Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»

Кафедра высшей математики

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические рекомендации и варианты контрольных работ
по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика»
для студентов технических специальностей заочной формы обучения

Брест 2004

УДК 519.2.(076)

В настоящей методической разработке приведены варианты контрольных заданий по разделу “Теория вероятностей и математическая статистика” курса высшей математики для студентов технических специальностей заочной формы обучения, даны методические рекомендации, полезные для успешного выполнения контрольной работы.

Составители: Гладкий И.И., старший преподаватель
Дворниченко А.В., старший преподаватель
Санюкевич А.В., доцент, к.ф.-м.н.

Рецензент: зав. кафедрой математического моделирования УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н., доцент **С.А. Тузик.**

Организационно-методические указания

Основной формой работы студента-заочника является самостоятельное изучение материала. После прослушивания установочных лекций, приступая к любой теме, следует ознакомиться с содержанием основных ее вопросов, указанных в программе, с методическими указаниями, и, наконец, обратиться к рекомендуемой литературе. Для контроля за усвоением материала желательно ответить на вопросы для самопроверки. Выполнение письменной контрольной работы является важной составляющей при изучении курса "Теория вероятности". Она существенно способствует пониманию материала курса и является основой проверки степени усвоения студентом приобретенных знаний.

Номер варианта контрольной работы совпадает с двумя последними цифрами номера зачетной книжки.

При выполнении контрольной работы следует руководствоваться следующими требованиями.

1. Контрольная работа должна быть выполнена и представлена на проверку в срок, предусмотренный учебным планом.
2. Перед решением каждой задачи необходимо привести ее условие.
3. Решение задач сопровождается необходимыми формулами, развернутыми расчетами, краткими пояснениями.
4. Работа должна быть оформлена аккуратно, написана число, разборчиво, без зачеркиваний. Необходимо оставить поля для замечаний рецензента и пронумеровать страницы.
5. В конце работы надо указать перечень использованной литературы, поставить подпись и дату.

При удовлетворительном выполнении работа оценивается "допущена к защите". Студент обязан учесть все замечания рецензента и, не переписывая работу, внести в нее необходимые исправления. Только после этого проводится ее защита.

В случае, если работа "не допущена к защите", студент делает исправления, вносит дополнения и представляет на проверку оба варианта выполнения контрольной работы.

Если при работе над заданиями возникают затруднения, студенту следует обратиться за помощью на кафедру высшей математики БГТУ.

Вопросы учебной программы по теории вероятностей и математической статистике

Теория вероятностей

1. Элементы комбинаторики: перестановки, сочетания и размещения.
2. События и их виды. Алгебра событий.
3. Вероятность событий. Свойства вероятности. Способы вычисления вероятностей случайных событий (классический, геометрический и статистический).
4. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
5. Формулы полной вероятности и Байеса.
6. Схема повторных испытаний. Формула Бернулли.
7. Предельные случаи в схеме Бернулли: локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа, формула Пуассона.
8. Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности в схеме Бернулли.
9. Случайные величины. Закон распределения ДСВ.
10. Функция распределения одномерной СВ, свойства функций распределения.
11. Плотность распределения вероятностей НСВ, свойства плотности.
12. Числовые характеристики ДСВ и НСВ.
13. Примеры законов распределения ДСВ: биномиальное распределение и распределение Пуассона.
14. Примеры законов распределения НСВ: равномерное, нормальное и показательное.
15. Понятие закона больших чисел (неравенство и теорема Чебышева, теорема Бернулли).
16. Понятие центральной Предельной теоремы Ляпунова.
17. Понятие двумерной случайной величины. Закон распределения двумерной СВ. Функция распределения двумерной СВ.
18. Плотность совместного распределения вероятностей непрерывной двумерной СВ.
19. Условные законы распределения компонент двумерной СВ.
20. Корреляционный момент и коэффициент корреляции. Коррелированность и зависимость случайных величин.

Математическая статистика

1. Статистическая совокупность. Генеральная и выборочная совокупности.
2. Статистическое распределение выборки. Геометрическое изображение статистических рядов.
3. Эмпирическая функция распределения.
4. Основные числовые характеристики выборки.
5. Понятие статистической оценки неизвестных параметров распределения. Точечные оценки и их классификация.

6. Интервальные оценки параметров распределения. Доверительный интервал.
7. Доверительные интервалы для оценки параметров нормального распределения.
8. Распределения χ^2 (“хи” - квадрат) и Стьюдента.
9. Статистическая проверка гипотез. Нулевая и альтернативная гипотезы. Ошибки 1 -го и 2 -го рода при проверке гипотез. Уровень значимости, критическая область. Статистический критерий и его мощность.
10. Критерии согласия χ^2 и Колмогорова.
11. Основные понятия корреляционного регрессионного анализа.
12. Линейная корреляционная зависимость и прямые среднеквадратических

Задания к контрольной работе по теме «*Теория вероятностей*»

Задание 1.

1.1 Первый рабочий изготавливает 40% деталей второго сорта, а второй - 30%. У каждого рабочего взято наугад по две детали. Какова вероятность того, что: а) все четыре детали - второго сорта; б) хотя бы три детали второго сорта; в) менее трёх деталей второго сорта.

1.2 Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течении смены потребует его внимания первый станок, равна 0,7, второй – 0,65, третий – 0,55. Найти вероятность того, что в течении смены потребуют его внимания: а) два станка; б) не менее двух станков; в) хотя бы один станок.

1.3 Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,8, второй – 0,7, третий – 0,65. Вычислить вероятность того, что студент сдаст: а) два экзамена; б) не менее двух экзаменов; в) хотя бы один экзамен.

1.4 На железобетонном заводе № 1 изготовляют панели, 90% из которых - высшего сорта; на заводе № 2 - панели, 85% из которых - высшего сорта. Для строительства взяли одну панель завода № 1 и две панели завода № 2. Какова вероятность того, что из трёх выбранных панелей высшего сорта будут: а) три панели; б) хотя бы одна панель; в) не более одной панели.

1.5 В прибор входят три радиолампы. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны: 0,2; 0,15; 0,25. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) не менее двух радиоламп; б) ни одной радиолампы; в) хотя бы одна.

1.6 В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности того, что в данный момент камера включена, соответственно равны: 0,9; 0,8; 0,7. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) две камеры; б) не более одной камеры; в) три камеры.

1.7 Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,8, вторым – 0,75, третьим – 0,6. Все стрелки сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что цель поражена: а) хотя бы один раз; б) три раза; в) один раз.

1.8 В первом ящике – 25 деталей, 18 из них - стандартные, во втором ящике – 30 деталей, 24 из них - стандартные. Из каждого ящика наугад берут по две детали. Какова вероятность того, что: а) все детали будут стандартными; б) хотя бы одна деталь - стандартная; в) три детали - нестандартные.

1.9 Самолет обнаруживается тремя радиолокаторами с вероятностями 0,6; 0,75; 0,8. Какова вероятность обнаружения самолета: а) одним радиолокатором; б) двумя радиолокаторами; в) хотя бы одним радиолокатором.

1.10 В схему входят три узла. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны: 0,3; 0,2; 0,4. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) не менее двух узлов; б) ни одного узла; в) хотя бы один узел.

1.11 Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,7, третьим – 0,65. Все стрелки сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что цель поражена: а) хотя бы один раз; б) два раза; в) один раз.

1.12 В прибор входят четыре радиолампы. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны: 0,3; 0,2; 0,4; 0,25. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) не менее трех радиоламп; б) ни одной радиолампы; в) хотя бы одна.

1.13 Самолет обнаруживается четырьмя радиолокаторами с вероятностями 0,6; 0,9; 0,7; 0,8. Какова вероятность обнаружения самолета: а) одним радиолокатором; б) тремя радиолокаторами; в) хотя бы одним радиолокатором.

1.14 Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,7, второй – 0,95, третий – 0,45. Вычислить вероятность того, что студент сдаст; а) один экзамен; б) ни одного экзамена; в) хотя бы два экзамена.

1.15 На железобетонном заводе № 1 изготовляют панели, 90% из которых - высшего сорта; на заводе № 2 - панели, 85% из которых - высшего сорта. Для строительства взяли две панели завода № 1 и одну панель завода № 2. Какова вероятность того, что из трёх выбранных панелей высшего сорта будут: а) три панели; б) хотя бы одна панель; в) не более одной панели.

1.16 Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,6, вторым – 0,95, третьим – 0,8. Все стрелки сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что цель поражена: а) более одного раза; б) три раза; в) ни одного раза.

1.17 Рабочий обслуживает четыре станка. Вероятность того, что в течении смены потребует его внимания первый станок, равна 0,5, второй – 0,5, третий – 0,55, четвертый – 0,6. Найти вероятность того, что в течении смены потребуют его внимания: а) три станка; б) не менее трех станков; в) хотя бы один станок.

1.18 В первом ящике - 32 детали, из которых 24 - стандартные, во втором ящике - 28 деталей, 14 из них - стандартные. Из каждого ящика наугад берут по две детали. Какова вероятность того, что: а) две детали будут стандартными; б) хотя бы одна деталь - стандартная; в) все детали - нестандартные.

1.19 В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности того, что в данный момент камера включена, соответственно равны: 0,5; 0,6; 0,75. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) три камеры; б) не более двух камер; в) хотя бы одна камера.

1.20 В схему входят четыре узла. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны: 0,2; 0,3; 0,2; 0,1. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) не менее трех узлов; б) один узел; в) хотя бы один узел.

1.21 Первый рабочий изготавливает 35% деталей второго сорта, а второй - 20%. У каждого рабочего взято наугад по две детали. Какова вероятность того, что: а) все четыре детали - второго сорта; б) хотя бы одна деталь второго сорта; в) не менее двух деталей второго сорта.

1.22 Самолет обнаруживается тремя радиолокаторами с вероятностями 0,75; 0,85; 0,6. Какова вероятность обнаружения самолета: а) одним радиолокатором; б) тремя радиолокаторами; в) хотя бы одним радиолокатором.

1.23 Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,7, вторым – 0,9, третьим – 0,5. Все стрелки сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что цель поражена: а) менее двух раз; б) два раза; в) три раза.

1.24 Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,75, второй – 0,9, третий – 0,85. Вычислить вероятность того, что студент сдаст; а) три экзамена; б) не менее одного экзамена; в) более одного экзамена.

1.25 Первый рабочий изготавливает 25% деталей второго сорта, а второй - 35%. У каждого рабочего взято наугад по две детали. Какова вероятность того, что: а) ни одной детали второго сорта; б) хотя бы две детали второго сорта; в) не менее трёх деталей второго сорта.

1.26 В первом ящике - 24 детали, из которых 16 - стандартные, во втором ящике - 18 деталей, 15 из них - стандартные. Из каждого ящика наугад берут по две детали. Какова вероятность того, что: а) три детали будут стандартными; б) хотя бы две детали - стандартные; в) ни одной стандартной детали.

1.27 В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности того, что в данный момент камера включена, соответственно равны: 0,7; 0,85; 0,75. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) две камеры; б) не более двух камер; в) хотя бы одна камера.

1.28 Три автомата изготавливают детали. Вероятность того, что деталь, изготовленная первым автоматом, - высшего качества, равна 0,5, для второго – 0,75, для третьего – 0,9. Наугад берут по одной детали с каждого автомата. Найти вероятность того, что из взятых деталей: а) две высшего качества; б) хотя бы две высшего качества; в) одна высшего качества.

1.29 В схему входят три узла. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны: 0,15; 0,3; 0,1. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) два узла; б) ни одного узла; в) хотя бы один узел.

1.30 В прибор входят четыре радиолампы. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны: 0,1; 0,2; 0,35; 0,2. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) не менее трех радиоламп; б) одна радиолампа; в) хотя бы одна.

Задание 2. На фабрике производятся швейные изделия. Вероятность появления брака равна p. Была введена упрощенная система контроля изделий, состоящая из двух независимых проверок. В результате $k-$й проверки ($k = 1,2$) изделие удовлетворяющее стандарту, отбраковывается с вероятностью α_k, а бракованное изделие принимается с вероятностью β_k. Изделие принимается, если оно прошло обе проверки. Найти вероятности событий:

а) бракованное изделие будет принято;
б) изделие, удовлетворяющее стандарту, будет отбраковано;
в) случайно взятое на проверку швейное изделие будет отбраковано;
г) отбракованное изделие удовлетворяет стандарту;
д) из a изделий, взятых на проверку, b изделий будут удовлетворять стандарту.

