, 5)
29.	(2, −1, 7)	(6, 3, 1)	(3, 2, 8)	(2, −3, 7)
30.	(0, 4, 5)	(3, −2, 1)	(4, 5, 6)	(3, 3, 2)

Задание 6.

1. Доказать параллельность прямых: $\frac{x-1}{6}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}$ и $\begin{cases} x-2y+2z-8=0; \\ x-6z-6=0. \end{cases}$

2. Доказать, что прямая $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$ параллельна плоскости $2x+y-z=0$, а прямая $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{3}$ лежит в этой плоскости.

3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *M(1, −3, 3)* и образующей с осями координат углы, соответственно равные 60^0, 45^0 и 120^0.

4. Доказать, что прямая $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-6}$ перпендикулярна прямой $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0 \\ 4x-y-5z+4=0 \end{cases}$.

5. Составить параметрическое уравнение медианы треугольника с вершинами *A(3, 6, −7)*, *B(−5, 1, −4)*, *C(0, 2, 3)*, проведённой из вершины *C*.

6. При каком значении параметра n прямая $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{n}=\frac{z}{1}$ параллельна прямой $\begin{cases} x+y-z=0; \\ x-y-5z-8=0. \end{cases}$

7. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ и плоскости $2x+3y+z-1=0$.

8. Найти проекцию точки *P(3, 1, −1)* на плоскость $x+2y+3z-30=0$.

9. При каком значении *C* плоскости $3x-5y+Cz-3=0$ и $x+3y+2z+5=0$ перпендикулярны.

10. При каком значении *A* плоскость $Ax+3y-5z+1=0$ Ax+3y-5z+1=0 параллельна прямой $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$.

11. При каких значениях *m* и *C* прямая $\frac{x-2}{m}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна к плоскости $3x-2y+Cz+1=0$?

12. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат параллельно прямой $\begin{cases} x=2t+5; \\ y=-3t+1; \\ z=-7t-4. \end{cases}$

13. Проверить, лежат ли на одной прямой точки *A(0, 0, 2)*, *B(4, 2, 5)* и *C(12, 6, 11)*.

14. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *M(2, −5, 3)* параллельно прямой $\begin{cases} 2x-y+3z-1=0; \\ 5x+4y-z-7=0. \end{cases}$

15. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *M(2, −3, 4)* перпендикулярно к прямым $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{1}$ и $\frac{x+4}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{-3}$.

16. При каких значениях *A* и *B* плоскость $Ax+By+6z-7=0$ перпендикулярна к прямой $\frac{x-2}{2}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z+1}{3}$.

17. Показать, что прямая $\frac{x}{6}=\frac{y-3}{-8}=\frac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x+3y-2z+1=0$, а прямая $\begin{cases} x=t+7; \\ y=t-2; \\ z=2t+1 \end{cases}$ лежит в этой плоскости.

18. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось *Oz* и точку *K(−3, 1, −2)*.

19. Показать, что прямые $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ и $\begin{cases}3x+y-5z+1=0;\\ 2x+3y-8z+3=0\end{cases}$ перпендикулярны.

20. При каком значении *D* прямая $\begin{cases}3x-y+2z-6=0;\\ x+4y-z+D=0\end{cases}$ пересекает ось *Oz*?

21. При каком значении *p* прямые $\begin{cases}x=2t+5;\\ y=-t+2;\\ z=pt-7\end{cases}$ и $\begin{cases}x+3y+x+2=0;\\ x-y-3z-2=0\end{cases}$ параллельны?

22. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-7}{5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{4}$ и плоскости $3x-y+2z-8=0$.

23. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку *K(2, −5, 3)* параллельно плоскости *xOz*.

24. Составить общие уравнение прямой, образованной пересечением плоскости $x+2y-z+5=0$ с плоскостью, проходящей через ось *Oy* и точку *M(5, 3, 2)*.

25. При каких значениях *B* и *D* прямая $\begin{cases}x-2y+z-9=0;\\ 3x+By+z+D=0\end{cases}$ лежит в плоскости *xOy*?

26. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0\,(2, 3, 3)$ параллельно двум векторам $\vec{a}=(-1,-3,1)$ и $\vec{b}=(4,1,6)$.

27. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *E(3, 4, 5)* параллельно оси *Ox*.

28. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *M(2, 3, 1)* перпендикулярно к прямой $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$.

29. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку M(1, −5, 3) перпендикулярно к прямым $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-1}$ и $\begin{cases}x=3t+1;\\ y=-t-5;\\ z=2t+3.\end{cases}$

30. Найти точку, симметричную точке *M(4, 3, 10)* относительно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$.

Задание 7. Построить кривую, заданную уравнением в полярной системе координат.

Вариант		**Вариант**	
1.	$r = a\lvert\sin\varphi\rvert$;	**16.**	$r = a\lvert\cos\varphi\rvert$;
2.	$r = 3a\cos 4\varphi$;	**17.**	$r = a\sin 4\varphi$;
3.	$r^2 = a^2\sin 2\varphi$;	**18.**	$r^2 = a^2\cos 2\varphi$;
4.	$r = 2a\cos 3\varphi$;	**19.**	$r = 2a\sin 3\varphi$;
5.	$r = 3(1-\cos\varphi)$;	**20.**	$r = 4(1-\sin\varphi)$;
6.	$r = \dfrac{3}{\sin\varphi}$;	**21.**	$r = \dfrac{1}{2+\cos\varphi}$;
7.	$r = 2+\cos\varphi$;	**22.**	$r = 1+\cos\varphi$;
8.	$r = 2\cos\varphi$;	**23.**	$r = 3\sin\varphi$;
9.	$r = \dfrac{10}{2+\cos\varphi}$;	**24.**	$r = \dfrac{2}{2+\sin\varphi}$
10.	$r = 2(1+\sin\varphi)$;	**25.**	$r = 2a(1+\cos\varphi)$;
11.	$r = 3a\sin 2\varphi$;	**26.**	$r = 3a\cos 2\varphi$;
12.	$r = \dfrac{1}{2\sin\varphi}$;	**27.**	$r = \dfrac{1}{\cos\varphi}$;
13.	$r = 2\lvert\sin\varphi\rvert$;	**28.**	$r = 2\lvert\cos\varphi\rvert$;
14.	$r = \dfrac{2}{2-3\cos\varphi}$;	**29.**	$r = \dfrac{1}{2+2\cos\varphi}$;
15.	$r = 2+\sin\varphi$;	**30.**	$r = a\varphi$.

Задание 8. Исследовать кривую второго порядка и построить ее график:

Вариант	**а)**	**б)**
1.	$4x^2+18y^2-16x+36y-38=0$;	$-x^2-y^2+4xy+2x-4y+1=0$.
2.	$x^2-3y^2+10x+24y-26=0$;	$2x^2+2y^2-2xy-2x-2y+1=0$.
3.	$x=-6-2\sqrt{y+4}$;	$4xy+4x-4y=0$.
4.	$5x^2+3y^2-20x+18y+2=0$;	$-2x^2-2y^2+2xy-6x+6y+3=0$.
5.	$y=7+3\sqrt{x+5}$;	$-3x^2-3y^2+4xy-6x+4y+2=0$.
6.	$x=-2+\sqrt{-5-6y-y^2}$;	$-2xy-2x-2y+1=0$.
7.	$9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$;	$-x^2-y^2-4xy-4x-2y+2=0$.
8.	$5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$;	$-4x^2-4y^2+2xy+10x-10y+1=0$.

Вариант	а)	б)
9.	$x=-4+3\sqrt{y+5}$;	$4xy+4x-4y-2=0$.
10.	$4x^2+3y^2-8x+12y-20=0$;	$x^2+y^2+2xy-8x-8y+1=0$.
11.	$x=-5+\frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}$;	$x^2-y^2+4xy+2x-4y+1=0$.
12.	$6x^2+7y^2-12x+28y-8=0$;	$x^2+y^2-2xy-2x+2y-7=0$.
13.	$y=-\frac{1}{6}x^2+2x-7$;	$2xy+2x+2y-3=0$.
14.	$16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$;	$4x^2+4y^2+2xy+12x+12y+1=0$.
15.	$y=-1+\frac{2}{3}\sqrt{x^2-4x-5}$;	$3x^2+3y^2+4xy+8x+12y+1=0$.
16.	$16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$;	$x^2+y^2-8xy-20x+20y+1=0$.
17.	$y=-7+\frac{2}{3}\sqrt{16+6x-x^2}$;	$3x^2+3y^2-2xy-6x+2y+1=0$.
18.	$x=9-2\sqrt{y^2+4y+8}$;	$4xy+4x+4y+1=0$.
19.	$x=-2-\sqrt{6-2y}$;	$3x^2+3y^2-4xy+6x-4y-7=0$.
20.	$16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$;	$-4xy-4x+4y+6=0$.
21.	$y=1-\frac{4}{3}\sqrt{-6x-x^2}$;	$5x^2+5y^2-2xy+10x-2y+1=0$.
22.	$y=-5+\sqrt{-3x-21}$;	$2x^2+2y^2+4xy+8x+8y+1=0$.
23.	$2x^2+5y^2+8x-10y-17=0$;	$-x^2-y^2+2xy+2x-2y+1=0$.
24.	$5x^2-2y^2+10x+8y-13=0$;	$2x^2+2y^2-4xy-8x-8y+1=0$.
25.	$7x^2+6y^2+28x-12y-50=0$;	$3x^2+3y^2+2xy-12x-4y+1=0$.
26.	$x=-y^2+2y-1$;	$-4xy+8x+8y+1=0$.
27.	$y=4x^2-8x+7$;	$2x^2+2y^2-2xy+6x-6y-6=0$.
28.	$y=3-4\sqrt{x-1}$;	$x^2+y^2+4xy+4x+2y-5=0$.
29.	$y=7-\frac{3}{2}\sqrt{x^2-6x+13}$;	$4xy+4x-4y+4=0$.
30.	$x=-5+\sqrt{40-6y-y^2}$;	$3x^2+3y^2-4xy+4x+4y+1=0$.

Задание 9. Изобразить тело, ограниченное указанными поверхностями:

1. $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 2$, $x = 0$, $y = 0$.

2. $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 2 - x^2 - y^2$.

3. $4(x^2 + y^2) = z^2$, $4(x^2 + y^2) = 1$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

4. $z = 2x^2 + 3y^2$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

5. $y^2 + z^2 = 2x$, $y^2 + z^2 = 4$.

6. $4(x^2 + y^2) = z^2$, $4(x^2 + y^2) = 4$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

7. $4(x^2 + y^2) = z^2$, $z = 0$, $y = x$, $y = 4x$, $x = 2$, $z > 0$.

8. $x^2 + y^2 = 4z^2$, $z = 0$, $y = x$, $y = 8x$, $z > 0$, $x = 2$.

9. $z = x^2 + y^2$, $y = 3x$, $x = 2$, $y = 0$, $z = 0$.

10. $z = 16x^2 + y^2$, $y = 2x$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 1$.

11. $y^2 + 3z^2 = 6$, $3x^2 - 25y^2 = 75$, $z \ge 0$.

12. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 \le 4$, $x \ge 0$.

13. $z = 3y^2$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$.

14. $2y^2 + z^2 = 4$, $3x^2 - 8y^2 = 48$, $z \ge 0$.

15. $y^2 + 4y^2 = 8$, $16x^2 - 49y^2 = 784$, $z \ge 0$.

16. $z = 3y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$.

17. $z = 5y$, $x^2 + y^2 = 16$, $z \ge 0$.

18. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 + y^2 \le 1$, $x \ge 0$.

19. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = z^2$, $x \ge 0$, $z \ge 0$.

20. $8(x^2 + y^2) = z^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

21. $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $y = 2x$, $y = 4x$, $x = 3$, $z > 0$.

22. $2z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 3$, $x = 0$, $y = 0$.

23. $z = x^2 + 3y^2$, $z = 0$, $y = x$, $y = 0$, $x = 1$.

24. $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = x^2 + 5y^2$, $z = 0$.

25. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 + z^2 = y^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

26. $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = 3x^2 + 2y^2$, $z = 0$.

27. $z = 2x^2 + y^2$, $y = 2x$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 2$.

28. $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

29. $4(x^2 + y^2) = z^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

30. $x^2 + y^2 = 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Рекомендации к решению задач аттестационной работы по темам «Линейная алгебра» и «Аналитическая геометрия»

Задание 1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_4 = 19 \\ 2x_1 + \qquad 3x_3 = 11 \end{cases}$$

различными способами: по формулам Крамера, методом Гаусса, матричным методом.

Решение

Введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ − матрица системы,}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ − столбец переменных, } B = \begin{pmatrix} 5 \\ 19 \\ 11 \end{pmatrix} \text{ − столбец свободных членов.}$$

Тогда исходную систему можно записать в матричной форме $A \cdot X = B$.

Найдем определитель матрицы системы используя правило Саррюса (треугольника):

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \left(2 \cdot 5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 \cdot (-1)\right) -$$

$$-\left(2 \cdot 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \cdot (-3)\right) = (30 + 24 + 0) - (-10 + 0 - 27) = 54 + 37 = 91.$$

Т.к. определитель матрицы системы отличен от нуля, то система линейных алгебраических уравнений является невырожденной, а значит, имеет единственное решение.

1.) Найдем решение системы по формулам Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\det A}.$$

Для этого вычислим определители Δ_{x_i} матриц, получаемых из матрицы системы заменой столбца с коэффициентами при переменной x_i столбцом свободных членов. Имеем:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 19 & 5 & 4 \\ 11 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \left(5 \cdot 5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 11 + 19 \cdot 0 \cdot (-1)\right) -$$

$$-\left(11 \cdot 5 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 \cdot 0 + 3 \cdot 19 \cdot 3\right) = (75 + 132 + 0) - (-55 + 0 + 171) = 207 - 116 = 91;$$

Аналогично находим Δ_{x_2} и Δ_{x_3}:

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}2&5&-1\\-3&19&4\\2&11&3\end{vmatrix}=182\,;\;\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}2&3&5\\-3&5&19\\2&0&11\end{vmatrix}=273\,.$$

Следовательно, получаем:

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\det A}=\frac{91}{91}=1\,,\;x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\det A}=\frac{182}{91}=2\,,\;x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\det A}=\frac{273}{91}=3\,.$$

2.) Найдем решение системы матричным методом:

$$X=A^{-1}\cdot B\,.$$

Для невырожденной матрицы A обратная находится по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}^T,$$

где A_{ij} − алгебраическое дополнение к элементу матрицы A, стоящему в i-ой строке j-ом столбце, вычисляемое по формуле $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$. При этом M_{ij} − минор, вычисляемый как определитель матрицы, полученной из данной матрицы A, вычеркиванием i-ой строки и j-ого столбца.

Находим

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}5&4\\0&3\end{vmatrix}=15,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-3&4\\2&3\end{vmatrix}=17\,,\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-3&5\\2&0\end{vmatrix}=-10,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}3&-1\\0&3\end{vmatrix}=-9,\;A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}2&-1\\2&3\end{vmatrix}=8\,,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}2&3\\2&0\end{vmatrix}=6\,,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}3&-1\\5&4\end{vmatrix}=17,\;A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}2&-1\\-3&4\end{vmatrix}=-5\,,\;A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2&3\\-3&5\end{vmatrix}=19\,.$$

Таким образом, получаем,

$$A^{-1}=\frac{1}{91}\cdot\begin{pmatrix}15&17&-10\\-9&8&6\\17&-5&19\end{pmatrix}^T=\frac{1}{91}\cdot\begin{pmatrix}15&-9&17\\17&8&-5\\-10&6&19\end{pmatrix}.$$

Тогда,

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{91}\cdot\begin{pmatrix}15&-9&17\\17&8&-5\\-10&6&19\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\19\\11\end{pmatrix}=\frac{1}{91}\begin{pmatrix}15\cdot5-9\cdot19+17\cdot11\\17\cdot5+8\cdot19-5\cdot11\\-10\cdot5+6\cdot19+19\cdot11\end{pmatrix}=\frac{1}{91}\begin{pmatrix}91\\182\\273\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

3.) Найдем решение системы методом Гаусса.

Составим расширенную матрицу системы

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ -3 & 5 & 4 & 19 \\ 2 & 0 & 3 & 11 \end{array}\right).$$

Прямой ход метода Гаусса основан на приведении расширенной матрицы системы к ступенчатому виду с использованием элементарных преобразований, производимых над строками.