Данные взять из таблицы 1.

Таблица 1.

№ варианта	p	α_1	α_2	β_1	β_2	a	b
1	0,10	0,05	0,025	0,005	0,005	4	1
2	0,30	0,04	0,02	0,002	0,001	5	1
3	0,20	0,02	0,015	0,001	0,001	6	1
4	0,05	0,03	0,01	0,003	0,001	3	2
5	0,12	0,04	0,015	0,005	0,003	4	2
6	0,15	0,07	0,03	0,006	0,003	5	2
7	0,10	0,03	0,01	0,003	0,001	6	2
8	0,05	0,01	0,005	0,002	0,0015	3	2
9	0,06	0,08	0,03	0,004	0,003	4	3
10	0,12	0,03	0,01	0,002	0,001	5	3
11	0,20	0,07	0,04	0,006	0,004	6	3
12	0,10	0,01	0,005	0,005	0,004	3	1
13	0,08	0,03	0,012	0,001	0,0005	4	1
14	0,10	0,04	0,02	0,003	0,002	5	1
15	0,12	0,05	0,025	0,005	0,0025	6	1
16	0,20	0,07	0,03	0,004	0,003	3	2

Продолжение таблицы 1.

№ варианта	p	α_1	α_2	β_1	β_2	a	b
17	0,05	0,02	0,01	0,001	0,001	4	2
18	0,04	0,03	0,01	0,002	0,001	5	2
19	0,09	0,04	0,02	0,002	0,0015	6	2
20	0,12	0,06	0,03	0,005	0,003	3	2
21	0,20	0,02	0,01	0,003	0,001	4	3
22	0,07	0,01	0,005	0,005	0,002	5	3
23	0,13	0,01	0,006	0,005	0,002	6	3
24	0,12	0,06	0,035	0,006	0,0035	3	1
25	0,06	0,03	0,01	0,002	0,001	4	1
26	0,04	0,07	0,03	0,005	0,003	5	1
27	0,12	0,01	0,005	0,006	0,005	6	1
28	0,08	0,03	0,015	0,005	0,0025	3	2
29	0,13	0,05	0,02	0,001	0,0005	4	2
30	0,30	0,04	0,01	0,003	0,001	5	2

Задание 3. а) Вероятность появления события в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p. Найти вероятность того, что событие наступит ровно m раз.

Данные взять из таблицы 2.

Таблица 2.

№ варианта	n	m	p
1	144	120	0,8
2	110	18	0,15
3	220	140	0,6
4	112	13	0,1
5	99	17	0,2
6	117	85	0,7
7	240	80	0,3
8	115	100	0,9
9	62	5	0,1
10	154	90	0,6

б) Вероятность появления события в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p. Найти вероятность того, что событие наступит не менее m_1 раз и не более m_2 раз.

Данные взять из таблицы 3.

Таблица 3.

№ варианта	n	m_1	m_2	p
11	144	115	125	0,8
12	110	15	20	0,15
13	220	130	145	0,6
14	112	10	14	0,1
15	99	15	20	0,2
16	117	80	100	0,7
17	240	70	90	0,3
18	115	100	110	0,9
19	62	5	10	0,1
20	154	80	100	0,6

в) Вероятность производства бракованной детали равна p. Найти вероятность того, что из взятых на проверку n деталей m бракованных.

Данные взять из таблицы 4.

Таблица 4.

№ варианта	n	m	p
21	1000	6	0,008
22	2500	2	0,001
23	1500	10	0,006
24	3500	5	0,002
25	10000	4	0,0005
26	8000	6	0,0008
27	4500	5	0,0008
28	2000	1	0,0001
29	5000	3	0,0008
30	7000	4	0,0006

Задание 4.

4.01-4.05 При сборке прибора для наиболее точной подгонки основной детали может потребоваться (в зависимости от удачи) i проб с вероятностями p_i. Требуется:

а) составить закон распределения случайной величины X - числа проб, необходимых для удовлетворительной сборки прибора;

б) найти математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение величины X;

в) сколько деталей нужно отпустить сборщику, необходимых для сборки N приборов?

Данные взять из таблицы 5.

Таблица 5.

Вариант	i	N	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
4.01	4	30	0,15	0,25	0,35	0,25	
4.02	5	50	0,09	0,01	0,45	0,35	0,10
4.03	5	40	0,02	0,28	0,15	0,30	0,25
4.04	5	30	0,13	0,15	0,27	0,12	0,33
4.05	4	50	0,27	0,03	0,42	0,28	

4.06-4.10. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны математическое ожидание $M(X)$, дисперсия $D(X)$ и вероятность $p_1 = P(X = x_1)$. Составить закон распределения случайной величины.

Данные взять из таблицы 6.

Таблица 6.

Вариант	$M(X)$	$D(X)$	p_1
4.06	3,7	0,21	0,3
4.07	3,5	0,25	0,5
4.08	3,1	0,09	0,9
4.09	3,6	0,24	0,4
4.10	3,2	0,16	0,8

4.11-4.16. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти:

а) плотность распределения вероятностей;

б) математическое ожидание и дисперсию случайной величины X;

в) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

4.11 $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0.5(x^2 - x), & 1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

4.14 $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0.5(x + 2), & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

4.12 $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{6}(x^2 + x), & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

4.15 $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{8}x^3, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

4.13 $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ (x-2)^2, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

4.16 $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{4}x^2, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

4.17-4.20. Билет на право разового участия в азартной игре стоит x долларов. Игрок выбрасывает две игральные кости и получает выигрыш n долларов, если выпали две шестерки, m долларов – при выпадении только одной шестерки и проигрывает, если ни одной шестерки не появилось. Требуется:

а) составить закон распределения случайной величины X - стоимости выигрыша;

б) найти математическое ожидание и дисперсию величины X;

в) какова должна быть стоимость билета, чтобы игра приносила доход ее учредителям?

Данные взять из таблицы 7.

Таблица 7.

Вариант	n	m
4.17	*100*	*20*
4.18	*200*	*30*
4.19	*100*	*15*
4.20	*150*	*25*

4.21-4.26. Случайная величина задана функцией плотности $f(x)$. Найти:

а) неизвестный параметр A;

б) математическое ожидание и дисперсию величины X;

в) построить график функции $f(x)$.

4.21 $$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ A(x+2), & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

4.24 $$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ A(x-2), & 2<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

4.22 $$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ Ax, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

4.25 $$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ Ax^2, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

4.23 $$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ A(x+1), & -1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

4.26 $$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ A(x-1), & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

4.27-4.30. Автомобиль должен проехать по улице, на которой установлена n светофоров, дающих независимо друг от друга зеленый сигнал в течение t_1 минут, желтый – в течение t_2 минут, красный – в течение t_3 минут. Требуется:

а) написать закон распределения случайной величины X - числа остановок автомобиля на улице;

б) найти математическое ожидание и дисперсию величины X;

в) каково среднее число остановок автомобиля на данном пути?

Данные взять из таблицы 8.

Таблица 8.

Вариант	n	t_1	t_2	t_3
4.27	*4*	*1,5*	*0,4*	*1,1*
4.28	*3*	*1,6*	*0,3*	*1,3*
4.29	*4*	*1,4*	*0,3*	*1,1*
4.30	*3*	*1,5*	*0,2*	*1,3*

Задание 5.

5.01-5.04. В магазине имеется N электрических лампочек. Вероятность продажи каждой из них в течение дня равна p. Какое максимальное число лампочек будет продано в течение дня с вероятностью P?

Данные взять из таблицы 9.

Таблица 9.

Вариант	N	p	P
5.01	*10000*	*0,9*	*0,998*
5.02	*16000*	*0,8*	*0,996*
5.03	*9000*	*0,7*	*0,993*
5.04	*12000*	*0,85*	*0,996*

5.05-5.08. Имеется n станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором их привод оказывается включенным в течение 0,8 всего рабочего времени. Найти вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными: а) ровно m станков; б) не менее r станков.

Данные взять из таблицы 10.

Таблица 10.

Вариант	m	n	r
5.05	*90*	*70*	*65*
5.06	*80*	*50*	*60*
5.07	*70*	*30*	*30*
5.08	*100*	*70*	*40*

5.09-5.12. Завод изготавливает шарики для подшипников. Номинальный диаметр шариков d_0 (мм). Вследствие неточности изготовления шарика фактический его диаметр есть случайная величина, распределенная по нормальному закону со средним значением d_0 и средним квадратическим отклонением σ (мм). При контроле бракуются шарики, диаметр которых отличается от номинального больше, чем ε (мм). Определить: а) какой процент шариков в среднем будет отбраковываться; б) вероятность того, что фактический диаметр шариков будет заключен в границах от α до β (мм).

Данные взять из таблицы 11.

Таблица 11.

Вариант	d_0	ε	σ	α	β
5.09	*5*	*0,1*	*0,04*	*4,93*	*5,02*
5.10	*6*	*0,12*	*0,05*	*5,94*	*6,03*
5.11	*3*	*0,11*	*0,02*	*2,97*	*3,02*
5.12	*8*	*0,09*	*0,03*	*7,95*	*8,08*

5.13-5.16. Детали, выпускаемые цехом, по размерам распределяются по нормальному закону с параметрами: математическое ожидание a (см), дисперсия σ^2 (см^2). Определить: а) вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали имеет размеры от α до β (см); б) в каких границах следует ожидать размер диаметра детали, чтобы вероятность невыхода за эти границы была равна p ?

Данные взять из таблицы 12.

Таблица 12.

Вариант	a	p	σ^2	α	β
5.13	*10*	*0,9922*	*0,0081*	*9,8*	*10,3*
5.14	*8*	*0,9934*	*0,0064*	*7,6*	*8,1*
5.15	*12*	*0,9566*	*0,0049*	*11,5*	*12,3*
5.16	*6*	*0,9936*	*0,0036*	*5,8*	*6,1*

5.17-5.20. Случайные отклонения размера детали от номинала распределены нормально: математическое ожидание размера детали равно a (мм), среднее квадратическое отклонение равно σ (мм). Годными считаются те детали, размер которых заключен в рамках между α и β (мм). Определить: а) вероятность изготовления годной детали; б) процент бракованных изделий, если точность изготовления ухудшится и будет характеризоваться средним квадратическим отклонением σ_1 (мм).

Данные взять из таблицы 13.

Таблица 13.

Вариант	a	σ_1	σ	α	β
5.17	*275*	*0,1*	*0,9*	*273*	*277*
5.18	*290*	*0,9*	*0,8*	*288*	*292*
5.19	*300*	*0,7*	*0,5*	*292*	*301*
5.20	*250*	*0,8*	*0,6*	*249*	*253*

5.21-5.24. В страховой компании застраховано N автомобилей. Вероятность поломки каждого автомобиля в результате аварии равна p. Каждый владелец застрахованного автомобиля платит в год C денежных единиц страховых и в случае поломки автомобиля в результате аварии получает от компании S

денежных единиц. Найти вероятность того, что к концу года страховая компания потерпит убыток.

Данные взять из таблицы 14.

Таблица 14.

Вариант	*N*	*p*	*C*	*S*
5.21	*10000*	*0,006*	*12*	*1000*
5.22	*10000*	*0,005*	*15*	*1500*
5.23	*2000*	*0,004*	*5*	*500*
5.24	*5000*	*0,005*	*7*	*1000*

5.25-5.30. Среднее время работы каждого из трех элементов, входящих в техническое устройство, равно T часов. Для безотказной работы устройства необходима безотказная работа хотя бы одного из трех этих элементов. Определить вероятность, что устройство будет работать от t_1 до t_2 часов, если время работы каждого из трех элементов независимо и распределено по показательному закону.

Данные взять из таблицы 15.

Таблица 15.

Вариант	T	t_1	t_2
5.25	*800*	*650*	*700*
5.26	*1000*	*800*	*900*
5.27	*850*	*750*	*820*
5.28	*1200*	*900*	*1000*
5.29	*900*	*700*	*900*
5.30	*950*	*720*	*850*

Решение типового варианта

Задание 1. Три автомата изготавливают детали. Вероятность того, что деталь, изготовленная первым автоматом, - высшего качества, равна 0,9, для второго – 0,7, для третьего – 0,6. Наугад берут по одной детали с каждого автомата. Найти вероятность того, что из взятых деталей: а) все высшего качества; б) две высшего качества; в) хотя бы одна высшего качества.

Решение. Перед решением задачи необходимо внимательно прочитать условие задачи и обозначить буквами все события, которые могут произойти.

Пусть событие A состоит в том, что все взятые детали высшего качества; событие B состоит в том, что только две из взятых деталей высшего качества; событие C состоит в том, что из взятых деталей хотя бы одна высшего качества. При этом возможны следующие гипотезы: H_1 - деталь, взятая с первого автомата, будет высшего качества, H_2 - деталь, взятая со второго автомата, будет высшего качества, H_3 - деталь, взятая с третьего автомата, будет высшего качества. Из условий задачи находим:

$$P(H_1)=0{,}9,\ P(H_2)=0{,}7,\ P(H_3)=0{,}6,\ P(\overline{H}_1)=1-0{,}9=0{,}1,$$

$$P(\overline{H}_2)=1-0{,}7=0{,}3,\ P(\overline{H}_3)=1-0{,}6=0{,}4.$$

а) Событие A состоит в том, что все три взятые детали высшего качества. Событие, которое состоит в том, что несколько событий произойдут одновременно, называется их произведением. Тогда - $A=H_1\cdot H_2\cdot H_3$. Все эти три гипотезы - независимые события (независимые в совокупности, так как вероятность любого из событий H_i не меняется при наступлении любой из двух других гипотез или обеих вместе). Вероятность произведения событий, независимых в совокупности, равна произведению их вероятностей. Тогда вероятность события A найдем по формуле:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(H_2)\cdot P(H_3)=0{,}9\cdot 0{,}7\cdot 0{,}6=0{,}378.$$

б) Суммой нескольких событий называется событие, которое состоит в том, что произойдет хотя бы одно из этих событий. Событие B равно сумме трех событий. Первое событие: детали с первого и второго автоматов - высшего качества, а с третьего – нет ($H_1\cdot H_2\cdot\overline{H}_3$). Второе событие: детали с первого и третьего автоматов - высшего качества, а со второго - нет ($H_1\cdot\overline{H}_2\cdot H_3$). Третье событие: детали со второго и третьего автоматов - высшего качества, а с первого - нет ($\overline{H}_1\cdot H_2\cdot H_3$). Таким образом,

$$B=H_1\cdot H_2\cdot\overline{H}_3+H_1\cdot\overline{H}_2\cdot H_3+\overline{H}_1\cdot H_2\cdot H_3.$$

Все три слагаемых - несовместные события, так как появление любого из них исключает появление других. Вероятность суммы конечного числа несовместных событий равна сумме их вероятностей. Так как гипотезы - независимые в совокупности события, то вероятность их произведения равна произведению их вероятностей. Тогда вероятность события B найдем по формуле:

$$P(B)=P(H_1)\cdot P(H_2)\cdot P(\overline{H}_3)+P(H_1)\cdot P(\overline{H}_2)\cdot P(H_3)+P(\overline{H}_1)\cdot P(H_2)\cdot P(H_3)=$$

$$=0{,}9\cdot 0{,}7\cdot 0{,}4+0{,}9\cdot 0{,}3\cdot 0{,}6+0{,}1\cdot 0{,}7\cdot 0{,}6=0{,}252+0{,}162+0{,}042=0{,}456.$$

в) Два события, одно из которых обязательно должно произойти, но наступление одного из них исключает возможность наступления другого, называются противоположными. Событие, противоположное событию A обозначается $\overline{A}$. Вероятность суммы противоположных событий равна сумме их вероятностей и равна единице, то есть $P(A)+P(\overline{A})=1$. Событие C противоположно событию, которое состоит в том, что ни одна из взятых деталей не будет высшего качества. Тогда - $\overline{C}=\overline{H}_1\cdot\overline{H}_2\cdot\overline{H}_3$. Все эти три гипотезы - независимые в совокупности события и вероятность их произведения равна произведению их вероятностей. Тогда вероятность события C равна

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(\overline{H}_1) \cdot P(\overline{H}_2) \cdot P(\overline{H}_3) = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 1 - 0{,}012 = 0{,}988\,.$$

Задание 2. На фабрике производятся швейные изделия. Вероятность появления брака равна 0,11. Была введена упрощенная система контроля изделий, состоящая из двух независимых проверок. В результате $k-$й проверки ($k = 1,2$) изделие удовлетворяющее стандарту, отбраковывается с вероятностью 0,035 и 0,0125, соответственно, а бракованное изделие принимается с вероятностью 0,0045 и 0,0015. Изделие принимается, если оно прошло обе проверки. Найти вероятности событий:

а) бракованное изделие будет принято;
б) изделие, удовлетворяющее стандарту, будет отбраковано;
в) случайно взятое на проверку швейное изделие будет отбраковано;
г) отбракованное изделие удовлетворяет стандарту;
д) из 3 изделий, взятых на проверку, 1 изделие будет удовлетворять стандарту.

Решение. Пусть A - событие, состоящее в том, что изделие удовлетворяет стандарту, $\overline{A}$ - изделие не удовлетворяет стандарту, B_k - изделие принимается при $k-$ой проверке, а $\overline{B}_k$ - изделие бракуется при $k-$ой проверке.

а) Определим вероятность того, что бракованное изделие будет принято. Так как заранее задано, что изделие с браком, то вероятность события $\overline{A}$ не учитывается. Чтобы это изделие было принято, должно произойти событие $B_1 \cdot B_2$, то есть бракованное изделие принимается после обеих проверок. Вероятность этого события будет равна

$$p_1 = \beta_1 \cdot \beta_2 = 0{,}0045 \cdot 0{,}0015 = 0{,}00000675 = 6{,}75 \cdot 10^{-6}\,.$$

б) Найдем вероятность того, что изделие, удовлетворяющее стандарту, будет отбраковано. Здесь также из условия известно, что оно уже удовлетворяет стандарту. Значит соответствующее событие будет равно сумме двух событий: одно - изделие отбраковано при первой проверке $\overline{B}_1$; второе - изделие было принято при первой проверке, но отбраковано при второй $B_1 \cdot \overline{B}_2$. Значит вероятность будет равна (необходимо учесть, что в данном пункте вероятности событий B_1 и B_2 уже иные, нежели в пункте а)):

$$p_2 = P(\overline{B}_1 + B_1 \cdot \overline{B}_2) = \alpha_1 + (1 - \alpha_1) \cdot \alpha_2 = 0{,}035 + 0{,}965 \cdot 0{,}0125 = 0{,}0470625\,.$$

в) Пусть C - событие, состоящее в том, что случайно взятое на проверку швейное изделие будет отбраковано. В первых двух пунктах было известно из условия какое изделие идет на проверку. Теперь же мы не знаем этого. Возможны две гипотезы: H_1 - на проверку идет изделие, удовлетворяющее стандарту; $H_2 -$ на проверку идет бракованное изделие. По условию, $P(H_1) = 1 - p = 1 - 0{,}11 = 0{,}89$, $P(H_2) = p = 0{,}11$. Вероятность искомого события будем искать по формуле полной вероятности. Если событие может произойти лишь при условии наступления какого-либо из несовместных событий-гипотез, образующих полную группу (то есть какое-то одно из них обязательно наступает), то его вероятность равна сумме произведений вероятностей этих гипотез на условные вероятности искомого события при условии, что соответствующие гипотезы произошли. Таким образом, при двух гипотезах

$$P(C)=P(H_1)P(C/H_1)+P(H_2)P(C/H_2).$$

Условная вероятность $P(C/H_1)$ означает вероятность события, которое состоит в том, будет отбраковано изделие, удовлетворяющее стандарту. Тогда, по пункту б) имеем $P(C/H_1)=p_2=0{,}0470625$. В пункте а) найдена вероятность того, что бракованное изделие будет принято. Противоположным ему является событие состоящее в том, что бракованное изделие будет отбраковано. Тогда условная вероятность

$$P(C/H_2)=1-p_1=1-0{,}00000675=0{,}99999325.$$

Найдем вероятность искомого события C:

$$P(C)=0{,}89\cdot 0{,}0470625+0{,}11\cdot 0{,}99999325\approx 0{,}15188.$$

г) Отбракованное изделие удовлетворяет стандарту. Следовательно произошла гипотеза H_1 при условии что наступило событие C. Вероятность этого события найдем по формуле Байеса, которая служит для переоценки вероятностей гипотез после того, как стало известно, что основное событие произошло. Таким образом

$$P(H_1/C)=\frac{P(H_1)\cdot P(C/H_1)}{P(C)}=\frac{0{,}89\cdot 0{,}0470625}{0{,}15188}\approx 0{,}27577.$$

д) Найдем вероятность p_3 того, что одно случайно взятое на проверку швейное изделие удовлетворяет стандарту. Это событие противоположно событию C. Значит, $p_3=1-P(C)=1-0{,}15188=0{,}84812$. Для нахождения вероятности того, что из 3 изделий, взятых на проверку, только одно будет удовлетворять стандарту, воспользуемся формулой Бернулли. Если вероятность **p** наступления события **A** в каждом испытании постоянна, то вероятность того, что событие **A** наступит ровно **m** раз в **n** независимых испытаниях, равна $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$, где $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, $q=1-p$. Для нашего случая, $p=p_3$, $q=1-p_3=P(C)$, $n=a=3$, $m=b=1$. Тогда

$$P_3(1)=C_3^1p^1q^{3-1}=\frac{3!}{1!(3-1)!}p_3P(C)^2=\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 1}\cdot 0{,}84812\cdot 0{,}15188^2\approx 0{,}0587.$$

Задание 3[а]. Вероятность появления события в каждом из 245 независимых испытаний постоянна и равна 0,25. Найти вероятность того, что событие наступит ровно 50 раз.

Решение. Так как число испытаний велико (245), то пользоваться формулой Бернулли крайне затруднительно. Формально ответ может быть получен. Однако нахождение окончательных численных значений связано с очень громоздкими вычислениями. Поэтому для таких случаев были найдены приближенные формулы, которые дают достаточно точные значения искомых вероятностей при сравнительно несложных вычислениях.

В данном примере воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа. Если вероятность **p** наступления события **A** в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что событие **A** наступит ровно **m** раз в **n** независимых испытаниях, приближенно равна

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ определяется равенством

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

а $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ и $q = 1 - p$.

По условию, $n = 245$, $m = 50$, $p = 0,25$, $q = 1 - p = 0,75$. Получим

$$x = \frac{50 - 245 \cdot 0,25}{\sqrt{245 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} = \frac{-11,25}{\sqrt{45,9375}} = -\frac{11,25}{6,778} \approx -1,66.$$

Так как $\varphi(x)$- функция четная ($\varphi(-1,66) = \varphi(1,66)$), то по приложению находим искомую вероятность

$$P_{245}(50) \approx \frac{1}{\sqrt{245 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} \cdot \varphi(1,66) = 0,1006.$$

Задание 3[б]. Вероятность появления события в каждом из 245 независимых испытаний постоянна и равна 0,25. Найти вероятность того, что событие наступит не менее 45 раз и не более 60 раз.

Решение. Если требуется найти вероятность того, что число наступлений события *A* заключено в каких-то границах, то в этом случае используют интегральную теорему Муавра-Лапласа. Если вероятность **p** наступления события **A** в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, а число испытаний достаточно велико, то вероятность того, что событие **A** наступит в **n** независимых испытаниях число раз, заключенное в границах от m_1 до m_2 включительно, приближенно равна

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где функция $\Phi(x)$ - функция Лапласа - определяется равенством

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

а $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

По условию, $n = 245$, $m_1 = 45$, $m_2 = 60$, $p = 0,25$, $q = 1 - p = 0,75$. Получим

$$x_1 = \frac{45 - 245 \cdot 0,25}{\sqrt{245 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} = \frac{-16,25}{\sqrt{45,9375}} \approx -2,40,$$

$$x_2 = \frac{60 - 245 \cdot 0,25}{\sqrt{245 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} = \frac{-1,25}{\sqrt{45,9375}} \approx -0,18.$$

Так как $\Phi(x)$ - функция нечетная ($\varphi(-1,66) = \varphi(1,66)$), то по приложению находим: $\Phi(-2,40) = -\Phi(2,40) \approx -0,4918$, $\Phi(-0,18) = -\Phi(0,18) \approx -0,0714$. Таким образом, искомая вероятность:

$$P_{245}(45 \le m \le 60) \approx \Phi(-0,18) - \Phi(-2,40) = -0,0714 + 0,4918 = 0,4204.$$

Задание 3[в]. Вероятность производства бракованной детали равна 0,002. Найти вероятность того, что из взятых на проверку 1000 деталей 5 бракованных.