Элементарными преобразованиями системы считаются:

1. умножение каждого элемента строки на одно и тоже число, отличное от нуля;
2. перестановка местами двух строк матрицы;
3. прибавление ко всем элементам строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и тоже число.

Прежде всего, переставляя строки местами, матрицу необходимо привести к виду, где верхний левый элемент будет отличен от нуля. В нашем случае этого делать не надо, т.к. элемент в верхнем левом углу отличен от нуля.

Далее имеем:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ -3 & 5 & 4 & 19 \\ 2 & 0 & 3 & 11 \end{array}\right)\overset{(1)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ -6 & 10 & 8 & 38 \\ 2 & 0 & 3 & 11 \end{array}\right)\overset{(2)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 19 & 5 & 53 \\ 0 & -3 & 4 & 6 \end{array}\right)\overset{(3)}{\sim}$$

$$\overset{(3)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 19 & 5 & 53 \\ 0 & -57 & 76 & 114 \end{array}\right)\overset{(4)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 19 & 5 & 53 \\ 0 & 0 & 91 & 273 \end{array}\right).$$

При этом последовательно совершались следующие элементарные преобразования:

(1) – все элементы второй строки матрицы умножили на 2;

(2) – к каждому элементу второй строки прибавили соответствующие элементы первой строки, умноженные на 3; от каждого элемента третей строки вычли соответствующие элементы первой строки;

(3) – все элементы третей строки умножили на 19;

(4) – к каждому элементу третей строки прибавили соответствующие элементы второй строки, умноженные на 3.

В случае если после преобразования (2) элемент во второй строке втором столбце оказался равным нулю, необходимо было бы поменять местами вторую и третью строку.

После элементарных преобразований исходная система свелась к виду:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ 19x_2 + 5x_3 = 53, \\ 91x_3 = 273. \end{cases}$$

Откуда, начиная с последнего уравнения, последовательно находим:

$$x_3 = \frac{273}{91} = 3,\ x_2 = \frac{53 - 5x_3}{19} = \frac{53-15}{19} = \frac{38}{19} = 2,\ x_1 = \frac{5 - 3x_2 + x_3}{2} = \frac{5-6+3}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Ответ: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1$.

Задание 2. Выяснить, является ли линейным преобразование f, переводящее любой вектор $\vec{x}$ в вектор $\vec{y}$, заданный координатами в том же базисе, что и вектор $\vec{x}$. В случае утвердительного ответа найти собственные векторы этого преобразования.

$$\vec{x} = \left(\alpha_1, \alpha_2\right)^T,\ \vec{y} = \left(4\alpha_1 + 3\alpha_2; \alpha_1 + 2\alpha_2\right)^T;$$

Решение

Преобразование $\vec{y} = f\left(\vec{x}\right)$ называется линейным, если выполняются следующие свойства:

1. $f\left(\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}\right) = f\left(\overrightarrow{x_1}\right) + f\left(\overrightarrow{x_2}\right)$, для любых векторов $\overrightarrow{x_1}$ и $\overrightarrow{x_2}$;
2. $f\left(\lambda \cdot \vec{x}\right) = \lambda \cdot f\left(\vec{x}\right)$, для любого вектора $\vec{x}$ и любого действительного числа λ.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{x_1} = \left(\beta_1, \beta_2\right)^T$, $\overrightarrow{x_2} = \left(\gamma_1, \gamma_2\right)^T$. Их образами после действия преобразования f будут являться следующие векторы:

$$f\left(\overrightarrow{x_1}\right) = \left(4\beta_1 + 3\beta_2; \beta_1 + 2\beta_2\right)^T,\ f\left(\overrightarrow{x_2}\right) = \left(4\gamma_1 + 3\gamma_2; \gamma_1 + 2\gamma_2\right)^T.$$

Тогда

$$f\left(\overrightarrow{x_1}\right) + f\left(\overrightarrow{x_2}\right) = \left(4\beta_1 + 3\beta_2; \beta_1 + 2\beta_2\right)^T + \left(4\gamma_1 + 3\gamma_2; \gamma_1 + 2\gamma_2\right)^T =$$

$$= \left(4\beta_1 + 4\gamma_1 + 3\beta_2 + 3\gamma_2; \beta_1 + \gamma_1 + 2\beta_2 + 2\gamma_2\right)^T.$$

С другой стороны вектор $\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} = \left(\beta_1, \beta_2\right)^T + \left(\gamma_1, \gamma_2\right)^T = \left(\beta_1 + \gamma_1, \beta_2 + \gamma_2\right)^T$ перейдет в вектор $\left(4\beta_1 + 4\gamma_1 + 3\beta_2 + 3\gamma_2; \beta_1 + \gamma_1 + 2\beta_2 + 2\gamma_2\right)^T$.

Значит, условие 1 линейности преобразования f выполняется.

Проверим условие 2. Имеем

$$\lambda \cdot f\left(\vec{x}\right) = \lambda \cdot \left(4\alpha_1 + 3\alpha_2; \alpha_1 + 2\alpha_2\right)^T = \left(4\lambda\alpha_1 + 3\lambda\alpha_2; \lambda\alpha_1 + 2\lambda\alpha_2\right)^T.$$

С другой стороны вектор $\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (\alpha_1, \alpha_2)^T = (\lambda \cdot \alpha_1, \lambda \cdot \alpha_2)^T$ переходит в вектор $(4\lambda\alpha_1 + 3\lambda\alpha_2; \lambda\alpha_1 + 2\lambda\alpha_2)^T$.

Таким образом, условие 2 также выполняется. А это означает, что заданное преобразование f является линейным.

Найдем его матрицу. Для этого найдем образы базисных векторов $\vec{e_1} = (1,0)^T$, $\vec{e_2} = (0,1)$. Получим

$$f(\vec{e_1}) = (4 \cdot 1 + 3 \cdot 0; 1 + 2 \cdot 0) = (4,1) \text{ и } f(\vec{e_2}) = (4 \cdot 0 + 3 \cdot 1; 0 + 2 \cdot 1) = (3,2).$$

Записав их как первый и второй столбец матрицы, получаем

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходное линейное преобразование f можно записать в матричной форме как $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$.

Собственным вектором называется ненулевой вектор, который под действием линейного преобразования переходит в коллинеарный себе, т.е. выполняется равенство $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$. Преобразуем это равенство к виду

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot E \cdot \vec{x} \Leftrightarrow (A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{x} = \vec{0}.$$

Последнее равенство является системой линейных однородных уравнений с матрицей

$$A - \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Т.е. однородная система $(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} (4-\lambda)\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + (2-\lambda)\alpha_2 = 0 \end{cases}.$$

Однородная система у которой число уравнений совпадает с числом неизвестных имеет ненулевое решение (а именно такое мы ищем) если определитель матрицы системы равен нулю. Т.е. $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$. Получаем

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (4-\lambda) \cdot (2-\lambda) - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 5 \\ \lambda = 1 \end{array} \right. .$$

Для каждого из найденных собственных значений λ найдем соответствующие собственные векторы.

$\underline{\lambda = 5}$ − система однородных уравнений $(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ примет вид

$$\begin{cases} -\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \end{cases}.$$

Таким образом, значения α_1 и α_2 должны удовлетворять уравнению $\alpha_1 = 3\alpha_2$. Следовательно, решение этой системы имеет вид

$$\alpha_2 = c,\ \alpha_1 = 3c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Значит, собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda = 5$, имеет вид $\overrightarrow{x_{c1}} = (3c, c)^T$, $c \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$.

$\underline{\lambda = 1}$ Получаем систему

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases},$$

решением которой является $\alpha_1 = c$, $\alpha_2 = -c$, $c \in \mathbb{R}$. Т.е. собственному числу $\lambda = 1$ соответствует собственные векторы $\overrightarrow{x_{c2}} = (c, -c)^T$, $c \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$.

Задание 3. По координатам точек A(-1,0,5), B(1,4,-3), C(2,5,-2) и D(3,6,-2) для векторов $\vec{a} = 2 \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CB} - 3 \cdot \overrightarrow{AD}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}$ найти:

1. модуль $\vec{a}$;
2. проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{c}$;
3. проверить, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{d}$ неколлинеарные и найти угол между ними;
4. найти площадь параллелограмма построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{d}$;
5. показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарные и найти объём параллелепипеда, построенного на этих векторах;
6. разложить вектор $\vec{d}$ по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Решение

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$. Для нахождения координат вектора необходимо из координат конца вектора вычесть координаты начала.

$$\overrightarrow{AB} = (1-(-1), 4-0, -3-5) = (2,4,-8),\ \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = (-2,-4,8),$$

$$\overrightarrow{AC} = (2-(-1), 5-0, -2-5) = (3,5,-7),\ \overrightarrow{AD} = (3-(-1), 6-0, -2-5) = (4,6,-7),$$

$$\overrightarrow{BC} = (2-1, 5-4, -2-(-3)) = (1,1,1),\ \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = (-1,-1,-1).$$

Тогда $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ будут равны:

$$\vec{a} = 2 \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = 2 \cdot (2,4,-8) - (1,1,1) = (3,7,-17),$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = (3,5,-7) + (-2,-4,8) = (1,1,-1),$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{CB} - 3 \cdot \overrightarrow{AD} = (-1,-1,-1) - 3 \cdot (4,6,-7) = (-13,-19,20),$$

$$\vec{d} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} = (3,5,-7) - (-1,-1,-1) = (4,6,-6).$$

1. Модуль вектора находится как корень из суммы квадратов координат

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{3^2 + 7^2 + \left(-17\right)^2} = \sqrt{9 + 49 + 289} = \sqrt{347}\,.$$

2. Проекция одного вектора на другой находится по формуле

$$\text{ï ð}_{\vec{\text{ñ}}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\left|\vec{c}\right|} = \frac{3\cdot 1 + 7\cdot 1 + \left(-17\right)\cdot\left(-1\right)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + \left(-1\right)^2}} = \frac{3 + 7 + 17}{\sqrt{3}} = \frac{27}{\sqrt{3}} = 9\sqrt{3}\,.$$

3. Два вектора $\vec{v} = \left(x_1, y_1, z_1\right)$ и $\vec{w} = \left(x_2, y_2, z_2\right)$ называются коллинеарными, если они лежат на одной или параллельных прямых. Условием коллинеарности в координатной форме является равенство $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$. Проверим это равенство для векторов $\vec{a}$ и $\vec{d}$. Имеем $\dfrac{3}{4} \neq \dfrac{7}{6} \neq \dfrac{-17}{-6}$. Значит векторы $\vec{a}$ и $\vec{d}$ не являются коллинеарными. Угол между данными векторами можно найти исходя из соотношения

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{d}}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{d}\right|} = \frac{3\cdot 4 + 7\cdot 6 + \left(-17\right)\cdot\left(-6\right)}{\sqrt{3^2 + 7^2 + \left(-17\right)^2}\cdot\sqrt{4^2 + 6^2 + \left(-6\right)^2}} =$$

$$= \frac{12 + 42 + 102}{\sqrt{347}\cdot\sqrt{88}} = \frac{156}{2\sqrt{7634}} = \frac{78}{\sqrt{7634}}\,.$$

Значит $\widehat{\vec{a},\vec{d}} = \arccos\left(\dfrac{78}{\sqrt{7634}}\right)$.

Замечание: Приведенную выше проверку на коллинеарность можно было не выполнять, а сразу находить угол между векторами. Если найденный угол $\widehat{\vec{a},\vec{d}}$ *получился равным* 0^0 *или* 180^0, *то можно было бы сделать вывод о том, что векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{d}$ *коллинеарны.*

4. Исходя из определения векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{d}$ имеем, что $\left|\vec{a}\times\vec{d}\right|$ численно равно площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

$$\vec{a}\times\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 7 & -17 \\ 4 & 6 & -6 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} 7 & -17 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -17 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} + \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 60\vec{i} - 50\vec{j} - 10\vec{k}\,.$$

Тогда $\left|\vec{a}\times\vec{d}\right| = \sqrt{60^2 + \left(-50\right)^2 + \left(-10\right)^2} = 10\cdot\sqrt{6^2 + 5^2 + 1^1} = 10\cdot\sqrt{62}$. А значит, площадь параллелограмма построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{d}$ равна $10\sqrt{62}$ ед.^{2}

Второй способ. Искомая площадь равна

$$S = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{d}\right|\cdot\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{d}}\right) = \sqrt{3^2 + 7^2 + \left(-17\right)^2}\cdot\sqrt{4^2 + 6^2 + \left(-6\right)^2}\cdot\sqrt{1 - \cos^2\left(\widehat{\vec{a},\vec{d}}\right)} =$$

$$= \sqrt{347} \cdot \sqrt{88} \cdot \sqrt{1 - \frac{78^2}{7634}} = 2\sqrt{7634} \cdot \sqrt{\frac{1550}{7634}} = 2\sqrt{1550} = 10\sqrt{62}\,.$$

5. Найдем смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & 7 & -17 \\ 1 & 1 & -1 \\ -13 & -19 & 20 \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{vmatrix} 3 & 4 & -14 \\ 1 & 0 & 0 \\ -13 & -6 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} = 1 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -14 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} = 56 \neq 0$$

При вычислении определителя к каждому элементу второго столбца были прибавлены соответствующие элементы первого столбца, умноженные на (-1), а к каждому элементу третьего столбца – соответствующие элементы первого, умноженные на единицу (*).

Т.к. смешанное произведение отлично от нуля, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарные и их можно взять в качестве базиса. Соответственно, объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен

$$V = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right| = |56| = 56 \text{ (ед.}^3\text{)}.$$

6. Найдем разложение вектора $\vec{d}$ по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Т.е. найдем такие коэффициенты λ_1, λ_2 и λ_3, что $\vec{d} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} + \lambda_3 \cdot \vec{c}$, или в координатной форме:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -17 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ -19 \\ 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda_1 + \lambda_2 - 13\lambda_3 \\ 7\lambda_1 + \lambda_2 - 19\lambda_3 \\ -17\lambda_1 - \lambda_2 + 20\lambda_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 - 13\lambda_3 = 4 \\ 7\lambda_1 + \lambda_2 - 19\lambda_3 = 6 \\ -17\lambda_1 - \lambda_2 + 20\lambda_3 = -6 \end{cases}.$$

Решим эту систему методом Крамера. Имеем

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -13 \\ 7 & 1 & -19 \\ -17 & -1 & 20 \end{vmatrix} = 56,\ \Delta_{\lambda_1} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -13 \\ 6 & 1 & -19 \\ -6 & -1 & 20 \end{vmatrix} = -2,\ \Delta_{\lambda_2} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -13 \\ 7 & 6 & -19 \\ -17 & -6 & 20 \end{vmatrix} = -30,$$

$$\Delta_{\lambda_3} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 6 \\ -17 & -1 & -6 \end{vmatrix} = -20.$$

Таким образом

$$\lambda_1 = \frac{\Delta_{\lambda_1}}{\det A} = -\frac{2}{56} = -\frac{1}{28},\ \lambda_2 = \frac{\Delta_{\lambda_2}}{\det A} = -\frac{30}{56} = -\frac{15}{28},\ \lambda_3 = \frac{\Delta_{\lambda_3}}{\det A} = -\frac{20}{56} = -\frac{5}{14}.$$

Значит, вектор $\vec{d}$ имеет координаты $\left(-\frac{1}{28}, -\frac{15}{28}, -\frac{5}{14}\right)$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Задание 4. Даны вершины треугольника ABC: A(1;2); B(7;4); C(4;8). Найти:

а) уравнение стороны AB;

б) точку пересечения высоты CH и медианы BM;

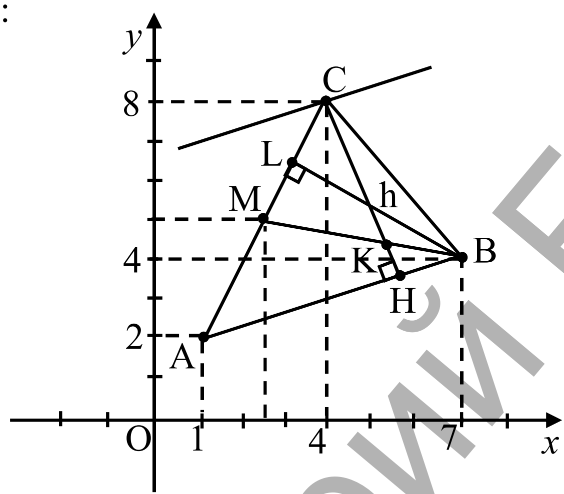
в) уравнение прямой проходящей через точку C параллельно стороне AB;

г) расстояние от точки B до прямой AC;

д) площадь треугольника ABC.