Решение. Если число независимых испытаний n достаточно велико ($n > 100$), а вероятность появления события в каждом испытании p постоянна, но мала ($p \le 0,3$), и произведение np остается небольшим (не больше 10), то для отыскания вероятности того, что в этих испытаниях событие A появится ровно m раз, используют приближенную *формулу Пуассона:*

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda_n^m e^{-\lambda_n}}{m!},$$

где $\lambda_n = np$ (среднее число появлений события A).

Поскольку число независимых испытаний $n = 1000$ достаточно велико, а вероятность $p = 0,002$ мала, то воспользуемся формулой Пуассона. По условию задачи $m = 5$. Так как $\lambda_n = np = 1000 \cdot 0,002 = 2$, то искомая вероятность:

$$P_{1000}(5) \approx \frac{2^5 e^{-2}}{5!} = \frac{32e^{-2}}{120} \approx 0,0361.$$

Задание 4.01-4.05. $i=4$, $p_1=0{,}12$, $p_2=0{,}18$, $p_3=0{,}4$, $p_4=0{,}3$, $N=20$.

Решение. а) Закон распределения случайной величины X имеет вид

X	*1*	*2*	*3*	*4*
p	*0,12*	*0,18*	*0,4*	*0,3*

б) Математическое ожидание дискретной СВ X равно

$$M(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 1\cdot 0.12 + 2\cdot 0.18 + 3\cdot 0.4 + 4\cdot 0.3 = 2.88.$$

Дисперсия случайной величины X

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i - M^2(X) = 1\cdot 0{,}12 + 4\cdot 0{,}18 + 9\cdot 0{,}4 +$$

$$+16\cdot 0{,}3 - 2{,}88^2 = 9{,}24 - 2{,}88^2 = 0{,}9456.$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0.9456} = 0.97.$$

в) Среднее число проб, необходимых для сборки одного прибора, равно *M(X)*. Следовательно, для сборки *20* приборов в среднем необходимо $20\cdot M(X) = 2{,}88\cdot 20 = 57{,}6 \approx 58$ проб. Итак, для сборки *20* приборов потребуется в среднем *58* деталей.

Задание 4.06-4.10. $M(X)=3{,}8$, $D(X)=0{,}16$, $p_1=0{,}2$.

Решение. Пусть $P(X=x_2)=p_2$, тогда $p_2=1-p_1=1-0{,}2=0{,}8$. Для определения x_1 и x_2 используем условия: $M(X)=3{,}8$ и $D(X)=0{,}16$, $M(X)=0{,}2x_1+0{,}8x_2=3{,}8$, $D(X)=0{,}2x_1^2+0{,}8x_2^2-3{,}8^2=0{,}16$. Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+4x_2=19 \\ x_1^2+4x_2^2=73 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=19-4x_2 \\ (19-4x_2)^2+4x_2^2=73 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=19-4x_2 \\ 5x_2^2-38x_2+72=0. \end{cases}$$

Пара точек (3;4) и $\left(\frac{23}{5};\frac{18}{5}\right)$ есть решение системы. Очевидно, что вторая пара не удовлетворяет условию $x_1<x_2$. Значит закон распределения СВ X имеет вид

X	*3*	*4*
p	*0,2*	*0,8*

Задание 4.11-4.16. $F(X)=\begin{cases}0; & x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{4}; & 0<x\le 2,\\ 1; & x>2.\end{cases}$

Решение. а) Плотность распределения вероятностей СВX имеет вид

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0; & x\le 0,\\ \dfrac{1}{2}x; & 0<x\le 2,\\ 0; & x>2.\end{cases}$$

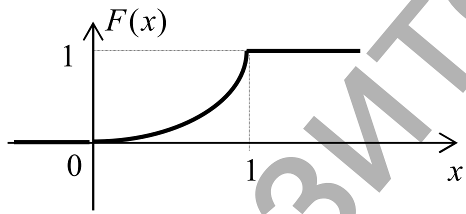
б) Математическое ожидание СВX:

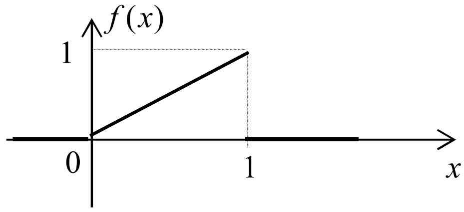
$$M(X)=\int_0^2 \frac{1}{2}x\cdot x dx=\frac{1}{6}x^3\Big|_0^2=\frac{4}{3}.$$

Дисперсия СВХ:

$$D(X)=\int_0^2\frac{1}{2}x\cdot x^2dx-\frac{16}{9}=\frac{1}{8}x^4\Big|_0^2-\frac{16}{9}=2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9}.$$

в) Строим графики функций *F(x)* и *f(x)*





Задание 4.17-4.20. $n=150$, $m=50$.

Решение. а) Стоимость выигрыша есть случайная величина X, принимающая три возможных значения $x_1=0$, $x_2=50$, $x_3=150$. Найдем вероятности, с которыми величина X принимает свои значения:

$$P(X=0)=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{36};\quad P(X=50)=2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{10}{36};\quad P(X=150)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}.$$

Следовательно, закон распределения X примет вид:

X	*0*	*50*	*150*
p	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

б) Математическое ожидание X:

$$M(X) = 0 \cdot \frac{25}{36} + 50 \cdot \frac{10}{36} + 150 \cdot \frac{1}{36} = 18,05.$$

Дисперсия случайной величины X:

$$D(X) = 0 \cdot \frac{25}{36} + 50^2 \cdot \frac{10}{36} + 150^2 \cdot \frac{1}{36} - 18,05^2 = 475,00 - 18,05^2 = 47174,20$$

в) Среднее ожидаемое значение выигрыша равно *18,05* долларов. Поэтому билет должен стоить не менее *18,05* долларов.

Задание 4.21-4.26. $f(x) = \begin{cases} 0; \ x \le 1, \\ A(2x-1); \ 1 < x \le 2, \\ 0; \ x > 2. \end{cases}$

Решение. а) Из условия нормировки будем иметь

$$A\int_{-\infty}^{\infty}(2x-1)dx = 1 \Rightarrow A\int_1^2 (2x-1)dx = A(x^2 - x)\Big|_1^2 = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, функция плотности запишется в виде

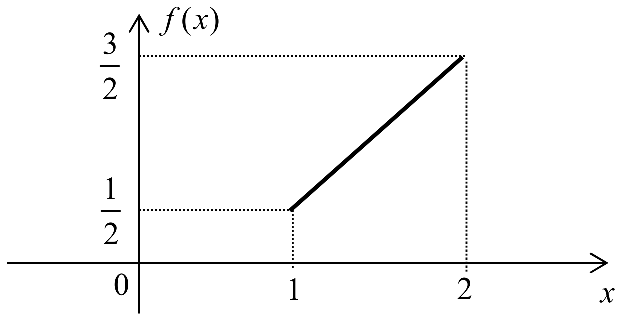
$$f(x) = \begin{cases} 0; \quad x \le 1, \\ 0.5(2x-1); \quad 1 < x \le 2, \\ 0; \quad x > 2. \end{cases}$$

б) Находим числовые характеристики СВ X:

$$M(X) = \frac{1}{2}\int_1^2 x(2x-1)dx = \frac{1}{2}\int_1^2 (2x^2 - x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2 = \frac{19}{12},$$

$$D(X) = \frac{1}{2}\int_1^2 x^2(2x-1)dx - \left(\frac{19}{12}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^2 - \left(\frac{19}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}.$$

в) Строим график функции *f(x)*:



Задание 4.27-4.30. $t_1 = 1{,}55$, $t_2 = 0{,}35$, $t_3 = 1{,}20$, $n = 4$.

Решение. а) В нашем случае $t_1 = t_2 + t_3$, т.е. время, в течение которого светофор разрешает проезд (зеленый свет), равно времени, при котором проезд запрещен (желтый и красный свет). Значит, вероятность того, что светофор пропустит или задержит машину, одна и та же и равна $p = \dfrac{1}{2}$. Случайная величина *X* может принимать значения *0, 1, 2, 3, 4* соответственно с вероятностями, которые находятся по формуле Бернулли:

$$P(X=0) = C_4^0 p^0 q^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0{,}0625,$$

$$P(X=1) = C_4^1 p^1 q^3 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0{,}2500,$$

$$P(X=2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0{,}3750,$$

$$P(X=3) = C_4^3 p^3 q = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0{,}2500,$$

$$P(X=4) = C_4^4 p^4 q^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0{,}0625.$$

Закон распределения случайной величины *X*:

X	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
p	*0,0625*	*0,2500*	*0,3750*	*0,2500*	*0,0625*

б) Математическое ожидание ДСВ*X*:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}0625 + 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}375 + 3 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}0625 = 2,$$

$$D(X) = 0^2 \cdot 0{,}0625 + 1^2 \cdot 0{,}25 + 2^2 \cdot 0{,}375 + 3^2 \cdot 0{,}25 + 4^2 \cdot 0{,}0625 - 4 = 1.$$

в) Ожидаемое число остановок автомобиля на данной улице равно *2*.

Задание 5.01-5.04. $N = 60000$, $p = 0{,}6$, $P = 0{,}9973$.

Решение. Пусть *m* – максимальное число лампочек, проданных в течение дня. Тогда по условию задачи $P(0 < k < m) = 0{,}9973$. Применяя интегральную формулу Муавра-Лапласа, получим

$$P(0 < k < m) = P_N(0; m) \approx \Phi\left(\frac{m - pN}{\sqrt{Npq}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - pN}{\sqrt{Npq}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{m-60000\cdot 0,6}{\sqrt{60000\cdot 0,6\cdot 0,4}}\right)+\Phi\left(\frac{60000\cdot 0,6}{\sqrt{60000\cdot 0,6\cdot 0,4}}\right)=$$

$$= \Phi\left(\frac{m-36000}{120}\right)+\Phi\ (300)=0,9973.$$

Так как *Ф(300) = 0,5*, то

$$\Phi\left(\frac{m-36000}{120}\right)+0,5=0,9973,$$

откуда

$$\Phi\left(\frac{m-36000}{120}\right)=0,4973.$$

По таблице значений функции Лапласа находим, что

$$\Phi(2,77)=0,4972\text{, т.е. }\frac{m-36000}{120}=2,77,\ m=36333.$$

Итак, с вероятностью *0,9973* можно утверждать, что наибольшее число лампочек, проданных в течение дня, равно *36333*.

Задание 5.05-5.08. $n=85,\ m=60,\ r=60$.

Решение. а) Воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа, согласно которой

$$P_n(m)\approx\frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}},\quad x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}},\quad \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2).$$

Находим

$$x=\frac{60-0,8\cdot 85}{\sqrt{85\cdot 0,8\cdot 0,2}}=-\frac{8}{3,69}=-2,17.$$

По таблице значений функции $\varphi(x)$ находим:

$$\varphi(-2,17)=0,0379.$$

Следовательно,

$$P_{85}(60)\approx\frac{0,0379}{3,69}=0,01.$$

б) По интегральной формуле Муавра-Лапласа

$$P_{85}(60;\ 85)\approx\Phi\left(\frac{85-85\cdot 0,8}{\sqrt{85\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right)-\Phi\left(\frac{60-85\cdot 0,8}{\sqrt{85\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right)=\Phi(4,61)+\Phi(2,17)=$$

$$=0,5+0,4855=0,9855.$$

Задание 5.09-5.12. $d_0 = 6,\ \sigma = 0{,}04,\ \varepsilon = 0{,}1,\ \alpha = 5{,}97,\ \beta = 6{,}05.$

Решение. а) Пусть случайная величина X – фактический диаметр шарика. По условию $X \in N(a;\sigma) = N(6;0{,}04)$. Найдем вероятность осуществления неравенства $|X - d_0| \le \varepsilon$.

$$P\left(\ |X - d_0| \le \varepsilon\right) = P\left(\ |X - 6| \le 0{,}1\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{0{,}1}{0{,}04}\right) = 2\Phi(2{,}5) = 2 \cdot 0{,}4938 = 0{,}9876.$$

Вероятность противоположного события равна

$$P\left(\ |X - d_0| > \varepsilon\right) = 1 - P\left(\ |X - d_0| \le \varepsilon\right) = 1 - 0{,}9876 = 0{,}0124.$$

Значит в среднем будет отбраковываться *1,24%* шариков.