Решение

Для удобства рассуждений построим заданный треугольник в декартовой системе координат:



а) Для нахождения уравнения стороны AB воспользуемся уравнением прямой через две точки: *если даны точки* $M_1(x_1, y_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2)$*, то уравнение прямой, проходящей через них имеет вид* $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. В нашем случае имеем:

$$\frac{x-1}{7-1}=\frac{y-2}{4-2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{6}=\frac{y-2}{2} \Leftrightarrow x-1=3y-6 \Leftrightarrow x-3y+5=0.$$

б) Найдем координаты точки M. Т.к. BM – медиана, то точка M – середина стороны AC. Значит

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{2} \text{ и } y_M=\frac{y_A+y_C}{2},$$

или в нашем случае

$$x_M=\frac{1+4}{2}=2.5 \text{ и } y_M=\frac{2+8}{2}=5.$$

Для нахождения уравнения медианы AM воспользуемся уравнением прямой через две точки $B(7,4)$ и $M(2.5,5)$:

$$\frac{x-2.5}{7-2.5}=\frac{y-5}{4-5} \Leftrightarrow \frac{x-2.5}{4.5}=\frac{y-5}{-1} \Leftrightarrow -x+2.5=4.5y-22.5 \Leftrightarrow 2x+9y-50=0.$$

Уравнение высоты СН найдем исходя из формулы уравнения прямой, проходящей через точку, перпендикулярно вектору: *прямая, проходящая через точку* $M_0(x_0, y_0)$ *перпендикулярно вектору* $\vec{n}(A, B)$ *имеет вид* $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. В нашем случае мы имеем прямую, проходящую через точку $C(4,8)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB} = (7-1, 4-2) = (6,2)$. Значит уравнение высоты СН примет вид:

$$6(x-4) + 2(y-8) = 0 \iff 3x - 12 + y - 8 = 0 \iff 3x + y - 20 = 0.$$

Координаты точки К пересечения прямых ВМ и СН должны удовлетворять уравнениям обеих прямых. Таким образом, координаты точки К являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 9y - 50 = 0 \\ 3x + y - 20 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 9(20 - 3x) - 50 = 0 \\ y = 20 - 3x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5.4 \\ y = 3.8 \end{cases}.$$

Значит $K(5.4, 3.8)$.

в) Воспользуемся уравнением прямой через точку параллельно вектору: *уравнение прямой, проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\vec{l}(m, k)$ *имеет вид* $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{k}$. В нашем случае имеем уравнение прямой, проходящей через точку $C(4,8)$ параллельно вектору $\overrightarrow{AB}(6,2)$. Получаем

$$\frac{x-4}{6} = \frac{y-2}{2} \iff x - 4 = 3(y-2) \iff x - 3y + 2 = 0.$$

г) Т.к. *расстояние от точки* $M_0(x_0, y_0)$ *до прямой* $Ax + By + C = 0$ *вычисляется по формуле* $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, то для нахождения расстояния h от точки $B(7,4)$ до прямой АС, найдем сначала уравнение АС, а затем воспользуемся приведенной формулой.

Для нахождения уравнения АС воспользуемся уравнением прямой через две точки

$$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-2}{8-2} \iff \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{6} \iff 2(x-1) = y - 2 \iff 2x - y = 0.$$

Значит искомое расстояние

$$h = \frac{|2 \cdot 7 - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \text{ (ед.)}.$$

д) Площадь треугольника АВС найдем по формуле

$$S = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(4-1)^2 + (8-2)^2} \cdot 2\sqrt{5} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 15 \text{ (ед.}^2\text{)}.$$

Задание 5. Даны четыре точки $A_1(-2,3,1)$, $A_2(3,-2,5)$, $A_3(2,-4,-3)$ и $A_4(4,0,-1)$.

1) составить уравнение плоскости проходящей через точки A_1, A_2 и A_3;
2) составить уравнение прямой, которой принадлежат точки A_1 и A_2;
3) составить уравнение прямой перпендикулярной плоскости из пункта 1), которая проходит через точку A_4;
4) составить уравнение прямой, которой принадлежит точка A_3 и которая параллельна прямой из пункта 2);
5) составить уравнение плоскости, которая проходит через точку A_4 и перпендикулярна прямой из пункта 2);
6) вычислить синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;
7) вычислить косинус угла между координатной плоскостью *xOy* и плоскостью $A_1A_2A_3$.

Решение

1) *Уравнение плоскости через три точки* $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_3(x_3,y_3,z_3)$ *имеет вид*

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

В нашем случае имеем

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z-1 \\ 3+2 & -2-3 & 5-1 \\ 2+2 & -4-3 & -3-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z-1 \\ 5 & -5 & 4 \\ 4 & -7 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+2)\cdot A_{11} + (y-3)\cdot A_{12} + (z-1)\cdot A_{13} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+2)\cdot(-1)^2\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ -7 & -4 \end{vmatrix} + (y-3)\cdot(-1)^3\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} + (z-1)\cdot(-1)^4\begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$28(x+2)+36(y-3)-15(z-1)=0 \Leftrightarrow 28x+36y-15z-37=0.$$

Из полученного уравнения плоскости $A_1A_2A_3$ можно заключить, что нормальный вектор плоскости имеет вид $\vec{n}=(28,36,-15)$.

2) *Уравнение прямой через две точки* $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$ *находится по формуле* $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

В нашем случае получаем

$$\frac{x+2}{3+2}=\frac{y-3}{-2-3}=\frac{z-1}{5-1} \Leftrightarrow \frac{x+2}{5}=\frac{y-3}{-5}=\frac{z-1}{4}.$$

3) *Уравнение прямой через точку* $A_4(x_4,y_4,z_4)$ *параллельно вектору*

$\vec{l}(m,k,s)$ *имеет вид* $\dfrac{x-x_4}{m}=\dfrac{y-y_4}{k}=\dfrac{z-z_4}{s}$.

Искомая прямая A_4M, перпендикулярная к плоскости $A_1A_2A_3$, будет параллельна нормальному вектору $\vec{n}=(28,36,-15)$. Тогда ее уравнение

$$\frac{x-4}{28}=\frac{y}{36}=\frac{z+1}{-15}.$$

4) Уравнение прямой A_3N, параллельной прямой A_1A_2, находится как уравнение прямой проходящей через точку $A_3(2,-4,-3)$ параллельно вектору $\overrightarrow{A_1A_2}=(3+2,-2-3,5-1)=(5,-5,4)$ (данный вектор является направляющим вектором искомой прямой). Получаем

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y+4}{-5}=\frac{z+3}{4}.$$

5) *Уравнение плоскости, проходящей через точку* $A_4(x_4,y_4,z_4)$ *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{n_1}=(A,B,C)$ *находится по формуле* $A(x-x_4)+B(y-y_4)+C(z-z_4)=0$. В нашем случае нормальный вектор искомой плоскости $\overrightarrow{n_1}$ совпадает с направляющим вектором прямой A_3N $(5,-5,4)$. Значит искомое уравнение примет вид

$$5(x-4)-5y+4(z+1)=0 \Leftrightarrow 5x-5y+4z-16=0.$$

6) Искомый синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$ совпадает с косинусом угла между направляющим вектором прямой A_1A_4 равным $\overrightarrow{A_1A_4}=(4+2,0-3,-1-1)=(6,-3,-2)$ и нормальным вектором плоскости $A_1A_2A_3$, равным $\vec{n}=(28,36,-15)$.

Значит

$$\sin\left(\widehat{A_1A_4,A_1A_2A_3}\right)=\cos\left(\widehat{\overrightarrow{A_1A_2},\vec{n}}\right)=\frac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=$$

$$=\frac{6\cdot 28-3\cdot 36-2\cdot(-15)}{\sqrt{6^2+(-3)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{28^2+36^2+(-15)^2}}=\frac{306}{7\sqrt{2305}}.$$

7) Угол между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$ совпадает с углом между нормальными векторами $\vec{n}=(28,36,-15)$ и $\overrightarrow{n_2}=(0,0,1)$ этих плоскостей.

Значит

$$\cos\left(\widehat{A_1A_2A_3,Oxy}\right)=\cos\left(\widehat{\vec{n},\overrightarrow{n_2}}\right)=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=$$

$$=\frac{0\cdot 28+0\cdot 36+1\cdot(-15)}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{28^2+36^2+(-15)^2}}=\frac{-15}{\sqrt{2305}}.$$

Задание 6. Найти точку *C*, симметричную точке $A(1,-2,3)$, относительно прямой *L*: $\begin{cases} 2x-y+z-13=0 \\ -3x+2y-5z+35=0 \end{cases}$.

Решение

Приведем общее уравнение прямой *L* к параметрическому виде. Для этого найдем направляющий вектор прямой. Т.к. заданная прямая перпендикулярна нормальным векторам $\overrightarrow{n_1}=(2,-1,1)$, $\overrightarrow{n_2}=(-3,2,-5)$ плоскостей $2x-y+z-13=0$ и $-3x+2y-5z+35=0$ соответственно, то за направляющий вектор $\vec{s}$ прямой можно принять векторное произведение $\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$:

$$\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=3\vec{i}+7\vec{j}+\vec{k}.$$

Зафиксировав в общем уравнении прямой координату $z=0$ приходим к системе

$$\begin{cases} 2x-y-13=0 \\ -3x+2y+35=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-9 \\ y=-31 \end{cases}.$$

Таким образом, получили точку $M_0(-9,-31,0)$ лежащую на заданной прямой.

Теперь можно записать параметрическое уравнение прямой *L*:

$$\begin{cases} x=-9+3\cdot t \\ y=-31+7\cdot t,\ t\in\mathbb{R}. \\ z=t \end{cases}$$

Найдем уравнение плоскости γ, проходящей через точку $A(1,-2,3)$ перпендикулярно прямой *L*. В данном случае направляющий вектор прямой $\vec{s}=(3,7,7)$ будет также нормальным вектором плоскости γ. Значит искомое уравнение плоскости примет вид

$$3\cdot(x-1)+7\cdot(y+2)+1\cdot(z-3)=0 \Leftrightarrow 3x+7y+z+8=0.$$

Проекция *B* точки $A(1,-2,3)$ на прямую *L* является точкой пересечения прямой *L* и плоскости γ. Поэтому координаты точки *B* найдем решив следующую систему:

$$\begin{cases} x=-9+3t \\ y=-31+7t \\ z=t \\ 3x+7y+z+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-9+3t \\ y=-31+7t \\ z=t \\ 3(-9+3t)+7(-31+7t)+t+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-3 \\ z=4 \\ t=4 \end{cases}.$$

Т.е. точка B имеет координаты $B(3,-3,4)$.

Пусть точка C, симметричная точке A относительно прямой L имеет координаты $C(x,y,z)$. Тогда, исходя из того, что найденная точка B является серединой отрезка AC получаем равенства:

$$\frac{x+1}{2}=3,\ \frac{y-2}{2}=-3,\ \frac{z+3}{2}=4.$$

Откуда находим координаты искомой точки C: $x=5$, $y=-4$, $z=5$.

Ответ: $C(5,-4,5)$.

Задание 7. Построить кривую, заданную уравнением в полярной системе координат $r=2a\cdot\sin 3\varphi$.

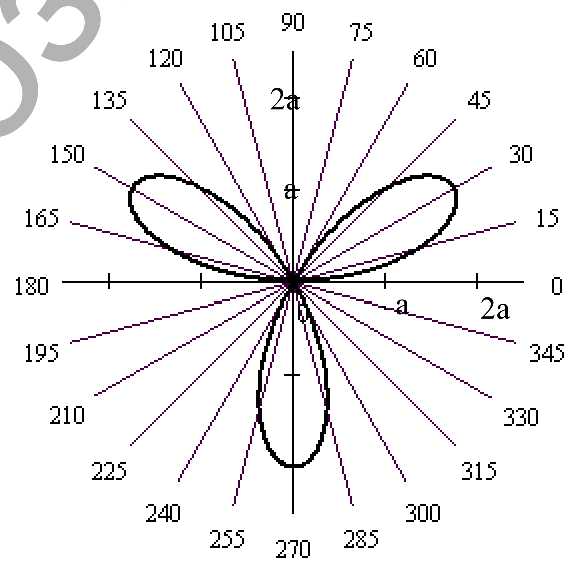
Решение

Найдем значение функции r при значениях переменной φ, изменяющейся от 0^0 до 360^0 с шагом в 15^0. Данные занесем в таблицу. При этом будем учитывать, что $r\geq 0$. Поэтому при полученных отрицательных значениях r в таблице будем ставить прочерк.

φ	0^0	15^0	30^0	45^0	60^0	75^0	90^0	105^0	120^0	135^0	150^0	165^0
r	0	1.41a	2a	1.41a	0	-	-	-	0	1.41a	2a	1.41a

φ	180^0	195^0	210^0	225^0	240^0	255^0	270^0	285^0	300^0	315^0	330^0	345^0
r	0	-	-	-	0	1.41a	2a	1.41a	0	-	-	-

Выберем систему координат с единицей масштаба равной a. На каждом луче, образующем с положительным направлением оси Ox угол φ при обходе против часовой стрелки, отложим в положительном направление соответствующее значение величины r. В случае если в графе r стоит прочерк, то ничего не откладываем. Соединив нанесенные точки, в итоге получаем кривую:



Задание 8. Исследовать кривую второго порядка и построить ее график:
а) $2x = 10 + 3\sqrt{4y - y^2}$;
б) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$.

Решение

а) Выразим $2x - 10 = 3\sqrt{4y - y^2}$, откуда можно заключить, что $2x - 10 \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $x \geq 5$. Возведя обе части полученного равенства в квадрат получим

$$4x^2 - 40x + 100 = 9\left(4y - y^2\right) \;\Leftrightarrow\; 4\left(x^2 - 10x\right) + 9\left(y^2 - 4y\right) + 100 = 0.$$

Дополнив члены, содержащие *x*, и члены, содержащие *y*, до полных квадратов, получим

$$4\left(\left(x^2 - 10x + 25\right) - 25\right) + 9\left(\left(y^2 - 4y + 4\right) - 4\right) + 100 = 0$$

или

$$4\left(x - 5\right)^2 - 100 + 9\left(y - 2\right)^2 - 36 + 100 = 0,$$

откуда

$$4\left(x - 5\right)^2 + 9\left(y - 2\right)^2 = 36.$$

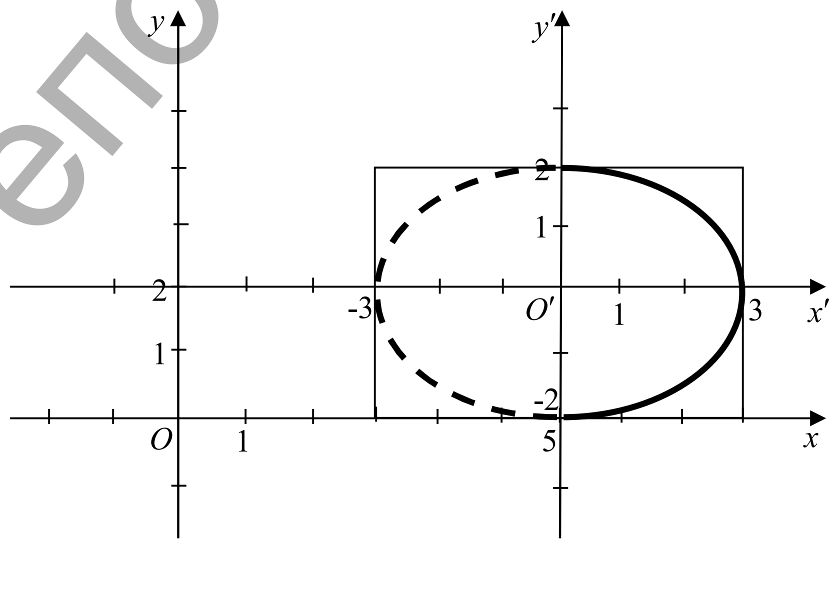
Разделив обе части уравнения на 36, приходим к уравнению

$$\frac{\left(x - 5\right)^2}{9} + \frac{\left(y - 2\right)^2}{4} = 1.$$

Сделав замену $\begin{cases} x' = x - 5 \\ y' = y - 2 \end{cases}$, получаем уравнение эллипса $\dfrac{x'^2}{9} + \dfrac{y'^2}{4} = 1$ с большой полуосью равной $a = 3$ и малой - $b = 2$.

Введенная замена определяет параллельный перенос оси координат *Ox* на 5 вправо и оси *Oy* на 2 вверх.

Изобразим системы координат *Oxy* и $O'x'y'$, и в новой системе координат изобразим полученную кривую второго порядка. При этом изобразим только ту часть кривой , где $x \geq 5$.



б) Введем поворот системы координат на угол α:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}.$$

Тогда исследуемое уравнение кривой второго порядка примет вид

$$4\left(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha\right)\left(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha\right) + 3\left(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha\right)^2 +$$
$$+16\left(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha\right) + 12\left(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha\right) - 36 = 0,$$

откуда

$$x'^2\left(4\cos\alpha\sin\alpha + 3\sin^2\alpha\right) + x'y'\left(4\cos^2\alpha + 6\sin\alpha\cos\alpha - 4\sin^2\alpha\right) +$$
$$+y'^2\left(-4\sin\alpha\cos\alpha + 3\cos^2\alpha\right) + x'\left(16\cos\alpha + 12\sin\alpha\right) +$$
$$+y'\left(12\cos\alpha - 16\sin\alpha\right) - 36 = 0. \qquad (*)$$

Приравняв к нулю коэффициент при $x'y'$, получаем

$$4\cos^2\alpha + 6\sin\alpha\cos\alpha - 4\sin^2\alpha = 0 \,\Big|:\left(-2\cos^2\alpha\right)$$

$$2tg^2\alpha - 3tg\alpha - 2 = 0.$$

Сделаем замену $tg\alpha = t$, тогда $2t^2 - 3t - 2 = 0$

$$D = 9 - 4\cdot 2\cdot(-2) = 25$$

$$t_1 = \frac{3+5}{4} = 2,\ t_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}.$$

В качестве угла поворота α возьмем угол $\alpha = arctg2$ лежащий в первой четверти. Тогда $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. При данном повороте новая ось координат Ox' будет иметь уравнение $y = tg\alpha\cdot x \;\Leftrightarrow\; y = 2x$ в старой системе координат Oxy; ось Oy' - перпендикулярна оси Ox' в точке O.

После поворота на найденный угол α уравнение (*) кривой второго порядка в новой системе координат $Ox'y'$ примет вид

$$4x'^2 - y'^2 + 8\sqrt{5}x' - 4\sqrt{5}y' - 36 = 0$$

или

$$4\left(\left(x'^2 + 2\cdot x'\cdot\sqrt{5} + 5\right) - 5\right) - \left(\left(y'^2 + 2\cdot y'\cdot 2\sqrt{5} + 20\right) - 20\right) - 36 = 0,$$

откуда

$$4\left(x' + \sqrt{5}\right)^2 - \left(y' + 2\sqrt{5}\right)^2 = 36.$$

Разделив обе части на 36 получаем

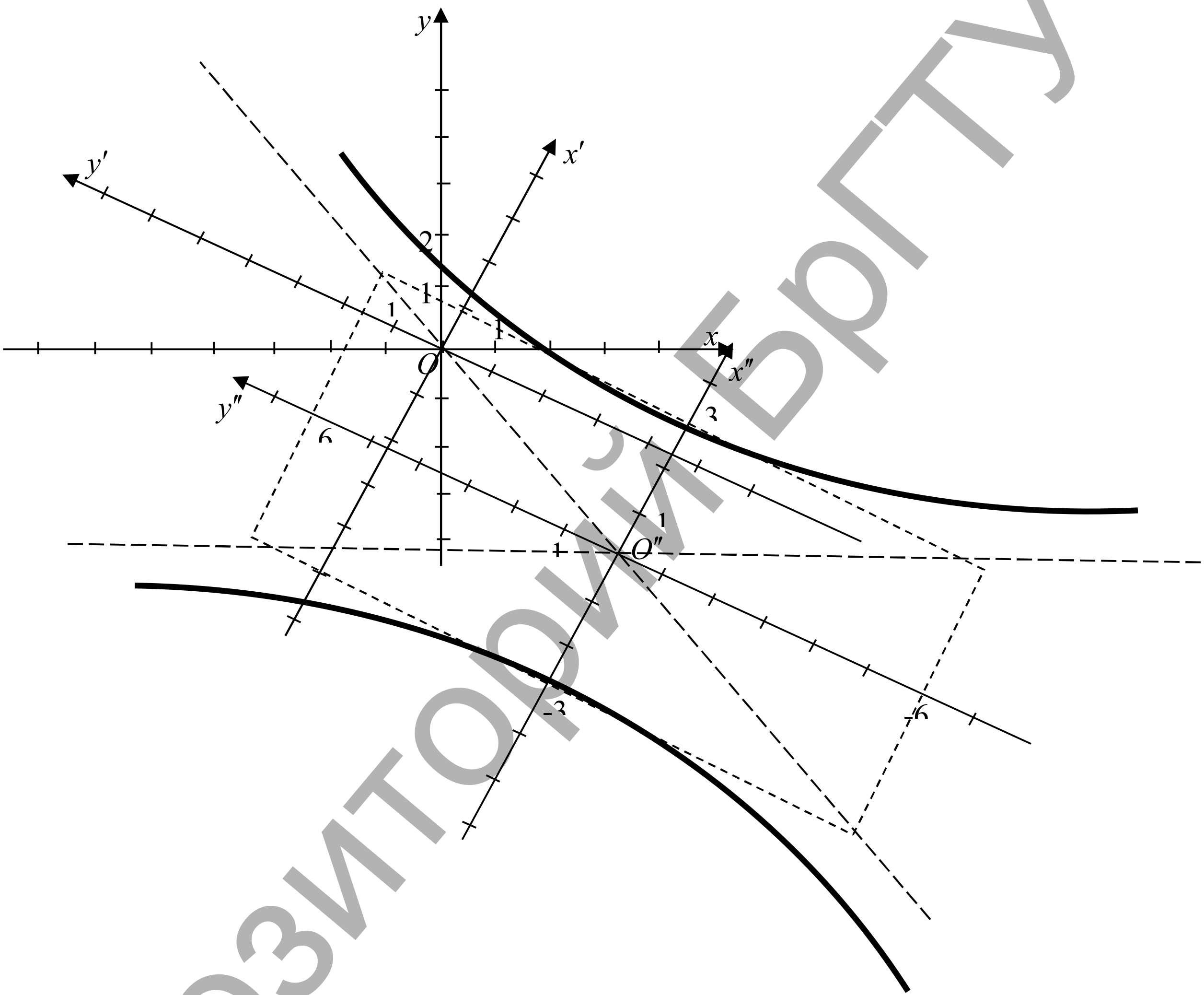
$$\frac{\left(x' + \sqrt{5}\right)^2}{9} - \frac{\left(y' + 2\sqrt{5}\right)^2}{36} = 1$$

Сделав замену $\begin{cases} x'' = x' + \sqrt{5} \\ y'' = y' + 2\sqrt{5} \end{cases}$, получаем уравнение гиперболы $\dfrac{x''^2}{9} - \dfrac{y''^2}{36} = 1$

с действительной полуосью равной $a = 3$ и мнимой - $b = 6$.

Введенная замена определяет параллельный перенос оси координат Ox' на $\sqrt{5}$ против направления оси и оси Oy' на $2\sqrt{5}$ также в противоположную сторону.

Изобразим системы координат Oxy, $Ox'y'$ и $O''x''y''$. В последней системе координат нарисуем гиперболу по полученному каноническому уравнению.



Задание 9. Изобразить тело ограниченное указанными поверхностями:

$$z - x^2 - y^2 = 0,\ y - 2x = 0,\ x \geq 0,\ z \leq 2.$$

Решение

Определим тип указанных поверхностей:

1) $z - x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow z = x^2 + y^2$ − эллиптический параболоид относительно оси Oz,
2) $y - 2x = 0 \Leftrightarrow y = 2x$ − плоскость, проходящая через ось Oz,
3) $x = 0$ − координатная плоскость yOz,
4) $z = 2$ − плоскость параллельная координатной плоскости xOy.

Определим кривые второго порядка, которые получаются при пересечении этих поверхностей друг другом:

1) пересечение эллиптического параболоида $\left(z = x^2 + y^2\right)$ и плоскости $\left(y = 2x\right)$:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ y = 2x, \end{cases} \Rightarrow\ z = x^2 + \left(2x\right)^2 \ \Leftrightarrow\ z = 5x^2 \text{ − парабола;}$$

2) пересечение эллиптического параболоида $\left(z = x^2 + y^2\right)$ и плоскости $\left(x = 0\right)$:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x = 0, \end{cases} \Rightarrow\ z = y^2 \text{ − парабола;}$$

3) пересечение эллиптического параболоида $\left(z = x^2 + y^2\right)$ и плоскости $\left(z = 2\right)$:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 2, \end{cases} \Rightarrow\ x^2 + y^2 = 2 \text{ − окружность;}$$

4) пересечение плоскости $\left(y = 2x\right)$ и плоскости $\left(x = 0\right)$:

$$\begin{cases} y = 2x, \\ x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x = 0, \end{cases} \text{ − координатная ось } Oz\,;$$

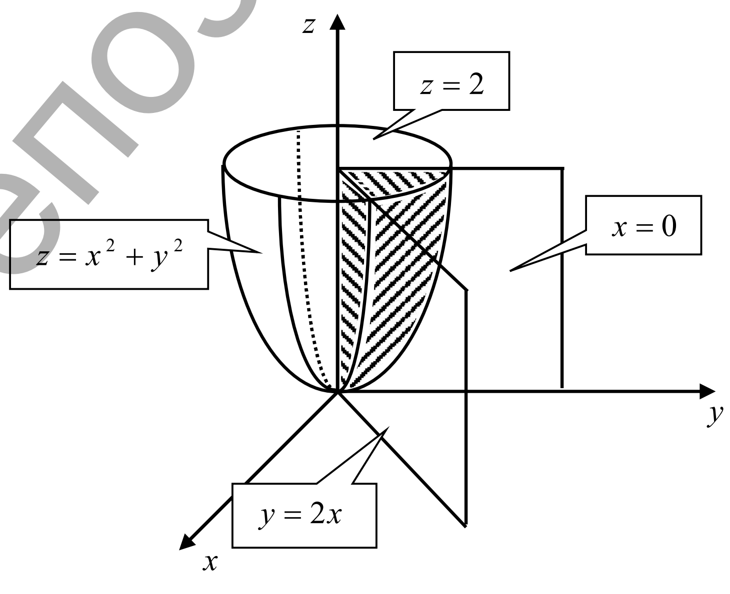
5) пересечение плоскости $\left(y = 2x\right)$ и плоскости $\left(z = 2\right)$:

$$\begin{cases} y = 2x, \\ z = 2, \end{cases} \text{ − прямая;}$$

6) пересечение плоскости $\left(x = 0\right)$ и плоскости $\left(z = 2\right)$:

$$\begin{cases} x = 0, \\ z = 2, \end{cases} \text{ − прямая.}$$

Изобразим все это на рисунке:



Задания к аттестационной работе по теме «Дифференцирование функции одной переменной»

Задание 1. Вычислить предел числовой последовательности:

В	а)	б)	в)
1.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot\sqrt[3]{5n^2}+\sqrt[4]{9n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n-n^2}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+15}\right)^{n+2}$.
2.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+1}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3}\right)$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+n+1}{n^3+2}\right)^{2n^2}$.
3.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n-1}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3-5}\right)n\sqrt{n}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1}\right)^{3n^2-7}$.
4.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2-1}+7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+n+1}-n}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+5)}-n\right)$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-6n+5}{n^2-5n+5}\right)^{3n+2}$.
5.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n-1}-\sqrt[3]{125n^3+n}}{\sqrt[5]{n}-n}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n(n^2+5)}}{\sqrt{n}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{13n+3}{13n-10}\right)^{n-3}$.
6.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[5]{n}-\sqrt[3]{27n^6+n^2}}{(n+\sqrt[4]{n})\sqrt{9+n^2}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+2}-n\right)$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1}\right)^{-n+1}$.
7.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^4+1}-\sqrt[3]{n^4-1}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\sqrt[3]{4-n^3}\right)$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.
8.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^4+2}+\sqrt{n-2}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3}\right)$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7}\right)^{n+1}$.
9.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^3-\sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3}-n}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}\right)$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right)^{-n^2}$.
10.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{5n+2}-\sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7}-n}$;	$\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{n(n^4-1)}-\sqrt{n^5-8}\right)$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7}\right)^{2n+5}$.
11.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[4]{3n+1}+\sqrt{81n^4-n^2+1}}{(n+\sqrt[3]{n})\sqrt{5-n+n^2}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n\right)$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$.
12.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^5-4}-\sqrt[4]{n^4+1}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3}\right)$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3}\right)^{n}$.
13.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5+3}-\sqrt{n-3}}{\sqrt[5]{n^5+3}+\sqrt{n-3}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{(n+2)^2}-\sqrt[3]{(n-3)^2}\right)$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1}$.
14.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}-9n^2}{3n-\sqrt[4]{9n^8+1}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n(n-1)}\right)$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^3}$.

В	а)	б)	в)
15.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n+1}-\sqrt[3]{27n^3+4}}{\sqrt[4]{n}-\sqrt[3]{n^5+n}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-3}\right)$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}$.
16.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{7n}-\sqrt[4]{81n^8-1}}{(n+4\sqrt{n})\sqrt{n^2-5}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{(n-1)(n+3)}\right)$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$.
17.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3-7}+\sqrt[3]{n^2+4}}{\sqrt[4]{n^5+5}+\sqrt{n}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n(n^5+9)}-\sqrt{(n^4-1)(n^2+5)}}{n}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$.
18.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^6+4}+\sqrt{n-4}}{\sqrt[6]{n^6+6}-\sqrt{n-6}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n^2+1)(n^2-4)}-\sqrt{n^4-9}\right)$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$.
19.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[3]{n^6+n^3+1}-5n}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}\right)$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$.
20.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+4}-\sqrt[5]{n^5+5}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n^3+1)(n^2+3)}-\sqrt{n(n^4+2)}}{2\sqrt{n}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}$.
21.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[4]{11n}+\sqrt{25n^4-81}}{(n-7\sqrt{n})\sqrt{n^2-n+1}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2}\right)$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$.
22.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}-\sqrt{n^2+5}}{\sqrt[5]{n^7}-\sqrt{n+1}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n^5+1)(n^2-1)}-n\sqrt{n(n^4+1)}}{n}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{-n^2}$.
23.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^7+5}-\sqrt{n-5}}{\sqrt[7]{n^7+5}+\sqrt{n-5}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n^4+1)(n^2-1)}-\sqrt{n^6-1}}{n}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$.
24.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+2}-5n^2}{n-\sqrt{n^4-n+1}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n+1)^3}-\sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+2}\right)^{n}$.
25.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt[3]{n^3+2}}{\sqrt[7]{n+2}-\sqrt[5]{n^5+2}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}n^3\left(\sqrt[3]{n^2(n^6+4)}-\sqrt[3]{n^8-1}\right)$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{n}$.
26.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{71n}-\sqrt[3]{64n^6+9}}{(n-\sqrt[3]{n})\sqrt{11-n^2}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sqrt{n}-\sqrt{n(n+1)(n+2)}\right)$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1}$.
27.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+6}-\sqrt{n^2-5}}{\sqrt[3]{n^3+3}+\sqrt[4]{n^3+1}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n(n-1)}\right)$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$.
28.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^8+6}-\sqrt{n-6}}{\sqrt[8]{n^8+6}+\sqrt{n-6}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4}\right)$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.
29.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6+2}-n}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2}\right)$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4}$.
30.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[5]{n^5+1}}$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n(n+1)(n+2)}\left(\sqrt{n^3-3}-\sqrt{n^3-2}\right)$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n-7}\right)^{\frac{n}{6}+1}$.

Задание 2. Вычислить пределы функций.