б) Найдем вероятность того, что фактический диаметр шариков будет заключен в границах от *5,97* до *6,05* см.

$$P\left(5{,}97 < X < 6{,}05\right) = \Phi\ \left(\frac{6{,}05 - 6}{0{,}04}\right) - \Phi\ \left(\frac{5{,}97 - 6}{0{,}04}\right) =$$

$$= \Phi(1{,}25) - \Phi(-0{,}75) = \Phi(1{,}25) + \Phi(0{,}75) = 0{,}3944 + 0{,}2734 = 0{,}6678.$$

Задание 5.13-5.16. $a = 3,\ \sigma^2 = 0{,}0025,\ d = 2{,}96\ ,\beta = 3{,}04,\ P = 0{,}9972.$

Решение. а) Здесь случайная величина X – контролируемый размер детали, причем

$$X \in N(a;\ \sigma) = N(3;\ 0{,}05).$$

Поэтому

$$P\left(2{,}96 < X < 3{,}04\right) = \Phi\left(\frac{3{,}04 - 3}{0{,}05}\right) - \Phi\left(\frac{2{,}96 - 3}{0{,}05}\right) =$$

$$= \Phi(0{,}8) - \Phi(-0{,}8) = 2\Phi(0{,}8) = 2 \cdot 0{,}2881 = 0{,}5762.$$

б) Рассмотрим событие $|X - 3| < \varepsilon,$ где $\varepsilon > 0.$ Будем считать, что вероятность этого события равна *0,9972*, т.е.

$$P\left(\ |X - 3| < \varepsilon\right) = 2\Phi\ \left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\ \left(\frac{\varepsilon}{0{,}05}\right) = 0{,}9972; \quad \Phi\left(\frac{\varepsilon}{0{,}05}\right) = 0{,}4986.$$

По таблицам значений функции Лапласа находим, что

$$\Phi(2{,}98) = 0{,}4986.$$

Значит

$$\frac{\varepsilon}{0,05} = 2,98,\ \varepsilon = 0,05 \cdot 2,98 = 0,15.$$

С другой стороны, из неравенства $|X-3| < 0,15$ следует неравенство $2,85 < X < 3,15$ Это означает, что с вероятностью *0,9972* следует ожидать, что контролируемый размер детали будет заключен в границах от *2,85* см до *3,15* см.

Задание 5.17-5.20. $a = 280,\ \sigma = 0,8,\ \alpha = 278,\ \beta = 283,\ \sigma_1 = 0,9.$

Решение. а) Здесь случайная величина X – фактический размер детали, тогда $X \in N(a,\sigma) = N(280;\ 0,8)$. Найдем вероятность изготовления годной детали, т.е. вероятность события: *278 <X <283*:

$$P(278 < X < 283) = \Phi\left(\frac{283-280}{0,8}\right) - \Phi\left(\frac{278-280}{0,8}\right) =$$

$$= \Phi(3,75) - \Phi(-2,50) = \Phi(3,75) + \Phi(2,50) = 0,4970 + 0,4938 = 0,9908.$$

б) Если точность изготовления детали ухудшится, то вероятность изготовления годной детали будет равна

$$P(278 < X < 283) = \Phi\left(\frac{283-280}{0,9}\right) - \Phi\left(\frac{278-280}{0,9}\right) =$$

$$= \Phi(33) - \Phi(-2,2) = 0,4994 + 0,4861 = 0,9855.$$

Вероятность изготовления бракованной детали при ухудшении точности ее изготовления равна *0,0145*. Это значит, что в среднем брак будет составлять *1,45%.*

Задание 5.21-5.24. $N = 15000,\ p = 0,004,\ C = 15,\ S = 2500.$

Решение. Пусть N – число автолюбителей, застрахованных в компании; C – страховой взнос; S – сумма, выплачиваемая пострадавшему в аварии; K - предельное число автолюбителей, попавших в аварию, при котором страховая компания не терпит убытки.

Очевидно, что сумма страховых взносов должна быть не меньше суммы, выплачиваемой по страхованию, т.е. $C \cdot N \geq S \cdot K$.

Откуда

$$K \leq \frac{C \cdot N}{S} = \frac{15 \cdot 15000}{2500} = 90.$$

Если m – число автолюбителей, попавших в аварию в течение года, то при выполнении неравенства $K < m < N$ страховая компания будет терпеть убытки. Согласно интегральной теореме Муавра-Лапласа будем иметь

$$P_N\left(K < m < N\right) = \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

где

$$x'' = \frac{N - Np}{\sqrt{Npq}} = \frac{15000 - 15000 \cdot 0,004}{\sqrt{15000 \cdot 0,004 \cdot 0,996}} = \frac{14940}{7,73} = 1933,$$

$$x' = \frac{K - Np}{\sqrt{Npq}} = \frac{90 - 15000 \cdot 0,004}{\sqrt{15000 \cdot 0,004 \cdot 0,996}} = \frac{30}{7,73} = 3,88.$$

Таким образом, искомая вероятность равна

$$P_{15000}\left(90 < m < 15000\right) \approx \Phi(1933) - \Phi(3,88) = 0,5 - 0,4999 = 0,0001.$$

Задание 5.25-5.30. $t = 750$, $t_1 = 450$, $t_2 = 600$.

Решение. а) Рассмотрим случайную величину T – длительность времени безотказной работы i – го элемента, $i = \overline{1,3}$. Так как $M(T) = 750$, то $\lambda = 1/750$ и функция распределения случайной величины T примет вид

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t/750}; \ t \geq 0, \\ 0; \ t < 0. \end{cases}$$

Вероятность того, что величина T примет значение из интервала $(\alpha; \beta)$ определяется формулой

$$P\left(\alpha < T < \beta\right) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}.$$

Введем событие A_i = {i -ый элемент устройства проработал безотказно от t_1 до t_2 часов}. Тогда искомая вероятность

$$P = P\left(A_1 + A_2 + A_3\right) = 1 - P\left(\overline{A}_1\right) \cdot P\left(\overline{A}_2\right) \cdot P\left(\overline{A}_3\right).$$

Находим

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = e^{-450/750} - e^{-600/750} = e^{-0,6} - e^{-0,8} =$$

$$= 0,5488 - 0,4493 = 0,0995.$$

Следовательно,

$$P = 1 - 0,9005^3 = 1 - 0,7302 = 0,2698.$$

Задания к контрольной работе по теме «*Математическая статистика*»

Задание 1. В результате статистических наблюдений некоторой совокупности относительно количественного признака Х были получены выборочные данные.

Требуется:

1) составить дискретный или интервальный ряд распределения частот и относительных частот случайной величины X и построить полигон или гистограмму частот.

2) найти эмпирическую функцию распределения признака X и построить ее график.

3) вычислить числовые оценки параметров распределения: выборочные среднюю, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

4) выдвинуть гипотезу о виде распределения рассматриваемой случайной величины X. На основании пунктов 1 и 3 обосновать выбор вида распределения. Написать аналитическое выражение функции плотности для выбранного распределения, используя оценки, полученные в пункте 3, и найти теоретические (выравнивающие частоты) и теоретическую интегральную функцию распределения.

5) приняв уровень значимости α = 0,05 или 0,01, по критерию согласия Пирсона подтвердить или отвергнуть выдвинутую гипотезу о виде распределения.

6) для подтвердившегося нормального распределения найти вероятность попадания признака в интервал $(a-5;\ a+3)$.

Задание 2. В результате группировки данных статистического наблюдения над признаками X и $У$ получена корреляционная таблица. С целью изучения линейной связи между этими признаками требуется:

1) найти их числовые показатели $\bar{x}_в,\ \bar{y}_в,\ \sigma_x,\ \sigma_y$;

2) выборочный коэффициент корреляции $r_в$ и оценить его надежность с уровнем значимости $\alpha = 0{,}01$;

3) найти уравнения прямых регрессий $У$ на X и X на $У$;

4) найти эмпирические и теоретические значения условных средних и рассмотреть отклонения между ними;

5) изобразить в системе координат $\overline{Y}_x$ и $\bar{y}_x$, $\overline{X}_y$ и $\bar{x}_y$.

ВАРИАНТ 1.

Задание 1.

65 71 67 73 68 68 72 68 67 70 78 74 79 65 72
65 71 70 69 69 76 71 63 77 75 70 74 65 71 68
74 69 69 66 71 69 73 74 80 69 73 76 69 69 67
67 74 68 74 60 70 66 70 68 64 75 78 71 70 69
73 75 74 72 80 72 69 69 71 70 73 65 66 67 69
71 70 72 76 72 73 64 74 71 76 68 69 75 76 73
74 78 66 75 72 69 68 63 70 70 78 76 73 73 67

Задание 2.

X \ У	12	16	20	24	28	32
20	3	4				
30		2	6			
40			8	31	10	
50			2	14	6	
60				5	7	2

ВАРИАНТ 2.

Задание 1.

71 66 66 72 69 71 71 68 72 69 73 73 66 72 73
70 69 74 72 69 74 70 74 72 76 71 66 62 69 74
76 74 69 64 75 71 76 68 68 78 71 71 68 67 74
68 81 71 68 72 71 71 71 69 61 74 66 70 72 65
67 73 78 73 71 75 73 71 72 68 67 69 69 77 63
71 74 67 68 69 74 69 67 74 66 74 74 69 75 70
73 63 77 74 75

Задание 2.

X \ У	11	17	23	29	35	41
15	5	1				
25		6	2			
35			5	26	5	
45			7	12	10	
55				6	7	8

ВАРИАНТ 3.

Задание 1.

135 133 124 132 104 152 134 130 129 120 122 124
117 123 123 129 121 122 125 131 147 124 137 112
126 128 111 129 115 147 131 132 137 119 125 120
129 125 123 127 132 118 133 132 132 134 131 120
135 132 125 132 108 114 121 133 133 135 131 125
114 115 122 131 125 132 120 126 115 117 118 118
132 134 127 127 124 135 128 127 115 144 129 120
137 127 125 116 132 120 117 127 118 109 127 122

Задание 2.

Х \ У	6	8	10	12	14	16
10				5	7	2
15			2	8	6	
20			8	21	10	
25	5	2	6			
30	3	5				

ВАРИАНТ 4.

Задание 1.

120 135 116 118 133 136 125 126 119 126 129 127
129 124 127 132 126 131 127 130 126 124 135 127
124 123 123 130 132 143 122 139 120 134 108 132
121 111 123 140 137 120 125 131 118 120 120 136
129 127 116 138 128 133 122 131 128 140 138 134
120 126 109 137 111 115 117 130 113 126 115 124
125 118 115 128 123 129 128 120 115 134 118 135
134

Задание 2.

Х \ У	5	7	9	11	13	15
8					5	3
12				7	4	
16			5	18	8	
20		7	12	9		
24	3	4				

ВАРИАНТ 5.

Задание 1.

365 371 370 369 369 376 371 363 377 375 370 374 365 371 368
374 369 369 366 371 369 373 374 380 369 373 376 369 369 367
367 374 368 374 360 370 366 370 368 364 375 378 371 370 369
373 375 374 372 380 372 369 369 371 370 373 365 366 367 369
371 370 372 376 372 373 364 374 371 376 368 369 375 376 373
374 378 366 375 372 369 368 363 370 370 378 376 373 373 367
365 371 367 373 368 368 372 368 367 370 378 374 379 365 372

Задание 2.

Y / X	15	25	35	45	55	65
14	2	4				
22		4	7			
30		3	30	16	4	
38			12	7	6	
46				2	2	1

ВАРИАНТ 6.

Задание 1.