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{x^3+x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{2x^2+x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 3x}{3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{0.5x-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+2x^2-5}$; е) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$;

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-5x^2+2}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x}{3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{4-0.5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$; ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$;

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x^2+1}{3x^4-5x^3+x}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{3x}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg 3x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+1}\right)^{5-9x}$;

д) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^2+3x+2)^2}{x^3+2x^2-x-2}$; е) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}$; ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$;

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x+1}{2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg 8x}{2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x-5}\right)^{4x+3}$;

д) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$; е) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; ж) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{-x^2+6x-8}{\sqrt[3]{2x}-2}$;

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-1}{x^3+x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{5+4x-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 10x}{tg 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+12}{5x+7}\right)^{6-5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$; е) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$; ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x}{tg(\pi(2+x))}$;

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+9x-4}{2x^2+7x}$; б) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{x^2+6x-72}{2x^2-7x-30}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{12x}{\arcsin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+5}{6x-7}\right)^{3x+5}$;

д) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^3-2x-1)^2}{x^4+2x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$; ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{tg(2\pi(x+1/2))}$;

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-1}{2x^4+x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-8x+7}{2x^2-10x-28}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{14x}{\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-2}{7x-9}\right)^{7x+11}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}$; е) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$; ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$;

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6-x^3+1}{2x^6+x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{x^2-9x+8}{64-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{16x}{tg 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x-11}{8x-7}\right)^{16x-5}$;

д) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$; ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$;

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+1}{2x+x^7}$; б) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{x^2+x-90}{63+2x-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{9x}{arctgx}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x+21}{9x+3}\right)^{4.5x+3}$;

д) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$; ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$;

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+1}{2x^3+5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{10x}-10}{x^2-11x+10}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg10x}{\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x-11}{10x+9}\right)^{4-5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg2x}{\sin(2\pi(x+10))}$;

11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^3+1}{2x^3+x+7}$; б) $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{x^2-121}{\sqrt{x+5}-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{11\arcsin x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+9}\right)^{x-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$;

12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-8}{2x^2-x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{\sqrt{x-4}-2\sqrt{2}}{x-12}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 24x}{2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-9}{2x+3}\right)^{4-2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x+5\pi/2)\cdot tgx}{\arcsin 2x^2}$;

13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+1}{x^4+x^3+4x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 13}\dfrac{14x-x^2+13}{65+8x-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{13tg3x}{3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-14}{3x-1}\right)^{5-3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$; е) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\ln(1-2x)}{4arctg3x}$;

14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+x}$; б) $\lim\limits_{x\to 14}\dfrac{\sqrt{x+2}-4}{3-\sqrt{x-5}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7arctg2x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+13}\right)^{4x+3}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos(\pi(x+1)/2)}$;

15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x+5}{x^3+2x^2+8}$; б) $\lim\limits_{x\to 15}\dfrac{4-\sqrt{x+1}}{2+\sqrt[3]{x-23}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 5x}{tgx}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+12}{5x-3}\right)^{6-5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$; е) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$;

16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5x+1}{2x^3+x^2+10}$; б) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{x^2-14x-32}{x^2-256}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{16x}{\arcsin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+12}{6x-4}\right)^{6x+5}$;

д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$; е) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3arctgx}$;

17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{10x-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 17}\dfrac{x^2-16x-17}{18x-x^2-17}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8.5x^2}{1-\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+8}{7x-9}\right)^{7x+11}$;

д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$; е) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin(\pi(x+1))}{\ln(1+2x)}$;

18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+8}{x^2-11x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 18}\dfrac{324-x^2}{\sqrt{x-2}-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{18x}{tgx}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x-5}{8x+4}\right)^{16x-5}$;

д) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$; е) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$;

19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+12x}{2x^2+x+14}$; б) $\lim\limits_{x\to 19}\dfrac{x^2-21x+38}{x^2-24x+85}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{19x}{arctgx}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x-22}{9x+35}\right)^{3x+3}$;

д) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{\left(x^2-x-2\right)^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\sqrt[3]{x/4}-1/2}{\sqrt{1/2+x}-\sqrt{2x}}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin(\pi(x+2))}$;

20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x+3}{5-3x+4x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 20}\dfrac{x^2-18x-40}{\sqrt{5+x}-5}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4tg5x}{\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x-21}{10x+19}\right)^{4-5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$; е) $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{\sqrt[3]{x/9}-1/3}{\sqrt{1/3+x}-\sqrt{2x}}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5(x+\pi))}{e^{3x}-1}$;

21. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+10}{5x+x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 21}\dfrac{\sqrt{25-x}-2}{24x-x^2-63}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7\arcsin 3x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-31}{x-10}\right)^{x-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 1/4}\dfrac{\sqrt[3]{x/16}-1/4}{\sqrt{1/4+x}-\sqrt{2x}}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$;

22. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x^2+4x}{12x^3+6x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 22}\dfrac{x^2-24x+44}{3-\sqrt[3]{x+5}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{11\sin 2x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-8}{2x+3}\right)^{6-4x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}\ln 2$;

23. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x-1}{x^3-7x^2+18}$; б) $\lim\limits_{x\to 23}\dfrac{x^2-24x+23}{22x-x^2+23}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{11.5\cdot tg^2 3x}{1-\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+24}{3x+1}\right)^{5-3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x}}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin(\pi(x/2+1))}$;

24. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+5}{5x^2-4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 24}\dfrac{\sqrt{x+1}-5}{4-\sqrt{x-8}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8arctg3x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-5}\right)^{16x-24}$;

д) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(e^{3x}-1)^2}$;

25. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x+21}{7x-3x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 25}\dfrac{625-x^2}{\sqrt{2x-1}-7}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 5x}{tgx}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-12}{5x-7}\right)^{2-5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-tg^2 x}{x^4}$;

26. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{8x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 26}\dfrac{27x-x^2-26}{\sqrt{3x+3}-9}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{26x}{\arcsin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+4}{6x-9}\right)^{12x+5}$;

д) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$; е) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}$;

27. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+6}{6x^3-4x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 27}\dfrac{729-x^2}{3-\sqrt[3]{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{54x}{\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-2}{7x+7}\right)^{21x+11}$;

д) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt[3]{(\sqrt{x}-4)^2}}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$;

28. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+6x-x^2}{2x^6-8x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 28}\dfrac{x^2-26x-56}{28x^2-x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{140x}{tg5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x-11}{8x+3}\right)^{16x-5}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}$; е) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{1-\sqrt{x^2+1}}$;

29. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-16}{x^5-8x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 29}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{27}}{30x-x^2-29}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{29x}{arctgx}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x+21}{9x-8}\right)^{9x+3}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; е) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2-16}}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(\pi(1+x/2))}{\ln(x+1)}$;

30. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-27}{2x^2+8x+7}$; б) $\lim\limits_{x\to 30}\dfrac{x^2-32x+60}{\sqrt{55-x}-5}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10tg3x}{\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x-1}{10x+9}\right)^{30x+5}$;

д) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$; е) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(e^{\pi x}-1)}{3(\sqrt[3]{1+x}-1)}$;

Задание 3. Исследовать функцию $y=f(x)$ на непрерывность. Сделать чертеж.

1. а) $y=\begin{cases}-2x; & x<-1\\ x^2+1; & -1\le x<2\\ x-1; & x\ge 2\end{cases}$, б) $y=7^{\frac{1}{x+4}}$.

2. а) $y=\begin{cases}-x; & x\le 0\\ \sin x; & 0<x\le\pi\\ x-2; & x>\pi\end{cases}$, б) $y=3^{\frac{1}{x-6}}$.

3. а) $y=\begin{cases}x+2; & x<-2\\ 4-x^2; & -2\le x\le 1\\ 3-2x; & x>1\end{cases}$, б) $4^{\frac{1}{x-6}}$.

4. а) $y=\begin{cases}-(x+1); & x\le -1\\ (x+1)^2; & -1<x\le 0\\ x; & x>0\end{cases}$, б) $y=6^{\frac{3}{x+2}}$.

5. а) $y=\begin{cases}3-x; & x<-2\\ x^2-5; & -2\le x<3\\ 7-2x; & x\ge 3\end{cases}$, б) $4^{\frac{2}{x+1}}$.

6. а) $y=\begin{cases}-x^2; & x\le 0\\ tgx; & 0<x\le \pi/4\\ 2; & x>\pi/4\end{cases}$, б) $y=9^{\frac{1}{x-2}}$.

7. а) $y=\begin{cases}-3x; & x\le 1\\ x^2-4; & 1<x\le 3\\ 2x-5; & x>3\end{cases}$, б) $y=2^{-\frac{2}{1-x}}$.

8. а) $y=\begin{cases}-2x; & x\le 0\\ x^2+1; & 0<x\le 1\\ 2; & x>1\end{cases}$, б) $y=25^{\frac{1}{2x-2}}$.

9. а) $y=\begin{cases}2x+1; & x<-1\\ x^2; & -1\le x\le 2\\ 6-x; & x>2\end{cases}$, б) $y=7^{\frac{3}{x-3}}$.

10. а) $y=\begin{cases}-2x; & x\le 0\\ \sqrt{x}; & 0<x\le 4\\ 1; & x>4\end{cases}$, б) $y=4^{\frac{4}{x-2}}$.

11. а) $y=\begin{cases}2-x; & x<0\\ \sin x; & 0\le x<\pi\\ x-\pi; & x>\pi\end{cases}$, б) $y=5^{\frac{1}{x-2}}$.

12. а) $y=\begin{cases}x+1; & x<0\\ x^2+1; & 0\le x\le 2\\ 3; & x>2\end{cases}$, б) $y=9^{\frac{1}{4+x}}$.

13. а) $y=\begin{cases}x+1; & x\le 0\\ \cos x; & 0<x\le \pi/2\\ 2; & x>\pi/2\end{cases}$, б) $y=4^{\frac{4}{1-x}}$.

14. а) $y=\begin{cases}3x-4; & x<0\\ x^2-1; & 0\le x\le 2\\ 3; & x>2\end{cases}$, б) $y=3^{\frac{2}{x+1}}$.

15. а) $y=\begin{cases}2x; & x<0\\ \sin x; & 0\le x\le \pi\\ -3; & x>\pi\end{cases}$, б) $y=8^{\frac{5}{2-x}}$.

16. а) $y=\begin{cases}2; & x<0\\ x^2+1; & 0\le x\le 1\\ 3x-1; & x>1\end{cases}$, б) $y=6^{\frac{3}{5-x}}$.

17. а) $y=\begin{cases}x^2; & x\le 0\\ \cos x; & 0<x\le \pi\\ -1; & x>\pi\end{cases}$, б) $y=2^{\frac{3}{3-x}}$.

18. а) $y=\begin{cases}3x+1; & x\le 0\\ 2x^2-1; & 0<x\le 2\\ 4x-3; & x>2\end{cases}$, б) $y=4^{-\frac{2}{4-x}}$.

19. а) $y=\begin{cases}x^2-1; & x<0\\ \cos x; & 0\le x<\pi/2\\ x-\pi/2; & x>\pi/2\end{cases}$, б) $y=6^{\frac{1}{5-x}}$.

20. а) $y=\begin{cases}2x+1; & x\le 0\\ 1; & 0<x\le 2\\ -x^2+4; & x>2\end{cases}$, б) $y=9^{\frac{5}{x-7}}$.

21. а) $y=\begin{cases}x+4; & x<-1\\ x^2+2; & -1\le x\le 1\\ 2x; & x>1\end{cases}$, б) $y=9^{\frac{2}{x+4}}$.

22. а) $y=\begin{cases}\sin x; & x\le 0\\ x^2; & 0<x\le 1\\ 2x-3; & x>1\end{cases}$, б) $y=3^{\frac{5}{x+6}}$.

23. а) $y=\begin{cases}x+2; & x\le -1\\ x^2+1; & -1<x\le 1\\ 3-x; & x>1\end{cases}$, б) $y=3^{-\frac{1}{2-x}}$.

24. а) $y=\begin{cases}\cos x; & x<0\\ x^2+1; & 0\le x\le 1\\ 1-2x; & x>1\end{cases}$, б) $y=9^{\frac{4}{x-4}}$.

25. а) $y=\begin{cases}-x; & x\le 0\\ -(x-1)^2; & 0<x\le 2\\ x-3; & x>2\end{cases}$, б) $y=2^{-\frac{5}{x-4}}$.

26. а) $y=\begin{cases}1-x^2; & x<0\\ 2x-3; & 0\le x\le 2\\ 1; & x>2\end{cases}$, б) $y=6^{\frac{2}{x-7}}$.

27. а) $y=\begin{cases}\cos x; & x\le 0\\ x^2+1; & 0<x<1\\ x; & x\ge 1\end{cases}$, б) $y=5^{\frac{3}{x+2}}$.

28. а) $y=\begin{cases}x^2+1; & x<0\\ x+1; & 0\le x\le 2\\ 1-3x; & x>2\end{cases}$, б) $y=4^{\frac{1}{x-3}}$.

29. а) $y=\begin{cases}-x; & x\le 0\\ x^2; & 0<x\le 2\\ x+1; & x>2\end{cases}$, б) $y=7^{-\frac{2}{x-3}}$.

30. а) $y=\begin{cases}2x-4; & x<0\\ -2x; & 0\le x\le 2\\ x^2-8; & x>2\end{cases}$, б) $y=5^{\frac{2}{x+3}}$.

Задание 4. Найти производную.

1. а) $y=\dfrac{2(3x^3+4x^2-x-2)}{15\sqrt{1+x}}$; б) $y=\sin\sqrt{3}+\dfrac{\sin^2 3x}{3\cos 6x}$;

в) $y=\dfrac{1}{\sin x}\ln(tg\,x+ctg\,x)$; г) $y=(arctgx)^{\frac{1}{2}\ln arctg\,x}$;

д) $y=arctg\dfrac{tgx-ctgx}{\sqrt{2}}$; е) $y=\dfrac{1}{24}(x^2+8)\sqrt{x^2-4}+\dfrac{x^4}{16}\arcsin\dfrac{2}{x}$

2. а) $y=\dfrac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$; б) $y=\cos\ln 2-\dfrac{\cos^2 3x}{3\sin 6x}$;

в) $y=e^{2x}(2-\sin x-\cos 2x)\cdot\dfrac{1}{8}$; г) $y=(\sin\sqrt{x})^{\ln\sin\sqrt{x}}$;

д) $y=\arcsin\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{5x}}$; е) $y=4\ln\dfrac{x}{1+\sqrt{1-4x^2}}-\dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{x^2}$.

3. а) $y=\dfrac{x^4-8x^2}{2(x^2-4)}$; б) $y=tg\lg\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sin^2 4x}{4\cos 8x}$;

в) $y=\ln(1+\sqrt{1-e^{4x}})-e^{-2x}\arcsin(e^{2x})$; г) $y=(\sin x)^{5e^x}$.

д) $y=\dfrac{1}{2}arctg\dfrac{e^x-3}{2}$; е) $y=x(2x^2+5)\sqrt{x^2+1}+3\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

4. а) $y=\dfrac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$; б) $y=ctg\sqrt[3]{5}-\dfrac{1}{8}\dfrac{\cos^2 4x}{\sin 8x}$;

в) $y=x^3\arcsin x+\dfrac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}$; г) $y=(\arcsin x)^{e^x}$;

д) $y=arctg\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$; е) $y=\dfrac{1}{\ln 4}\ln\dfrac{1+2^x}{1-2^x}$.

5. а) $y=\dfrac{(x^8+1)\sqrt{x^8+1}}{12x^{12}}$; б) $y=\dfrac{\cos\sin 5\cdot\sin^2 2x}{2\cos 4x}$;

в) $y=2\sqrt{e^x+1}+\ln\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$; г) $y=(\ln x)^{3x}$;

д) $y=\arccos\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}$; е) $y=3\arcsin\dfrac{3}{4x+1}+2\sqrt{4x^2+2x-2}$.

6. а) $y=\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$; б) $y=\dfrac{\sin\cos 3\cdot\cos^2 2x}{4\sin 4x}$;

в) $y=\sqrt{1+x^2}\,arctgx-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$; г) $y=x^{\arcsin x}$;

д) $y=\sqrt{\dfrac{2}{3}}arctg\dfrac{3x-1}{\sqrt{6x}}$; е) $y=\dfrac{x^4}{81}\arcsin\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{81}(x^2+18)\sqrt{x^2-9}$.

7. а) $y=\dfrac{(x^2-6)\sqrt{(1+x^2)^3}}{120x^5}$; б) $y=\dfrac{\cos\ln 7\cdot\sin^2 7x}{7\cos 14x}$;

в) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}arctg\dfrac{3x-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3x-1}{3x^2-2x+1}$; г) $y=(ctg\,3x)^{2e^x}$;

д) $y=\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)-2arctg\, e^{x}$;

е) $y=2\arcsin\frac{2}{3x+4}+\sqrt{9x^{2}+24x+12})$.

8. а) $y=\frac{(x^{2}-8)\sqrt{x^{2}-8}}{6x^{3}}$;

б) $y=\cos ctg\, 2-\frac{\cos^{2}8x}{16\sin 16x}$;

в) $y=x(2x^{2}+1)\sqrt{x^{2}+1}-\ln(x+\sqrt{x^{2}+1})$;

г) $y=x^{e^{tg\, x}}$;

д) $y=\ln\frac{\sin x}{\cos x+\sqrt{\cos 2x}}$;

е) $y=\frac{(x-4)\sqrt{8x-x^{2}-7}}{2}-9\arccos\sqrt{\frac{x-1}{6}}$.

9. а) $y=\frac{4+3x^{3}}{x\sqrt[3]{(2+x^{3})^{2}}}$;

б) $y=ctg\cos 2+\frac{\sin^{2}6x}{6\cos 12x}$;

в) $y=\ln(4x-1+arctg(4x-1))$;

г) $y=(tg\, x)^{4e^{x}}$;

д) $y=arctg\frac{\sqrt{sh2x}}{ch\, x-sh\, x}$;

е) $y=arctg\cos x+\ln tg\frac{x}{2}$.

10. а) $y=\sqrt[3]{\frac{\left(2+x^{3/4}\right)^{2}}{x^{3/2}}}$;

б) $y=2(x-2)\sqrt{e^{x}+1}-2\ln\frac{\sqrt{e^{x}+1}-1}{\sqrt{e^{x}+1}+1}$;

в) $y=\frac{1}{6}\ln\frac{1-sh2x}{2+sh2x}$;

г) $y=(\cos 5x)^{e^{x}}$;

д) $y=\frac{x^{3}}{3}\arccos x-\frac{2+x^{2}}{9}\sqrt{1-x^{2}}$;

е) $y=\sqrt[3]{ctg2}-\frac{\cos^{2}10x}{20\sin 20x}$.

11. а) $y=\frac{x^{6}+x^{3}-2}{\sqrt{1-x^{3}}}$;

б) $y=\frac{1}{3}\cos tg\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\frac{\sin^{2}10x}{\cos 20x}$;

в) $y=e^{x}(\sin x-\cos x)$;

г) $y=(x\sin x)^{8\ln(x\sin x)}$;

д) $y=\ln\sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}$;

е) $y=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1+x}{2x}arctg\sqrt{x}$.

12. а) $y=\frac{(x^{2}-2)\sqrt{4+x^{2}}}{24x^{3}}$;

б) $y=\ln\sin\frac{1}{2}-\frac{1}{24}\frac{\cos^{2}12x}{\sin 24x}$;

в) $y=e^{x}(\sin x+\cos x)$;

г) $y=(x-5)^{ch\, x}$;

д) $y=x+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$;

е) $y=\frac{x+2}{x^{2}+4x+6}+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{2}}$.

13. а) $y=\frac{1+x^{2}}{2\sqrt{1+2x^{2}}}$;

б) $y=8\sin ctg\, 3+\frac{1}{5}\frac{\sin^{2}5x}{\cos 10x}$;

в) $y=e^{x}(4+2\sin 2x+\cos 2x)$;

г) $y=(x^{3}+4)^{tg\, x}$;

д) $y=\ln\sin\frac{2x+4}{x+1}$;

е) $y=\frac{4+x^{4}}{x^{3}}arctg\frac{x^{2}}{2}+\frac{4}{x}$.

14. а) $y=\frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^{2}}$;

б) $y=\frac{\cos ctg\, 3\cdot\cos^{2}14x}{28\sin 28x}$;

в) $y=\log_{16}\log_{5}tg\, x$;

г) $y=x^{\sin x^{3}}$;

д) $y = x + \dfrac{1}{1+e^x} - \ln\left(1+e^x\right);$

е) $y = \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} + arctg\sqrt{x}\,.$

15. а) $y = \dfrac{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}{3x^3};$

б) $y = \dfrac{\cos tg\,5 \cdot \sin^2 15x}{15\cos 30x};$

в) $y = x - 3\ln\left((1+e^x)\sqrt{1+e^x}\right) - 3arctg\,e^x;$

г) $y = (x^2-1)^{sh\,x};$

д) $y = \log_4 \log_2 tg\,x;$

е) $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1} - \dfrac{\arccos x}{2x^2}\,.$

16. а) $y = \dfrac{x^6+8x^3-128}{\sqrt{8-x^3}};$

б) $y = \dfrac{\sin tg\,7 \cdot \cos^2 16x}{32\sin 32x};$

в) $y = x(\cos\ln x + \sin\ln x);$

г) $y = (x^4+5)^{ctg\,x};$

д) $y = arctg\dfrac{\sqrt{2\,tg\,x}}{1-tg\,x};$

е) $y = 6\arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{6+x}{2}\sqrt{x(4-x)}\,.$

17. а) $y = \dfrac{\sqrt{2x+3}\,(x-2)}{x^2};$

б) $y = \dfrac{ctg\sin 3 \cdot \sin^2 17x}{17\cos 34x};$

в) $y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}) + \arcsin e^{-x};$

г) $y = (\sin x)^{5x};$

д) $y = \ln\cos\dfrac{2x+3}{2x+1};$

е) $y = \dfrac{x-3}{2}\sqrt{6x-x^2-8} + \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{2}-1}\,.$

18. а) $y = (1-x^2)\sqrt[5]{x^3+\dfrac{1}{x}};$

б) $y = \dfrac{\sqrt{ctg 2} \cdot \cos^2 18x}{36\sin 36x};$

в) $y = \ln(e^{5x} + \sqrt{e^{10x}-1}) + \arcsin(e^{-5x});$

г) $y = (x^2+1)^{\cos x};$

д) $y = \lg\ln ctg\,x;$

е) $y = x - e^{-x}\arcsin e^x - \ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})\,.$

19. а) $y = \dfrac{(2x^2+3)\sqrt{x^2-3}}{9x^3};$

б) $y = \dfrac{tg\ln 2 \cdot \sin^2 19x}{19\cos 38x};$

в) $y = x - \ln(1+e^x) - 2e^{-x}arctg\,e^x;$

г) $y = 19^{x^{19}}x^{19};$

д) $y = \ln\dfrac{\sqrt{2}+th\,x}{\sqrt{2}-th\,x};$

е) $y = \sqrt{4x^2-12x+10}\;arctg(2x-3)\,.$

20. а) $y = \dfrac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}};$

б) $y = ctg\cos 5 - \dfrac{\cos^2 20x}{40\sin 40x};$

в) $y = \ln tg\,x + \sqrt{1+2tg^2 x};$

г) $y = x^{3^x}2^x;$

д) $y = \dfrac{2x}{4}\sqrt{5x-4-x^2} + \dfrac{9}{4}\arcsin\sqrt{\dfrac{x-1}{3}};$

е) $y = \dfrac{e^{x^3}}{1+x^3}\,.$

21. а) $y = \dfrac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2};$

б) $y = \sqrt{tg 4} + \dfrac{\sin^2 21x}{21\cos 42x};$

в) $y = arctg\sqrt{x^2-1} - \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}};$

г) $y = (\sin\sqrt{x})^{e^x};$

д) $y = \ln\arcsin\sqrt{1-e^{2x}};$

е) $y = \dfrac{4^x((\ln 4)\sin 4x - 4\cos 4x)}{16+\ln^2 4}\,.$

22. а) $y=2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$; б) $y=\cos\ln 13-\dfrac{\cos^2 22x}{44\sin 44x}$;

в) $y=3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)$; г) $y=x^{e^{ctg\,x}}$;

д) $y=\arcsin\dfrac{x-2}{(x-1)\sqrt{2}}$; е) $y=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}-2\cos x-3\ln tg\dfrac{x}{2}$.

23. а) $y=\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}}$; б) $y=\ln\cos\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sin^2 23x}{23\cos 46x}$;

в) $y=\sqrt{1-x^2}-x\arcsin\sqrt{1-x^2}$; г) $y=x^{e^{\cos x}}$;

д) $y=\ln(x+\sqrt{4+x^2})$; е) $y=\dfrac{5^x((\ln 5)\sin 3x-3\cos 3x)}{9+\ln^2 5}$.

24. а) $y=3\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$; б) $y=ctg\sin\dfrac{1}{13}-\dfrac{\cos^2 24x}{48\sin 48x}$;

в) $y=e^{\sin x}\left(x-\dfrac{1}{\cos x}\right)$; г) $y=x^{2^x}\cdot 5^x$;

д) $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-x\sqrt{2}}$; е) $y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{3}arctg\sqrt{x}-\dfrac{8}{3}arctg\dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

25. а) $y=3\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{(x-1)^2}}$; б) $y=\sin\ln\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sin^2 25x}{25\cos 50x}$;

в) $y=\dfrac{e^x}{2}\left((x^2-1)\cos x+(x-1)^2\sin x\right)$; г) $y=x^{e^{\sin x}}$;

д) $y=\ln\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; е) $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\arcsin x$.

26. а) $y=\dfrac{x+7}{6\sqrt{x^2+2x+7}}$; б) $y=\sqrt[3]{\cos\sqrt{2}}-\dfrac{\cos^2 26x}{52\sin 52x}$;

в) $y=x^3\arccos x-\dfrac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}$; г) $y=(tg\,x)^{\ln tg\,x}$;

д) $y=arctg(e^x-e^{-x})$; е) $y=(2x^2+6x+5)arctg\dfrac{x+1}{x+2}-x$.

27. а) $y=\dfrac{x\sqrt{x+1}}{x^2+x+1}$; б) $y=\sqrt[7]{tg\cos 2}+\dfrac{\sin^2 27x}{27\cos 54x}$;

в) $y=\dfrac{e^{x^2}}{1+x^2}$; г) $y=x^{e^{arctg\,x}}$;

д) $y=\dfrac{x}{2\sqrt{1-4x^2}}\arcsin 2x+\dfrac{1}{8}\ln(1-4x^2)$; е) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2}}{x}$.

28. а) $y=\dfrac{x^2+2}{2\sqrt{1-x^4}}$; б) $y=\sin\sqrt[3]{tg 2}-\dfrac{\cos^2 28x}{56\sin 56x}$;

в) $y=\dfrac{x}{4}(10-x^2)\sqrt{4-x^2}+6\arcsin\dfrac{x}{2}$; г) $y=(x^8+1)^{th\,x}$;

д) $y=\dfrac{sh\,x}{2ch^2 x}+\dfrac{1}{2}arctg\,sh\,x$; е) $y=-\dfrac{e^{3x}}{3sh^3 x}$.

29. а) $y=\dfrac{(x+3)\sqrt{2x-1}}{2x+7}$; б) $y=\cos^2\sin 3+\dfrac{\sin^2 29x}{29\cos 58x}$;

в) $y=\arcsin e^x-\sqrt{1-e^{2x}}$; г) $y=x^{29^x}\cdot 29^x$;

д) $y=\ln\ln\sin\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$; е) $y=\dfrac{3^x((\ln 3)\sin 2x-2\cos 2x)}{4+\ln^2 3}$.

30. а) $y=\dfrac{3x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2}}$; б) $y=\sin^3\cos 2-\dfrac{\cos^2 30x}{60\sin 60x}$;

в) $y=\ln\ln^3\ln^2 x$; г) $y=(\cos 2x)^{\ln\cos 2x}$;

д) $y=x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+arctg\sqrt{x}$; е) $y=-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}(x^4+2x^2+2)$.

Задание 5. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в точке, соответствующей значению параметра $t=t_0$.

1. $\begin{cases}x=a\sin^3 t,\\ y=a\cos^3 t.\end{cases}$ $t_0=\dfrac{\pi}{3}$.

2. $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos t,\\ y=\sin t.\end{cases}$ $t_0=\dfrac{\pi}{3}$.

3. $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t).\end{cases}$ $t_0=\dfrac{\pi}{3}$.

4. $\begin{cases}x=2t-t^2,\\ y=3t-t^3.\end{cases}$ $t_0=1$.

5. $\begin{cases}x=\dfrac{2t+t^2}{1+t^3},\\ y=\dfrac{2t-t^2}{1+t^3}.\end{cases}$ $t_0=1$.

6. $\begin{cases}x=\dfrac{1+\ln t}{t^2},\\ y=\dfrac{3+2\ln t}{t}.\end{cases}$ $t_0=1$.

7. $\begin{cases}x=t(t\cos t-2\sin t),\\ y=t(t\sin t+2\cos t).\end{cases}$ $t_0=\dfrac{\pi}{4}$.

8. $\begin{cases}x=2\ln ctg\,t+1,\\ y=tg\,t+ctg\,t.\end{cases}$ $t_0=\dfrac{\pi}{4}$.

9. $\begin{cases}x=\dfrac{3at}{1+t^2},\\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^2}.\end{cases}$ $t_0=2$.

10. $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{4}t^4,\\ y=\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{3}t^3.\end{cases}$ $t_0=0$.

11. $\begin{cases}x=at\cos t,\\ y=at\sin t.\end{cases}$ $t_0=\dfrac{\pi}{2}$.

12. $\begin{cases}x=\sin^2 t,\\ y=\cos^2 t.\end{cases}$ $t_0=\dfrac{\pi}{6}$.

13. $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=a^t.\end{cases}$ $t_0=0$.

14. $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=\cos 2t.\end{cases}$ $t_0=\dfrac{\pi}{6}$.

15. $\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=\sin t.\end{cases}$ $t_0=-\dfrac{\pi}{3}$

16. $\begin{cases}x=t^3+1,\\ y=t^2.\end{cases}$ $t_0=-2$.

17. $\begin{cases}x=a\sin^3 t,\\ y=a\cos^3 t.\end{cases}$ $t_0=\dfrac{\pi}{6}$

18. $\begin{cases}x=a(t\sin t+\cos t),\\ y=a(\sin t-t\cos t).\end{cases}$ $t_0=\dfrac{\pi}{4}$.

19. $\begin{cases}x=1-t^2,\\ y=t-t^3.\end{cases}$ $t_0=2$

20. $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=t-arctg\,t.\end{cases}$ $t_0=1$.

21. $\begin{cases} x = t(1-\sin t), \\ y = t\cos t. \end{cases}$ $t_0 = 0$

22. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t. \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

23. $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y = \dfrac{t}{t^2-1}. \end{cases}$ $t_0 = 2$

24. $\begin{cases} x = 2tg\, t, \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t. \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

25. $\begin{cases} x = t - t^4, \\ y = t^2 - t^3. \end{cases}$ $t_0 = 1$

26. $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2 + t + 1. \end{cases}$ $t_0 = 1$.

27. $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^2}, \\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{2}{t}. \end{cases}$ $t_0 = 2$

28. $\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t}, \\ y = \dfrac{t-1}{t}. \end{cases}$ $t_0 = -1$.

29. $\begin{cases} x = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$ $t_0 = 1$

30. $\begin{cases} x = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$ $t_0 = -1$.

Задание 6. Найти производную y''_{xx}.

1. $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \sec^2 t. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \dfrac{1}{t}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = sh^2 t, \\ y = \dfrac{1}{ch^2 t}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{t}}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = tgt, \\ y = \dfrac{1}{\sin 2t}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{t-1}}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sec t. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln\cos t. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t-1} \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = \sqrt{t^3-1}, \\ y = \ln t. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = \sqrt{t-3}, \\ y = \ln(t-2). \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = sh t, \\ y = th^2 t. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = tg^2 t. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = \dfrac{\cos t}{1+2\cos t}, \\ y = \dfrac{\sin t}{1+2\cos t} \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t^2}, \\ y = \dfrac{1}{t^2+1}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t}, \\ y = \dfrac{1}{t^2+1}. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \ln\sin t. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^4 \dfrac{t}{2}. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} x = arctg\, t, \\ y = \dfrac{t^2}{2}. \end{cases}$ 27. $\begin{cases} x = ch t, \\ y = \sqrt[3]{sh^2 t}. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 4(2 + \cos t). \end{cases}$ 29. $\begin{cases} x = \sin t - t\cos t, \\ y = \cos t + t\sin t. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$

Задание 7. Провести полное исследование функции и построить ее график.