6,8 8,1 7,1 6,8 7,2 7,1 7,1 7,1 6,9 6,1 7,4 6,6 7,0 7,2 6,5
6,7 7,3 7,8 7,3 7,1 7,5 7,3 7,1 7,2 6,8 6,7 6,9 6,9 7,7 6,3
7,1 7,4 6,7 6,8 6,9 7,4 6,9 6,7 7,4 6,6 7,4 7,4 6,9 7,5 7,0
7,1 6,6 6,6 7,2 6,9 7,1 7,1 6,8 7,2 6,9 7,3 7,3 6,6 7,2 7,3
7,0 6,9 7,4 7,2 6,9 7,4 7,0 7,4 7,2 7,6 7,1 6,6 6,2 6,9 7,4
7,6 7,4 6,9 6,4 7,5 7,1 7,6 6,8 6,8 7,8 7,1 7,1 6,8 6,7 7,4
7,3 6,3 7,7 7,4 7,5

Задание 2.

Y / X	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5	52,5
17	2	3				
19	3	4	4			
21		8	14	5		
23			10	5	3	2
25					5	2

ВАРИАНТ 7.

Задание 1.

12,6 12,8 11,1 1,29 11,5 14,7 13,1 13,2 13,7 11,9 12,5 12,0
12,9 12,5 12,3 12,7 13,2 11,8 13,3 13,2 13,2 13,4 13,1 12,0
13,5 13,2 12,5 13,2 10,8 11,4 12,1 13,3 13,3 13,5 13,1 12,5
11,4 11,5 12,2 13,1 12,5 13,2 12,0 12,6 11,5 11,7 11,8 11,8
13,2 13,4 12,7 12,7 12,4 13,5 12,8 12,7 11,5 14,4 12,9 12,0
13,7 12,7 12,5 11,6 13,2 12,0 11,7 12,7 11,8 10,9 12,7 12,2
13,5 13,3 12,4 13,2 10,4 15,2 13,4 13,0 12,9 12,0 12,2 12,4
11,7 12,3 12,3 12,9 12,1 12,2 12,5 13,1 14,7 12,4 13,7 11,2

Задание 2.

Х \ У	11	14	17	20	23	26
7					4	5
9			3	9	2	
11		8	15	4		
13	6	5	7			
15	3	6	3			

ВАРИАНТ 8.

Задание 1.

12,9 12,4 12,7 13,2 12,6 13,1 12,7 13,0 12,6 12,4 13,5 12,7
12,4 12,3 12,3 13,0 13,2 14,3 12,2 13,9 12,0 13,4 10,8 13,2
12,1 11,1 12,3 14,0 13,7 12,0 12,5 13,1 11,8 12,0 12,0 13,6
12,9 12,7 11,6 13,8 12,8 13,3 12,2 13,1 12,8 14,0 13,8 13,4
12,0 12,6 10,9 13,7 11,1 11,5 11,7 13,0 11,3 12,6 11,5 12,4
12,5 11,8 11,5 12,8 12,3 12,9 12,8 12,0 11,5 13,4 11,8 13,5
12,0 13,5 11,6 11,8 13,3 13,6 12,5 12,6 11,9 12,6 12,9 12,7
13,4

Задание 2.

Х \ У	22	36	50	64	78	92
200	5	3	4			
250		7	8	1		
300			9	10	14	
350				12	8	2
400				5	1	7

ВАРИАНТ 9.

Задание 1.

8,5 9,1 8,7 9,3 8,8 8,8 9,2 8,8 8,7 9,0 9,8 9,4 9,9 8,5 9,2
8,5 9,1 9,0 8,9 8,9 9,6 9,1 8,3 9,7 9,5 9,0 9,4 8,5 9,1 8,8
9,4 8,9 8,9 8,6 9,1 8,9 9,3 9,4 9,9 8,9 9,3 9,6 8,9 8,9 8,7
8,7 9,4 8,8 9,4 8,0 9,0 8,6 9,0 8,8 8,4 9,5 9,8 9,1 9,0 8,9
9,3 9,5 9,4 9,2 9,9 9,2 8,9 8,9 9,1 9,0 7,3 8,5 8,6 8,7 8,9
9,1 9,0 9,2 9,6 9,2 9,3 8,4 9,4 9,1 9,6 8,8 8,9 9,5 9,6 9,3
9,4 9,8 8,6 9,5 9,2 8,9 8,8 8,3 9,0 9,0 9,8 9,6 9,3 9,3 8,7

Задание 2.

Х \ У	16	20	24	28	32	36
18	2	1				
20	1	3	3			
24		3	5	7		
26			2	7	7	
28				1	5	1

ВАРИАНТ 10.

Задание 1.

7,7 7,4 7,6 7,1 7,3 7,7 7,4 7,8 7,8 7,1 7,5 7,4 7,1
7,9 7,7 7,4 7,9 7,5 7,9 7,7 8,1 7,6 7,1 6,7 7,3 8,6
8,1 7,9 7,4 6,9 7,9 7,6 8,1 7,3 7,3 8,3 7,6 7,6 7,3
7,6 7,3 7,7 7,6 7,6 7,6 7,3 6,6 7,9 7,1 7,5 8,0 7,5
7,2 7,8 8,3 7,8 7,6 8,2 7,8 7,6 7,9 7,3 7,2 7,4 7,4
7,6 7,9 7,2 7,3 7,4 7,9 7,3 7,2 7,9 7,1 7,9 7,9 7,4
7,8 6,8 8,2 7,9 8,0 7,7 7,8 7,4 7,9 7,2 7,9 7,7 7,0
8,2 6,8 7,6 7,1

Задание 2.

Х \ У	10	15	20	25	30	35
2	3	4				
5		10	9	3		
8			6	40	5	
11				4	8	3
14					2	3

ВАРИАНТ 11.

Задание 1.

1,26 1,28 1,11 1,29 1,15 1,47 1,31 1,32 1,37 1,19 1,25 1,20
1,29 1,25 1,23 1,27 1,32 1,18 1,33 1,32 1,32 1,34 1,31 1,20
1,35 1,32 1,25 1,32 1,08 1,14 1,21 1,33 1,33 1,35 1,31 1,25
1,14 1,15 1,22 1,31 1,25 1,32 1,20 1,26 1,15 1,17 1,18 1,18
1,32 1,34 1,27 1,27 1,24 1,35 1,28 1,27 1,15 1,44 1,29 1,20
1,37 1,27 1,25 1,16 1,32 1,20 1,17 1,27 1,18 1,09 1,27 1,22
1,35 1,33 1,24 1,32 1,04 1,52 1,34 1,30 1,29 1,20 1,22 1,24
1,17 1,23 1,23 1,29 1,21 1,22 1,25 1,31 1,47 1,24 1,37 1,12

Задание 2.

Х \ У	10	13	16	19	22	25
20					4	3
22			9	10	8	
24		10	30	6		
26		6	7	3		
28	4	2	4			

ВАРИАНТ 12.

Задание 1.

136 134 125 133 105 153 135 131 130 121 123 125
118 124 124 130 122 123 126 132 148 125 138 113
127 129 112 130 116 148 132 133 138 120 126 121
130 126 124 128 133 119 134 133 133 135 132 121
136 133 126 133 109 115 122 134 134 136 132 126
115 116 123 132 126 133 121 127 116 118 119 119
133 135 128 128 125 136 129 128 116 145 130 121
138 128 126 117 133 121 118 128 119 110 128 123

Задание 2.

Х \ У	14	22	30	38	46	54
16	3	7	2			
24		2	12	6		
32		7	27	11		
40			10	6		
48				2	1	1
56					2	1

ВАРИАНТ 13.

Задание 1.

565 571 567 573 568 568 572 568 567 570 578 574 579
565 571 570 569 569 576 571 563 577 575 570 574 565
574 569 569 566 571 569 573 574 580 569 573 576 569
567 574 568 574 560 570 566 570 568 564 575 578 571
573 575 574 572 580 572 569 569 571 570 573 565 566
571 570 572 576 572 573 564 574 571 576 568 569 575
574 578 566 575 572 569 568 563 570 570 578 576 573
565 572 571 568 569 567 570 569 567 569 576 573 573

Задание 2.

X \ У	13	19	25	31	37	43
17	3					
23	7	2	6			
29		2	11	32		
35			10	12	2	
41					6	3
47						4

ВАРИАНТ 14.

Задание 1.

22 19 21 21 18 22 19 23 23 16 22 23 17 23 28
24 22 19 24 20 24 22 26 21 16 12 19 24 23 21
26 24 19 14 25 21 26 18 18 28 21 21 18 17 24
18 31 21 18 22 21 21 21 19 11 24 16 20 22 15
25 23 21 22 18 17 19 19 27 13 23 13 27 24 25
21 24 17 18 19 24 19 17 24 16 24 24 19 25 20
21 16 16 20 19

Задание 2.

X \ У	5	9	13	17	21	25
3						3
8				6	7	2
13		4	10	25		
18		8	7	4		
23		5	2			
28	3	1	1	2		

ВАРИАНТ 15.

Задание 1.

10,4 15,2 13,4 13,0 12,9 12,0 12,2 12,4 11,8 10,9 12,7 12,2
12,1 12,2 12,5 13,1 14,7 12,4 13,7 11,2 13,2 13,4 12,7 12,7
12,9 11,5 14,7 13,1 13,2 13,7 11,9 12,5 12,0 11,4 11,5 12,2
13,2 11,8 13,3 13,2 13,2 13,4 13,1 12,0 13,5 13,2 12,5 13,2
10,8 11,4 12,1 13,3 13,3 13,5 13,1 12,5 12,9 12,5 12,3 12,7
13,1 12,5 13,2 12,0 12,6 11,5 11,7 11,8 11,8 12,6 12,8 11,1
12,4 13,5 12,8 12,7 11,5 14,4 12,9 12,0 11,7 12,3 12,3 12,9
13,7 12,7 12,5 11,6 13,2 12,0 11,7 12,7 13,5 13,3 12,4 13,2

Задание 2.

Х \ У	16	18	20	22	24	26
6					1	2
8			4	3	5	
10			3	7	2	
12		2	6	8		
14		10	15			
16	4	3	5			

ВАРИАНТ 16.

Задание 1.

752 734 730 729 720 722 724 737 727 725 716 732
723 729 721 722 725 731 747 724 737 712 732 734
726 728 711 729 715 747 731 732 737 719 725 720
729 725 723 727 732 718 733 732 732 734 731 720
735 732 725 732 708 714 721 733 733 735 131 725
714 715 722 731 725 732 720 726 715 717 718 718
727 727 724 735 728 727 715 744 729 720 717 723
720 717 727 718 709 727 722 735 733 724 732 704

Задание 2.

Х \ У	17	22	27	32	37	42
17	1	2				
19	1	2	4			
21		4	4	8		
23			2	10	7	
25				3	7	2
27					2	1

ВАРИАНТ 17.

Задание 1.

68 68 72 68 67 70 78 74 79 65 72 65 71 67 73
76 71 63 77 75 70 74 65 71 68 65 71 72 69 69
66 71 69 73 74 80 69 73 76 69 69 67 74 69 69
70 68 64 75 78 74 70 69 67 74 68 74 60 70 66
74 72 80 72 69 69 71 70 73 65 66 67 69 73 75
64 74 71 76 68 69 75 76 73 73 72 72 76 72 73
75 72 69 67 63 70 70 78 76 73 73 67 74 78 66

Задание 2.

X \ У	16,5	21,5	26,5	31,5	36,5	41,5
17,5	2	2				
19,5	3	4				
21,5		13	6	4		
23,5			9	21	10	2
25,5				19	20	1
27,5						4

ВАРИАНТ 18.

Задание 1.

966 972 969 971 971 968 972 969 973 973 966 972 973 971
974 972 969 974 970 974 972 976 971 966 962 969 974 973
969 964 975 971 976 968 968 978 971 971 968 967 974 963
971 968 972 971 971 971 969 961 974 966 970 972 965 977
967 973 978 973 971 975 973 971 972 968 967 969 969 970
974 967 968 969 974 969 967 974 966 974 974 969 975 981
963 977 974 975 971 966 970 969 976 974 968

Задание 2.

X \ У	120	140	160	180	200	220
150	1	6	4			
160			4	7	5	
170			16	15	6	
180				18	8	4
190				5	5	6
200					2	3

ВАРИАНТ 19.

Задание 1.

12,4 13,2 10,4 15,2 13,4 13,0 12,9 12,0 12,2 12,4 13,5 13,3
12,3 12,9 12,1 12,2 12,5 13,1 14,7 12,4 13,7 11,2 11,7 12,3
11,1 12,9 11,5 14,7 13,1 13,2 13,7 11,9 12,5 12,0 12,6 12,8
13,2 13,2 13,4 13,1 12,0 12,9 12,5 12,3 12,7 13,2 11,8 13,3
10,8 11,4 12,1 13,3 13,3 13,5 13,1 12,5 13,5 13,2 12,5 13,2
11,4 11,5 12,2 13,1 12,5 13,2 12,0 12,6 11,5 11,7 11,8 11,8
12,4 13,5 12,8 12,7 11,5 14,4 12,9 12,0 13,2 13,4 12,7 12,7
13,7 12,7 12,5 11,6 13,2 12,0 11,7 12,7 11,8 10,9 12,7 12,2

Задание 2.

Х \ У	130	150	170	190	210	230
85	3	4	2			
95		5	7	5		
105			8	14	6	
115				6	8	9
125				5	6	3
135					5	4

ВАРИАНТ 20.

Задание 1.

424 404 434 430 429 420 422 424 437 427 425 416
421 422 425 431 447 424 437 412 432 434 427 427
426 428 411 429 415 447 431 432 437 419 425 420
423 427 432 418 433 432 432 434 431 420 429 425
435 432 425 432 408 414 421 433 433 435 431 425
414 415 422 431 425 432 420 426 415 417 418 418
424 435 428 427 415 444 429 420 417 423 423 429
432 420 417 427 418 409 427 422 435 433

Задание 2.

Х \ У	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0
115				4	3	2
120				8	7	
125			8	7	4	
130			7	15	3	
135		2	9	8		
140	1	4	6			

ВАРИАНТ 21.

Задание 1.

75 79 67 75 72 69 68 63 70 70 78 76 74 73 68
69 69 73 68 67 70 78 74 79 65 72 65 72 71 69
69 77 72 63 77 75 70 74 65 71 68 66 72 67 74
74 69 69 66 71 69 73 74 80 69 73 76 69 69 67
68 75 69 74 60 70 66 70 68 64 75 78 72 70 69
74 76 75 72 80 72 69 69 71 70 73 66 67 67 69
72 71 73 76 72 73 64 74 71 76 68 69 76 76 73

Задание 2.

Х \ У	300	500	700	900	1000	1100
8	1	2	5			
12		2	7	4		
16		9	6	4		
20			14	6	7	
24				1	8	9
28				4	5	6

ВАРИАНТ 22.

Задание 1.

711 662 663 724 695 716 717 688 729 690 731 732 663 724 735
706 697 748 729 690 749 700 748 729 767 716 665 624 693 742
761 742 693 644 755 716 767 688 689 780 715 716 687 678 748
689 810 715 684 724 713 712 711 696 617 748 669 700 721 652
673 734 785 736 717 758 739 710 727 686 675 694 693 772 631
714 745 676 687 697 748 695 675 749 668 743 745 696 757 709
731 632 773 744 755

Задание 2.

Х \ У	210	310	410	510	610	710
3					7	2
8				7	8	
13			15	5	9	
18		6	6	7		
23		5	9	2		
28	2	4	6			

ВАРИАНТ 23.

Задание 1.

0,35 0,33 0,24 0,32 0,04 0,52 0,34 0,30 0,29 0,20 0,18
0,17 0,23 0,23 0,29 0,21 0,22 0,25 0,31 0,47 0,24 0,31
0,26 0,28 0,11 0,29 0,15 0,47 0,31 0,32 0,37 0,19 0,20
0,29 0,25 0,23 0,27 0,32 0,18 0,33 0,32 0,32 0,34 0,25
0,35 0,32 0,25 0,32 0,08 0,14 0,21 0,33 0,33 0,35 0,22
0,14 0,15 0,22 0,31 0,25 0,32 0,20 0,26 0,15 0,17 0,18
0,32 0,34 0,27 0,27 0,24 0,35 0,28 0,27 0,15 0,44 0,29
0,37 0,27 0,25 0,16 0,32 0,20 0,17 0,27 0,18 0,09 0,27
0,22 0,24 0,37 0,12 0,25 0,20 0,31 0,22

Задание 2.

X \ У	35	40	45	50	55	60
6	3	2	3			
12		1	4	5		
18			7	18	6	
24				9	6	3
30				3	8	4
36					2	1

ВАРИАНТ 24.

Задание 1.

12,9 12,0 12,2 12,4 13,6 13,3 12,4 13,2 10,4 15,2 13,4 13,0
12,1 12,2 12,5 13,1 14,7 12,4 13,7 11,2 11,7 12,3 12,3 12,9
11,1 12,9 11,5 14,7 13,1 13,2 13,7 11,9 12,5 12,0 12,6 12,8
12,9 12,5 12,3 12,7 13,2 11,8 13,3 13,2 13,2 13,4 13,1 12,0
13,3 13,5 13,1 12,5 13,5 13,2 12,5 13,2 10,7 11,4 12,1 13,3
11,4 11,5 12,2 13,1 12,5 13,2 12,0 12,6 11,5 11,7 11,8 11,9
13,4 12,7 12,7 12,4 13,5 12,8 12,7 11,5 14,4 12,9 12,0 13,2
12,5 11,6 13,2 12,0 11,7 12,7 11,8 10,9 12,7 12,2 13,7 12,7

Задание 2.

X \ У	16,5	21,5	26,5	31,5	36,5	41,5
17	1	2				
19		2	3	6		
21			4	8	2	
23				8	8	7
25				3	8	2
27					3	1

ВАРИАНТ 25.

Задание 1.

731 682 683 725 684 677 706 788 741 798 654 727 625 710 675
651 716 703 698 691 768 718 631 775 757 709 743 651 712 688
691 662 713 694 739 748 807 696 735 764 694 694 678 744 695
676 747 681 745 604 707 669 708 683 643 755 787 711 701 697
699 698 710 700 731 658 666 676 695 738 753 741 722 804 727
717 702 726 764 723 738 647 747 717 765 685 691 750 760 730
755 725 694 689 632 703 704 787 769 733 733 674 744 789 669

Задание 2.

Х \ У	7	9	11	13	15	17
15					3	2
18			2	6	4	
21		1	9	13		
24		3	2	1		
27	2	2				

ВАРИАНТ 26.

Задание 1.

672 668 671 671 668 672 669 673 673 666 672 673 673 663 677
669 674 670 674 672 676 671 666 662 669 674 674 669 675 670
676 674 669 664 675 672 676 668 668 678 671 671 668 667 674
671 668 672 671 671 671 669 661 674 665 670 672 665 674 675
667 673 678 673 671 675 673 671 672 668 667 669 669 677 663
671 674 667 668 664 674 669 667 674 666 674 668 681 674 672
671 666 666 670 669

Задание 2.

Х \ У	12	15	16	21	24	27
2	2	3				
5		10	9	3		
8		6	35	5	1	
11			4	8	3	
14				1	2	4

ВАРИАНТ 27.

Задание 1.

1241 1323 1045 1527 1349 1302 1294 1206 1318 1220 1245
1178 1231 1234 1296 1213 1224 1257 1317 1472 1249 1221
1260 1280 1111 1296 1153 1478 1319 1324 1373 1198 1257
1297 1257 1235 1271 1320 1185 1336 1328 1328 1344 1200
1351 1323 1253 1325 1087 1149 1219 1331 1337 1357 1185
1140 1150 1222 1311 1255 1322 1200 1266 1155 1177 1188
1325 1341 1270 1277 1249 1353 1285 1270 1157 1449 1291
1371 1278 1256 1164 1323 1200 1174 1278 1187 1097 1274
1372 1120 1251 1201 1318 1206 1357 1333

Задание 2.

Х \ У	25	50	75	100	125	150
34	5	4	3	1		
46		6	9	5		
58			12	8	4	
70				4	5	4
82					4	6

ВАРИАНТ 28.

Задание 1.

10 42 34 30 29 20 22 24 35 33 24 32
29 21 22 25 31 47 24 37 12 17 23 23
11 29 15 47 31 32 37 19 25 20 29 25
23 27 32 18 33 32 32 34 31 20 26 28
35 32 25 32 8 14 21 33 33 35 31 25
31 25 32 20 26 15 17 18 18 37 27 22
32 34 27 27 24 35 28 27 15 44 29 20
25 16 32 20 17 27 38 9 27 22 14 15

Задание 2.

Х \ У	20	26	32	38	44	50
4	6	4	3			
9		8	7	2		
14			13	8	9	
19			6	5	7	
24				6	2	4

ВАРИАНТ 29.

Задание 1.

651 716 671 732 688 681 724 685 677 700 788 743 794 650 724
654 712 700 695 692 768 719 639 772 754 704 745 653 719 684
743 693 695 667 719 691 735 744 803 690 730 767 698 691 674
671 745 689 748 604 702 666 707 683 640 750 787 715 703 698
736 752 744 721 809 720 691 698 716 709 732 654 667 675 693
712 706 727 768 724 733 641 749 715 760 682 690 750 769 731
740 780 667 756 724 692 685 637 708 703 785 764 736 737 679

Задание 2.

У / Х	18	21	24	27	30	33
25	4	3	6			
30		7	4	8		
35		15	19	7		
40			8	5	6	
45				4	3	1

ВАРИАНТ 30.

Задание 1.

79 74 74 88 77 79 79 76 86 77 81 81 74 80 81
78 77 82 80 77 82 78 82 80 84 79 74 70 77 82
84 82 77 72 83 78 84 76 76 86 79 79 76 75 84
76 89 79 76 80 79 79 79 77 69 84 74 78 80 73
73 81 86 81 79 83 81 79 80 76 75 77 77 85 71
79 84 75 76 77 82 77 75 82 74 82 82 77 83 78
81 71 85 82 83 76 87 76

Задание 2.

У / Х	14	19	24	29	34	39
4	3	3	4	6		
7		5	8	9		
10		2	13	7	6	
13			1	9	2	4
16					3	5

Решение типового варианта

Задание 1.

Имеются данные выборочного наблюдения над признаком X:

61,0	64,8	51,8	52,8	68,9	70,2	95,6	52,8	87,3	68,1	20,8	31,8	55,8
32,3	56,8	54,8	53,3	65,8	59,6	59,5	85,8	73,8	26,1	65,8	57,7	57,7
73,6	89,3	71,8	45,3	60,7	59,6	60,5	79,8	40,8	40,8	33,2	62,8	81,2
67,8	34,6	60,8	82,0	33,7	58,6	58,6	61,1	89,1	37,8	67,5	62,1	69,4
39,2	53,2	65,2	65,2	59,6	68,3	60,2	58,2	44,3	60,8	37,8	55,0	68,3
68,3	29,2	64,4	39,2	48,4	60,3	37,5	64,8	79,4	40,1	40,1	42,0	54,6
54,8	79,9	57,1	87,5	47,9	80,0	50,1	50,1	53,8	56,9	100,8	73,8	40,8
		54,6	75,6	31,8	49,6	49,6	75,6	51,6	28,6	40,8		

Судя по тому, что повторяющихся значений, практически нет, этот признак следует отнести к непрерывным. Следовательно, требуется построить для него интервальное распределение, для чего, подсчитав количество данных, определяем объем выборки $n = 100$. Затем находим наименьшую и наибольшую варианты: $x_{\min} = 20{,}8$ и $x_{\max} = 100{,}8$, и по формуле Стерджеса находим длину интервала варьирования

$$h \cong \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}322 \cdot \lg\ n} = \frac{100{,}8 - 20{,}8}{1 + 3{,}322 \cdot \lg\ 100} = \frac{80}{7{,}644} \cong 10{,}45 .$$

Начало первого интервала определяем по формуле $a_0 = x_{\min} - \frac{h}{2} = 20{,}8 - \frac{10{,}45}{2} = 15{,}58$. Далее, последовательно прибавляя h, получаем границы интервалов: $a_1 = 26{,}03$; $a_2 = 36{,}48$; $a_3 = 46{,}93$; $a_4 = 57{,}38$; $a_5 = 67{,}83$; $a_6 = 78{,}28$; $a_7 = 88{,}73$; $a_8 = 99{,}18$; $a_9 = 109{,}63$. Последний интервал должен "накрывать" $x_{\max} = 100{,}8$.(*)

Теперь подсчитаем интервальные частоты – количества вариант, попавших в каждый интервал. Это удобно делать с помощью приводимой ниже таблицы 1.