1. $y = \dfrac{4}{x^2 + 2x - 3}$. **2.** $y = \dfrac{4}{3 + 2x - x^2}$. **3.** $y = \dfrac{x^2 + 2x - 7}{x^2 + 2x - 3}$.

4. $y = \dfrac{1}{x^4 - 1}$. **5.** $y = -\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^2$. **6.** $y = \dfrac{x^3 - 32}{x^2}$.

7. $y = \dfrac{4(x+1)^2}{x^2 + 2x + 4}$. **8.** $y = \dfrac{3x - 2}{x^3}$. **9.** $y = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{(x-1)^2}$.

10. $y = \dfrac{x^3 - 27x + 54}{x^3}$. **11.** $y = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$. **12.** $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2$.

13. $y = \dfrac{12 - 3x^2}{x^2 + 12}$. **14.** $y = \dfrac{9 + 6x - 3x^2}{x^2 - 2x + 13}$. **15.** $y = \dfrac{-8x}{x^2 + 4}$.

16. $y = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$. **17.** $y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$. **18.** $y = \dfrac{4x}{(x+1)^2}$.

19. $y = \dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$. **20.** $y = \dfrac{1 - 2x^3}{x^2}$. **21.** $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$.

22. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$. **23.** $y = \dfrac{2}{x^2 + 2x}$. **24.** $y = \dfrac{4x^2}{3 + x^2}$.

25. $y = \dfrac{12x}{9 + x^2}$. **26.** $y = \dfrac{x^3 - 3x + 3}{x - 1}$. **27.** $y = \dfrac{4 - x^3}{x^2}$.

28. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$. **29.** $y = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2}$. **30.** $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2}$.

Рекомендации к решению задач аттестационной работы «Дифференцирование функции одной переменной»

Задание 1. Вычислить предел числовой последовательности

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{54n^6-4n^2}-\sqrt{5n^3+n^2-5}}{\sqrt[4]{32n^8+5}+\sqrt[3]{2n^6-14n^5}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sqrt{n}\left(\sqrt{n^3+6}-\sqrt{n^3-4}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+4}\right)^{3n}$.

Решение

а) В данном случае мы имеем отношение бесконечно больших величин, т.е. неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для раскрытия неопределенностей данного вида необходимо вынести старшую степень n в числители и знаменателе за скобку. После сокращения старших степеней необходимо использовать основные теоремы о пределах и то, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A}{n^\alpha}=0$, где $\alpha>0, A-const$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{54n^6-4n^2}-\sqrt{5n^3+n^2-5}}{\sqrt[4]{32n^8+5}+\sqrt[3]{2n^6-14n^5}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\sqrt[3]{54-\frac{4}{n^4}}-n^{3/2}\sqrt{5+\frac{1}{n}-\frac{5}{n^3}}}{n^2\sqrt[4]{32+\frac{5}{n^8}}+n^2\sqrt[3]{2-\frac{14}{n}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\sqrt[3]{54-\frac{4}{n^4}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{5+\frac{1}{n}-\frac{5}{n^3}}\right)}{n^2\left(\sqrt[4]{32+\frac{5}{n^8}}+\sqrt[3]{2-\frac{14}{n}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{54-\frac{4}{n^4}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{5+\frac{1}{n}-\frac{5}{n^3}}}{\sqrt[4]{32+\frac{5}{n^8}}+\sqrt[3]{2-\frac{14}{n}}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[4]{32}+\sqrt[3]{2}}=\frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{2}}.$$

б) В данном примере мы имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Для ее раскрытия умножим и разделим выражение на сопряженное, чтобы избавиться от иррациональности. В этом случае мы пользуемся формулой сокращенного умножения $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b$. Тем самым мы придем к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, метод раскрытия которой приведен в пункте а).

$$\lim_{n\to\infty}n\sqrt{n}\left(\sqrt{n^3+6}-\sqrt{n^3-4}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}\left(\sqrt{n^3+6}-\sqrt{n^3-4}\right)\cdot\left(\sqrt{n^3+6}+\sqrt{n^3-4}\right)}{\sqrt{n^3+6}+\sqrt{n^3-4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}\left(n^3+6-\left(n^3-4\right)\right)}{\sqrt{n^3+6}+\sqrt{n^3-4}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10\cdot n\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+6}+\sqrt{n^3-4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{10\cdot n\sqrt{n}}{n^{3/2}\sqrt{1+\frac{6}{n^3}}+n^{3/2}\sqrt{1-\frac{4}{n^3}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10\cdot n^{3/2}}{n^{3/2}\left(\sqrt{1+\frac{6}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{4}{n^3}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{\sqrt{1+\frac{6}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{4}{n^3}}}=\frac{10}{1+1}=5.$$

Замечание: Если мы имеем иррациональность вида $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$, то необходимо умножить и разделить выражение на $\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{ab}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2$. В этом случае мы пользуемся формулой $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\cdot\left(\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{ab}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right)=a-b$.

в) Рассмотрим выражение $\frac{n^2+3n+2}{n^2+4}$. Его предел при $n\to\infty$, используя пункт а), равен

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+2}{n^2+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}}=\frac{1}{1}=1.$$

Таким образом, при нахождении предела $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+4}\right)^{3n}$ мы имеем неопределенность вида 1^∞. Воспользуемся вторым замечательным пределом $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, или эквивалентным ему $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\beta(n)}\right)^{\beta(n)}=e$, где $\beta(n)$ – бесконечно большая величина (т.е $\beta(n)\to\infty$ при $n\to\infty$).

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+4}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2+3n+2}{n^2+4}-1\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n-2}{n^2+4}\right)^{3n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+4}{3n-2}}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+4}{3n-2}}\right)^{\frac{n^2+4}{3n-2}\cdot\frac{3n}{\frac{n^2+4}{3n-2}}}=(*)$$

Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+4}{3n-2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}{n\left(3-\frac{2}{n}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}{3-\frac{2}{n}}=\infty$, то $\beta(n)=\frac{n^2+4}{3n-2}$ является бесконечно большой при $n\to\infty$, а значит

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+4}{3n-2}}\right)^{\frac{n^2+4}{3n-2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\beta(n)}\right)^{\beta(n)}=e.$$

Тогда

$$(*)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+4}{3n-2}}\right)^{\frac{n^2+4}{3n-2}\cdot\frac{3n}{\frac{n^2+4}{3n-2}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{\frac{n^2+4}{3n-2}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n\cdot(3n-2)}{n^2+4}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9n^2-6n}{n^2+4}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2\left(9-\frac{6}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9-\frac{6}{n}}{1+\frac{4}{n^2}}}=e^{\frac{9}{1}}=e^9.$$

Задание 2. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x+5}{4x^2+5x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-5x+4}{3x^2-10x-8}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 4x^2}{\left(e^x-1\right)\cdot x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-5x^2+3x+6}{x^4-5x^2+4}$; е) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{x+6}-\sqrt[3]{5x-2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}$; ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin^2x}-1}{\ln\left(3x^3+2x^2+1\right)}$.

Решение

а) Ход решения этого примера аналогичен приведенному в задании 1а) для последовательностей.

б) и д) В данных примерах имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Учитывая, что и в числителе и в знаменателе стоят многочлены, это означает, что при разложении их на множители мы будем иметь общий множитель: $\left(x-x_0\right)$ (это следует из того, что $\left(x-x_0\right)$ обращает в ноль и числитель, и знаменатель).

В случае, когда многочлен является квадратным, используют равенство $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$, где x_1, x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

В случае, когда степень многочлена больше второй, можно использовать деление многочлена на многочлен «в столбик», или использовать любой другой способ, который позволит выделить общий множитель.

Таким образом, имеем

$$\lim_{x\to4}\frac{x^2-5x+4}{3x^2-10x-8}=\lim_{x\to4}\frac{(x-1)(x-4)}{3(x-4)\left(x+\frac{2}{3}\right)}=\lim_{x\to4}\frac{x-1}{3\left(x+\frac{2}{3}\right)}=\lim_{x\to4}\frac{x-1}{3x+2}=\frac{3}{14}.$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+3x+6}{x^4-5x^2+4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(x^2-3x-3\right)}{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x-3}{(x+2)(x-1)(x+1)}=\frac{-5}{4\cdot 1\cdot 3}=-\frac{5}{12}.$$

в) и ж) Для решения данных примеров можно воспользоваться таблицей эквивалентных бесконечно малых.

Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x\to x_0$ (т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$), то при $x\to x_0$ имеем:

$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$	$tg\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$
$arctg\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$	$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$
$1-\cos^2\alpha(x)\sim\alpha(x)$	$\ln\left(1+\alpha(x)\right)\sim\alpha(x)$
$\log_a\left(1+\alpha(x)\right)\sim\dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$	$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$
$a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\cdot\ln a$	$\left(1+\alpha(x)\right)^n\sim 1+n\cdot\alpha(x)$

Теорема. Если $\alpha(x)\sim\alpha'(x)$, $\beta(x)\sim\beta'(x)$ – эквивалентные бесконечно малые при $x\to x_0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$.

Таким образом, для в) имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 4x^2}{\left(e^x-1\right)\cdot x}=\left|\begin{array}{c}\arcsin 4x^2\sim 4x^2\\ e^x-1\sim x\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^2}=4.$$

Для ж) рассмотрим выражение, стоящее в числителе $e^{\sin^2 x}-1$. Т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 x=0$, то функция $\sin^2 x$ является бесконечно малой при $x\to 0$. В соответствии с таблицей эквивалентных бесконечно малых имеем $e^{\sin^2 x}-1\sim\sin^2 x$ при $x\to 0$. В свою очередь $\sin x\sim x$ при $x\to 0$, а значит, мы имеем следующую цепочку эквивалентностей $e^{\sin^2 x}-1\sim\sin^2 x\sim x^2$ при $x\to 0$.

Проводя аналогичные рассуждения в знаменателе, получим $\ln\left(1+3x^3+2x^2\right)\sim\left(3x^3+2x^2\right)$ при $x\to 0$.

Таким образом, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin^2 x}-1}{\ln\left(3x^3+2x^2+1\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^3+2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(3x+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3x+2}=\frac{1}{2}.$$

г) Вычисление данного примера основано на втором замечательном пределе $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ или, в другой форме, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\beta(x)}\right)^{\beta(x)}=e$, где $\beta(x)$ -

бесконечно большая функция при $x \to \infty$ (т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}\beta(x)=\infty$). Ход решения этого примера аналогичен приведенному в задании 1в) для последовательностей.

е) Ход решения этого примера аналогичен приведенному в задании 1б) для последовательностей.

Замечание. В некоторых заданиях удобно пользоваться правилом Лопиталя.

Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей $\frac{\infty}{\infty}$. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 (кроме, может быть самой точки x_0), в этой окрестности $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, $\varphi'(x)\neq 0$. Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в нуль в этой точке: $f(x_0)=\varphi(x_0)=0$. Пусть $\varphi'(x)\neq 0$ в окрестности точки x_0. Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l$.

Замечание. Оба этих правила верны, если вместо x_0 стоит ∞

Например: а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{tgx}-e^x}{tgx-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{3/x^2}$.

а)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{tgx}-e^x}{tgx-x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{tgx}-e^x\right)'}{(tgx-x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-e^x}{\frac{1}{\cos^2 x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-e^x}{\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-e^x}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{tgx}-e^x\cdot\cos^2 x}{\sin^2 x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{tgx}-e^x\cdot\cos^2 x\right)'}{\left(\sin^2 x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-e^x\cdot\cos^2 x-e^x\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)}{2\sin x\cdot\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-e^x\cdot\cos^2 x+e^x\cdot\sin 2x}{\sin 2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-e^x\cdot\cos^2 x}{\sin 2x}+e^x\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{tgx}-e^x\cdot\cos^4 x}{\sin 2x\cdot\cos^2 x}\right)+\lim_{x\to0}e^x=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{tgx}-e^x\cdot\cos^4 x}{\sin 2x\cdot\cos^2 x}\right)+1=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\left(e^{tgx}-e^x\cdot\cos^4 x\right)'}{\left(\sin 2x\cdot\cos^2 x\right)'}\right)+1=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-e^x\cdot\cos^4 x-e^x\cdot4\cos^3 x\cdot(-\sin x)}{2\cos 2x\cdot\cos^2 x+\sin 2x\cdot2\cos x\cdot(-\sin x)}\right)+1=\frac{0}{2}+1=1.$$

б) В данном пределе мы имеем неопределенность вида 1^∞. Преобразуем ее к неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{3/x^2}=\lim_{x\to0}e^{\frac{3\ln(\cos x)}{x^2}}=(*)$$

В силу непрерывности функции e^x получаем $\lim_{x\to0}e^{\frac{3\ln(\cos x)}{x^2}}=e^{\lim_{x\to0}\frac{3\ln(\cos x)}{x^2}}$. Т.е нам необходимо вычислить предел

$$\lim_{x\to0}\frac{3\ln(\cos x)}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\left(3\ln(\cos x)\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{3\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}=$$

$$=-\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{tg\,x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=-\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{(tg\,x)'}{x'}=-\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1}=-\frac{3}{2}.$$

Таким образом, получаем, что (*) $=e^{-3/2}$.

Задание 3. Исследовать функцию на непрерывность. Сделать чертеж.

$$\text{а) } y=\begin{cases}-x, & \text{если } x\le0\\ x^2, & \text{если } 0<x\le2\\ x+1, & \text{если } x>2\end{cases},\quad \text{б) } y=12^{\frac{4}{x-3}}.$$

Решение

а) Данная функция непрерывна для $x\in(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(2,+\infty)$, так как на каждом из этих интервалов формулы, задающие функцию, определяют элементарные непрерывные функции. Точками разрыва могут быть лишь точки $x=0$ и $x=2$, в которых меняется аналитическое выражение функции.

Исследуем точку $x=0$. Для этого найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to -0} y = \lim_{x\to -0}(-x) = 0,\ \lim_{x\to +0} y = \lim_{x\to +0} x^2 = 0$$

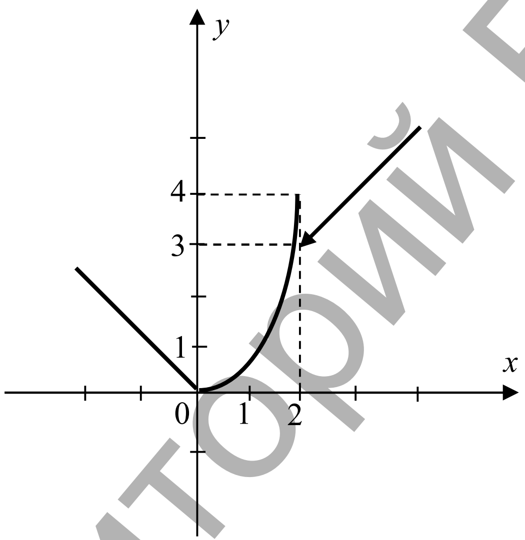
и значение функции в точке 0, т.е. $y(0) = -0 = 0$. Таким образом, получаем выполнение условия непрерывности $\lim\limits_{x\to -0} y = \lim\limits_{x\to +0} y = y(0)$. Т.е. функция непрерывна в точке $x=0$.

Исследуем точку $x=2$. Вычислив односторонние пределы

$$\lim_{x\to 2-0} y = \lim_{x\to 2-0}\left(x^2\right) = 4,\ \lim_{x\to 2+0} y = \lim_{x\to 2+0}(x+1) = 3$$

видим, что они конечны и не совпадают между собой. Т.е. исходная функция имеет точку разрыва первого рода в $x=2$.

Построим схематически график функции.

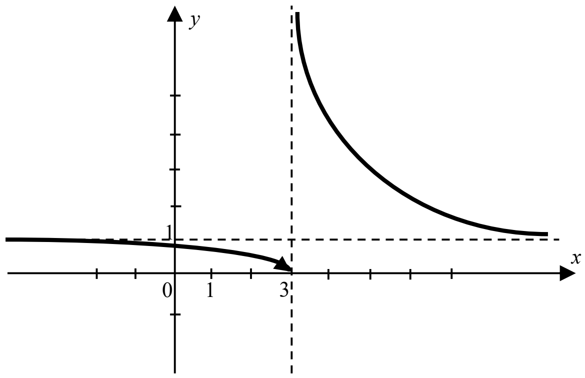


б) Элементарная функция $y = 12^{\frac{4}{x-3}}$ определена везде, кроме точки $x=3$. Таким образом, получаем, что она непрерывна на $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$, а в точке $x=3$ имеем разрыв. Определим его характер.

Т.к. $\lim\limits_{x\to 3-0} y = \lim\limits_{x\to 3-0} 12^{\frac{4}{x-3}} = \left(12^{-\infty}\right) = 0$, $\lim\limits_{x\to 3+0} y = \lim\limits_{x\to 3+0} 12^{\frac{4}{x-3}} = \left(12^{+\infty}\right) = +\infty$ мы имеем точку разрыва второго рода (один из односторонних пределов равен бесконечности).

Для схематического построения графика функции найдем $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} 12^{\frac{4}{x-3}} = 12^0 = 1$. Это означает, что при бесконечном удалении от начала координат график функции будет приближаться к горизонтальной прямой $y=1$.

Строим график.



Задание 4. Найти производные.

При вычислении производных используются основные правила дифференцирования:

I. $c' = 0$, где $c - const$;	II. $\left(c \cdot u(x)\right)' = c \cdot u'(x)$, где $c - const$;
III. $\left(u(x) + v(x)\right)' = u'(x) + v'(x)$;	IV. $\left(u(x) \cdot v(x)\right)' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$;
V. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$.	

При вычислении производной сложной функции необходимо также пользоваться следующей таблицей производных:

1. $\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	2. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
3. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	4. $\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
5. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$	6. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$
7. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$	8. $\left(tg\, u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
9. $\left(ctg\, u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$	10. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
11. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	12. $\left(arctg\, u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
13. $\left(arcctg\, u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$	14. $\left(sh u\right)' = ch u \cdot u'$
15. $\left(ch u\right)' = sh u \cdot u'$	16. $\left(th u\right)' = \dfrac{1}{ch^2 u} \cdot u'$
17. $\left(cth u\right)' = -\dfrac{1}{sh^2 u} \cdot u'$	

Например: а) $y = \dfrac{ctg\left(\ln 2\right) \cdot \sin^2 3x}{arctg\, e^{2x}}$; б) $y = x^{\sin x}$.

Решение

а) Учитывая, что $ctg\left(\ln 2\right)$ является константой, то в соответствии с II имеем

$$y' = \left(\frac{ctg\left(\ln 2\right) \cdot \sin^2 3x}{arctg\, e^{2x}} \right)' = ctg\left(\ln 2\right) \cdot \left(\frac{\sin^2 3x}{arctg\, e^{2x}} \right)' = (*)$$

Далее используем производную частного V и производные сложной функции

$$(*) = ctg\left(\ln 2\right) \cdot \left(\frac{\sin^2 3x}{arctg\, e^{2x}} \right)' = ctg\left(\ln 2\right) \cdot \frac{\left(\sin^2 3x\right)' \cdot arctg\, e^{2x} - \sin^2 3x \cdot \left(arctg\, e^{2x}\right)'}{arctg^2\, e^{2x}} =$$

$$= ctg\left(\ln 2\right) \cdot \frac{2 \cdot \sin 3x \cdot \left(\sin 3x\right)' \cdot arctg\, e^{2x} - \sin^2 3x \cdot \dfrac{1}{1 + \left(e^{2x}\right)^2} \cdot \left(e^{2x}\right)'}{arctg^2\, e^{2x}} =$$

$$= ctg\left(\ln 2\right) \cdot \frac{2 \cdot \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot \left(3x\right)' \cdot arctg\, e^{2x} - \sin^2 3x \cdot \dfrac{1}{1 + e^{4x}} \cdot e^{2x} \cdot \left(2x\right)'}{arctg^2\, e^{2x}} =$$

$$= ctg\left(\ln 2\right) \cdot \frac{\sin 6x \cdot 3 \cdot arctg\, e^{2x} - \sin^2 3x \cdot \dfrac{1}{1 + e^{4x}} \cdot e^{2x} \cdot 2}{arctg^2\, e^{2x}} =$$

$$= ctg\left(\ln 2\right) \cdot \frac{3 \cdot \sin 6x \cdot \left(1 + e^{4x}\right) \cdot arctg\, e^{2x} - 2 \cdot \sin^2 3x \cdot e^{2x}}{\left(1 + e^{4x}\right) \cdot arctg^2\, e^{2x}}.$$

б) Для вычисления этой производной прологарифмируем обе части по основанию *e* и воспользуемся свойствами логарифма. Получаем

$$\ln y = \ln x^{\sin x} \;\Leftrightarrow\; \ln y = \sin x \cdot \ln x.$$

От обеих частей полученного равенства возьмем производную, помня при этом, что $\ln y$ является сложной функцией, где $y = x^{\sin x}$. Тогда

$$\left(\ln y\right)' = \left(\sin x \cdot \ln x\right)',\;\; \frac{1}{y} \cdot y' = \left(\sin x\right)' \cdot \ln x + \sin x \cdot \left(\ln x\right)',$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x},$$

$$y' = y \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \right).$$

Подставив $y = x^{\sin x}$, окончательно получаем

$$y' = x^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \right).$$

Задание 5. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в точке, соответствующей значению параметра $t = t_0$

$$\begin{cases} x = t^3 - t^2 - 5 \\ y = 3t^2 + 1 \end{cases},\ t_0 = 2$$

Решение

Уравнение касательной имеет вид

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)},$$

а уравнение нормали, как прямой перпендикулярной касательной в точке $\big(x(t_0), y(t_0)\big)$, примет вид

$$x'(t_0)\cdot\big(x - x(t_0)\big) + y'(t_0)\cdot\big(y - y(t_0)\big) = 0.$$

Вычислим $x(2) = 2^3 - 2^2 - 5 = -1$, $y(2) = 3\cdot 2^2 + 1 = 13$.

Производные заданной функции по t имеют вид

$$x'(t) = 3t^2 - 2t,\ y'(t) = 6t,$$

а при $t_0 = 2$

$$x'(2) = 3\cdot 2^2 - 2\cdot 2 = 8,\ y'(2) = 6\cdot 2 = 12.$$

Таким образом, уравнение касательной получаем в виде

$$\frac{x+1}{8} = \frac{y-13}{12} \Leftrightarrow 3(x+1) = 2(y-13) \Leftrightarrow 3x - 2y + 29 = 0,$$

а уравнение нормали

$$8(x+1) + 12(y-13) = 0 \Leftrightarrow 2(x+1) + 3(y-13) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 37 = 0.$$

Задание 6. Найти производную y''_{xx}: $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 4\sin^2 t \end{cases}$.

Решение

Т.к. $y''_{xx} = \left(y_x'\right)_x' = \dfrac{\left(y_x'\right)_t'}{x_t'}$, то необходимо сначала вычислить $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Найдем

$$y_t' = \left(4\sin^2 t\right)_t' = 8\cdot\sin t\cdot(\sin t)_t' = 8\cdot\sin t\cdot\cos t \text{ и } x_t' = (2\cos t)_t' = -2\cdot\sin t.$$

Тогда $y_x' = \dfrac{y_t'}{x_t'} = \dfrac{8\cdot\sin t\cdot\cos t}{-2\cdot\sin t} = -4\cdot\cos t$.

Теперь найдем $y''_{xx} = \dfrac{\left(y_x'\right)_t'}{x_t'} = \dfrac{(-4\cdot\cos t)_t'}{-2\sin t} = \dfrac{4\sin t}{-2\sin t} = -2$.

Задание 7. Провести полное исследование функции и построить ее график

$$y=\frac{x^3}{(x-3)^2}.$$

Решение

Исследование функции проведем в соответствием со *схемой полного исследования*:

1. Найти область определения функции.
2. Найти (если это возможно) точки пересечения графика с осями координат.
3. Исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность.
4. Найти точки разрыва функции, вертикальные и наклонные асимптоты.
5. Определить интервалы возрастания и убывания функции, точки экстремума; вычислить значения экстремумов.
6. Указать интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

Для нашей функции имеем:

1. Областью определения является множество $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$.

2. Точка пересечения с осью OX определяется из уравнения $y=0$. В нашем случае

$$\frac{x^3}{(x-3)^2}=0 \Leftrightarrow x^3=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Значит, в точке $O(0,0)$ график заданной функции пересекает ось абсцисс.

Т.к. $y(0)=\dfrac{0^3}{(0-3)^2}=0$, то эта же точка также является точкой пересечения графика с осью ординат.

3. Найдем $y(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x-3)^2}=-\dfrac{x^3}{(x+3)^2}$. Значит, функция не является ни четной, ни нечетной. Т.е. имеем функцию общего вида.

Замечание. Функция является четной (нечетной), если для любого действительного x из области определения выполняется $y(-x)=y(x)$ ($y(-x)=-y(x)$).

Замечание. То что мы имеем функцию общего вида можно было заключить также из того, что область определения не симметрична относительно нуля.

Т.к. $y(x+T)=\dfrac{(x+T)^3}{(x+T-3)^2}$ совпадает с $y(x)$ только при $T=0$, то функция не является периодической.

Замечание. Функция $y(x)$ называется периодической, если существует $T\neq 0$ такое, что для любого действительного x из области определения выполняется $y(x+T)=y(x)$.

4. Найдем односторонние пределы

$$\lim_{x\to 3-0} y=\lim_{x\to 3-0}\frac{x^3}{(x-3)^2}=\left(\frac{27}{+0}\right)=+\infty,\ \lim_{x\to 3+0} y=\lim_{x\to 3+0}\frac{x^3}{(x-3)^2}=\left(\frac{27}{+0}\right)=+\infty.$$

Т.к. они бесконечны, то имеем точку разрыва второго рода.

Значит, прямая $x=3$ является вертикальной асимптотой.

Найдем наклонные асимптоты $y=k\cdot x+b$.

Имеем

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^3}{(x-3)^2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(x-3)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2\cdot\left(1-\frac{3}{x}\right)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{3}{x}\right)^2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-k\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{(x-3)^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x\cdot(x-3)^2}{(x-3)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x^2-9x}{(x-3)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\cdot\left(6-\frac{9}{x}\right)}{x^2\cdot\left(1-\frac{3}{x}\right)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6-\frac{9}{x}}{\left(1-\frac{3}{x}\right)^2}=\frac{6}{1}=6.$$

Значит, прямая $y=x+6$ является наклонной асимптотой.

5. Найдем производную

$$y'=\left(\frac{x^3}{(x-3)^2}\right)'=\frac{(x^3)'\cdot(x-3)^2-x^3\cdot\left((x-3)^2\right)'}{(x-3)^4}=\frac{3x^2\cdot(x-3)^2-x^3\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}=$$

$$=\frac{3x^2\cdot(x-3)-2x^3}{(x-3)^3}=\frac{x^2\cdot(3x-9-2x)}{(x-3)^3}=\frac{x^2\cdot(x-9)}{(x-3)^3}.$$

Найдем точки в которых производная обращается в нуль

$$y'=0\Leftrightarrow\frac{x^2\cdot(x-9)}{(x-3)^3}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=9\end{array}\right.$$

и точки, где производная неопределенна

$$(x-3)^3\neq 0\Leftrightarrow x\neq 3.$$

Тогда

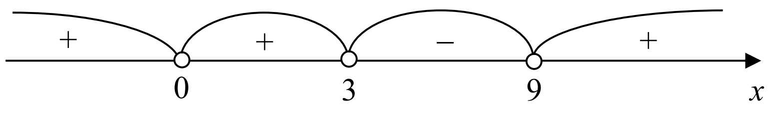


Рис. Знак y'

Функция возрастает на $(-\infty,0)$, $(0,3)$, $(9,+\infty)$.

Функция убывает на $(3,9)$.

Точка $x=9$ - точка максимума. $y(9)=\dfrac{9^3}{(9-3)^2}=\dfrac{81}{4}=20.25$.

6. Найдем вторую производную

$$y''=\left(\frac{x^2\cdot(x-9)}{(x-3)^3}\right)'=\frac{\left(x^3-9x^2\right)'\cdot(x-3)^3-\left(x^3-9x^2\right)\cdot\left((x-3)^3\right)'}{(x-3)^6}=$$

$$=\frac{\left(3x^2-18x\right)\cdot(x-3)^3-\left(x^3-9x^2\right)\cdot 3(x-3)^2}{(x-3)^6}=\frac{\left(3x^2-18x\right)\cdot(x-3)-\left(x^3-9x^2\right)\cdot 3}{(x-3)^4}=$$

$$=\frac{3x^3-18x^2-9x^2+54x-3x^3+27x^2}{(x-3)^4}=\frac{54x}{(x-3)^4}.$$

$y''=0 \Leftrightarrow x=0$

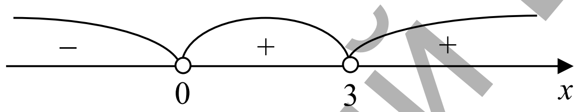


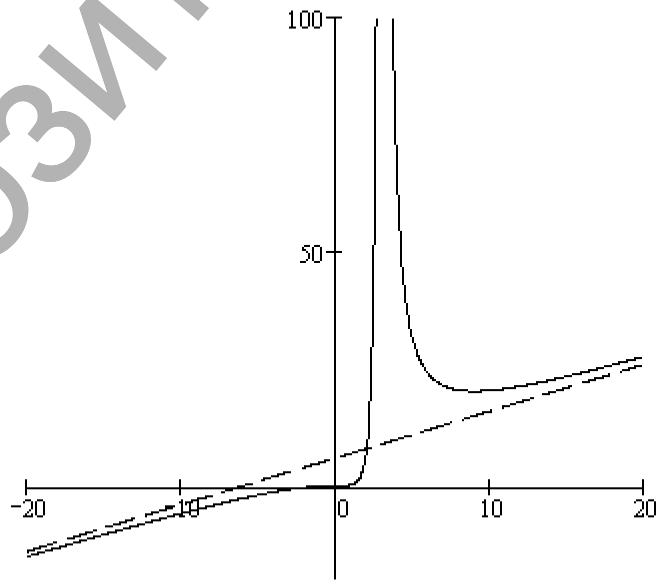
Рис. Знаки y''.

Функция выгнута вверх на $(-\infty,0)$.

Функция выгнута вниз на $(0,3)$, $(3,+\infty)$.

$x=0$ - точка перегиба.

Строим график



Литература

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: Полный курс. – 2-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 608 с.

2. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа (1). – Спб.: Издательство «Лань», 2001. – 448 с.

3. Высшая математика: Учебник. Т.1. / Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. и др. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 328 с.

4. Высшая математика: Учебник. Т.2. / Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. и др. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 184 с.

5. Сборник задач по высшей математике. Часть 1. / Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 576 с.

6. Сухая Т.А., Бубнов В.Ф. Задачи по высшей математике: учеб. Пособие. Часть 1. – Мн.: Вышэйшая школа, 1993. – 416 с.

7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. − М.: Высш. шк., 1997. − 415 с.

8. Индивидуальные задания по высшей математике: Учебное пособие. В трех частях. Часть 1 / Под общей редакцией Рябушко А.П. – Мн., Выш. шк., 2000. – 303 с.

9. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1969. – 256 с.

10. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа / Под редакцией Ефимова А.В., Демидовича Б.П. – М.: Наука, 1981. – 464 с.

Содержание

Учебное издание

Гладкий Иван Иванович
Маньяков Николай Владимирович

Элементы линейной алгебры, аналитической геометрии и математического анализа

Методические указания по дисциплине
«Высшая математика»
для студентов технических специальностей

Редактор **Строкач Т.В.**
Ответственный за выпуск: **Гладкий И.И.**
Технический редактор: **Никитчик А.Д.**
Корректор: **Никитчик Е.В.**

Подписано в печать 27.06.05г. Формат $60\times 84\ {}^1/_{16}$
Бумага писч. Усл. п.л. 3,7. Уч. изд.л. 4,0. Тираж 200 экз. Заказ № 695.

Отпечатано на ризографе
УО «Брестский государственный технический университет»
224017, Брест, ул. Московская, 267.