(*) Возможен другой способ построения, при котором сначала определяется целое число интервалов $k \cong 1 + 3{,}322 \cdot \lg n$, а затем длина шага $h = \frac{R}{k}$, где $R = x_{\max} - x_{\min}$ и называется *размахом вариации* признака. При этом первый интервал откладывается от минимального значения $x_{\text{мин}}$.

Таблица 1.

№ интервала	Интервалы	Подсчет частот	Частоты n_i
1	(15,58; 26,03)		2
2	(26,03; 36,48)		8
3	(36,48; 46,93)		14
4	(46,93; 57,38)		22
5	(57,38; 67,83)		28
6	(67,83; 78,28)		13
7	(78,28; 88,73)		9
8	(88,73; 99,18)		3
9	(99,18; 109,63)		1
Объем выборки			$n = 100$

Последовательно просматривая данные, каждое значение отмечаем чертой в строке соответствующего интервала, формируя квадратики с диагональю, что соответствует пяти вариантам, попавшим в интервал, и удобно при подсчете частот n_i.

Результаты дальнейшей обработки данных вносятся в таблицу, аналогичную таблице 2.

Таблица 2.

i	$(a_{i-1}\,;\,a_i)$	x_i	n_i	$\frac{n_i}{n}$	$x_i\, n_i$	$x_i^2\, n_i$	$\frac{a_{i-1}-\bar{x}_в}{\bar{s}}$
1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***
1	(15,58; 26,03)	20,80	2	0,02	41,60	865,28	– 2,55
2	(26,03; 36,48)	31,25	8	0,08	250,00	7812,50	– 1,93
3	(36,48; 46,93)	41,70	14	0,14	583,80	24344,46	– 1,31
4	(46,93; 57,38)	52.15	22	0,22	1147,30	59831,70	– 0,69
5	(57,38; 67,83)	62,60	28	0,28	1752,80	109725,28	– 0,07
6	(67,83; 78,28)	73,05	13	0,13	949,65	69371,93	0,54
7	(78,28; 88,73)	83,50	9	0,09	751,50	62750,25	1,16
8	(88,73; 99,18)	93.95	3	0,03	281,85	26479,81	1,78
9	(99,18; 109,63)	104,40	1	0,01	104,40	10899,36	2,40
10	109,63						3,02
В с е г о			100	1,00	5862,90	372080,57	

Продолжение таблицы 2.

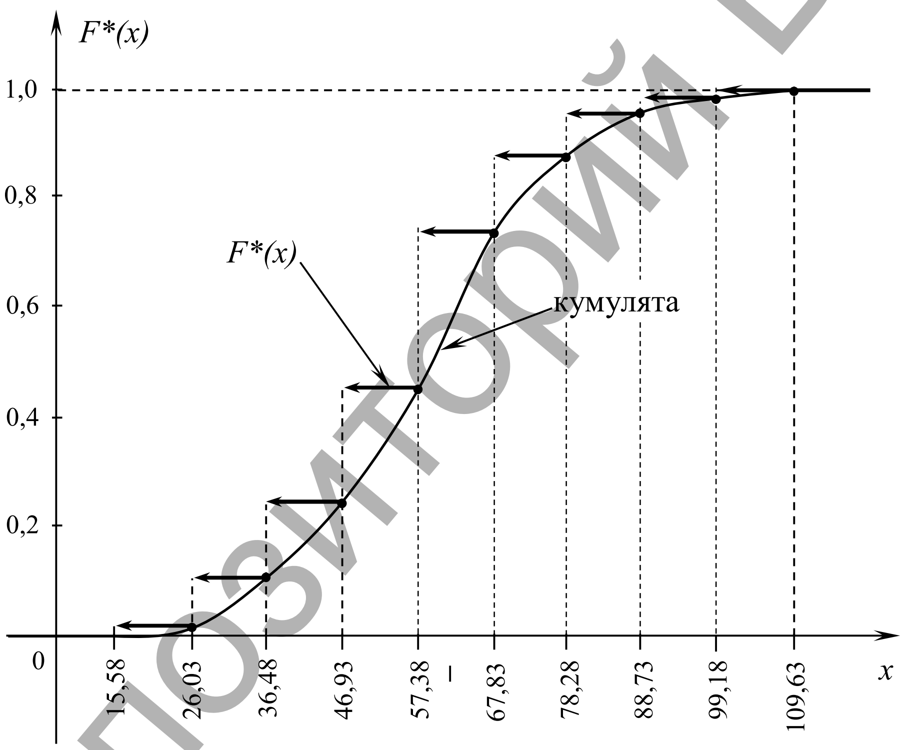
<table>
<tr><td>i</td><td>$\Phi\left(\frac{a_{i-1}-\bar{x}_в}{\bar{s}}\right)$</td><td>$P_i$</td><td>$n'_i = n\,P_i$</td><td>$n_i$</td><td>$\frac{(n_i-n'_i)^2}{n'_i}$</td></tr>
<tr><td>–</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td></tr>
<tr><td>1</td><td>– 0,4946</td><td>0,0214</td><td rowspan="2">$\left.\begin{matrix}2{,}14\\6{,}83\end{matrix}\right\} = 8{,}97$</td><td rowspan="2">$\left.\begin{matrix}2\\8\end{matrix}\right\} = 10$</td><td rowspan="2">0,1183</td></tr>
<tr><td>2</td><td>– 0,4732</td><td>0,0683</td></tr>
<tr><td>3</td><td>– 0,4049</td><td>0,1500</td><td>15,00</td><td>14</td><td>0,0667</td></tr>
<tr><td>4</td><td>– 0,2549</td><td>0,2270</td><td>22,70</td><td>22</td><td>0,0216</td></tr>
<tr><td>5</td><td>– 0,0279</td><td>0,2333</td><td>23,33</td><td>28</td><td>0,9348</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,2054</td><td>0,1716</td><td>17,16</td><td>13</td><td>1,0085</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0,3770</td><td>0,0855</td><td rowspan="3">$\left.\begin{matrix}8{,}55\\2{,}93\\0{,}69\end{matrix}\right\} = 12{,}17$</td><td rowspan="3">$\left.\begin{matrix}9\\3\\1\end{matrix}\right\} = 13$</td><td rowspan="3">0,0566</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0,4625</td><td>0,0293</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0,4918</td><td>0,0069</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0,4987</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">В с е г о</td><td>0,9936</td><td>99,33</td><td>100</td><td>2,2065</td></tr>
</table>

Введем в рассмотрение x_i – середины интервалов и, приписав им соответствующие интервальные частоты n_i, получим, вариационный ряд (графы 3 и 4). Исходная совокупность граф 2 и 4 называется интервальным распределением. На их данных строится гистограмма относительных частот: прямоугольники с основаниями – интервалами вариации и высотами, равными соответствующим интервальным относительным частотам. Если же последовательно соединить середины верхних оснований прямоугольников отрезками прямых, то получим полигон относительных частот.

Эмпирическая функция распределения строится поинтервально, исходя из данных столбцов 2 и 5 по правилу накопления частот.

$$F^*(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 15{,}58; \\ 0{,}02 & при \quad 15{,}58 < x \le 26{,}03; \\ 0{,}10 & при \quad 26{,}03 < x \le 36{,}48; \\ 0{,}24 & при \quad 36{,}48 < x \le 46{,}93; \\ 0{,}46 & при \quad 46{,}93 < x \le 57{,}38; \\ 0{,}74 & при \quad 57{,}38 < x \le 67{,}83; \\ 0{,}87 & при \quad 67{,}83 < x \le 78{,}28; \\ 0{,}96 & при \quad 78{,}28 < x \le 88{,}73; \\ 0{,}99 & при \quad 88{,}73 < x \le 99{,}18; \\ 1{,}00 & при \quad 99{,}18 < x \le 109{,}63; \\ 1{,}00 & при \quad x > 109{,}63. \end{cases}$$

Строим график.



Плавная кривая (или ломаная), "окаймляющая" снизу график $F^*(x)$, называется кумулятой (см. чертеж).

Для выдвижения гипотезы о виде распределения вычислим основные числовые оценки признака X:

- средняя выборочная

$$\bar{x}_в = \frac{\Sigma x_i n_i}{n} = \frac{5862{,}90}{100} = 58{,}629 \cong 58{,}63\,;$$

- выборочная дисперсия

$$D_в(x) = \frac{\Sigma x_i^2 n_i}{n} - (\overline{x}_в)^2 = \frac{372080,57}{100} - (58,63)^2 = 283,32;$$

- выборочное среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_в(X) = \sqrt{D_в(X)} = \sqrt{283,\ 32} = 16,\ 83;$$

- исправленное среднеквадратическое отклонение

$$\overline{s} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma_в(X) = \sqrt{\frac{100}{99}} \cdot 16,83 = 16,91.$$

При этом мы воспользовались итоговыми данными 6 и 7 граф.

В пользу того, что X имеет нормальное распределение, говорят следующие факты:

а) полигон относительных частот напоминает кривую Гаусса;

б) оценивая теоретическое математическое ожидание a величиной $\overline{x}_в = 58,63$, а теоретическое среднеквадратическое отклонение σ величиной $\sigma_в(X) = 16,83$, получим

$$(a - 3\sigma;\ a + 3\sigma) \cong (\overline{x}_в - 3\sigma_в(X);\ \overline{x}_в + 3\sigma_в(X)) =$$

$$= (58,63 - 3 \cdot 16,83;\ 58,63 + 3 \cdot 16,83) = (8,14;\ 109,12).$$

Как видим, исходные данные попадают в этот интервал, что согласуется с "правилом 3σ".

В силу этого при уровне значимости $\alpha = 0,01$ выдвинем и проверим гипотезу о том, что рассматриваемый признак X имеет нормальное распределение с функцией плотности

$$f(x) = \frac{1}{16,91 \cdot \sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x - 58,63)^2}{571,90}},$$

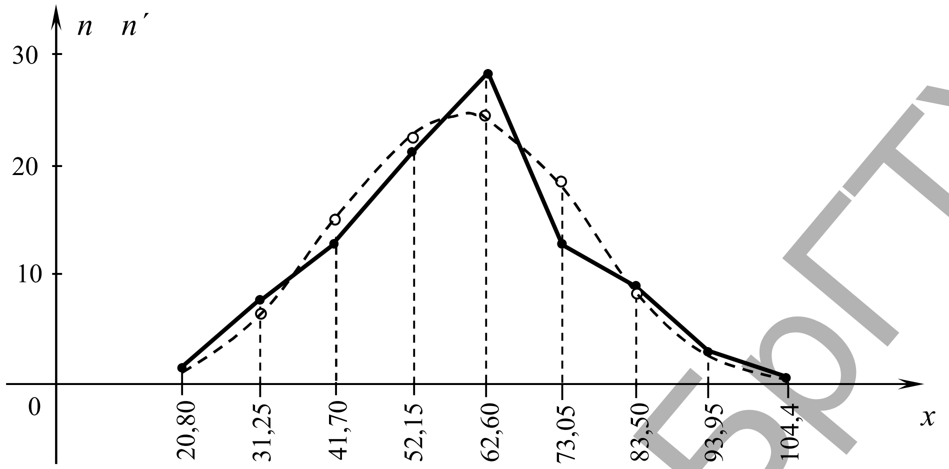
с $a = \overline{x}_в = 58,\ 63$ и $\sigma = \overline{s} = 16,91$. Для этого вычислим выравнивающие частоты $n_i' = nP_i$, где P_i – вероятность попадания X в i- й вариационный интервал определяется по формуле

$$P_i = P(a_{i-1} \le X \le a_i) = \Phi\left(\frac{a_i - \overline{x}_в}{\overline{s}}\right) - \Phi\left(\frac{a_{i-1} - \overline{x}_в}{\overline{s}}\right),$$

a_i – концы интервалов, а значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ найдем по таблицам. В 8 и 9 графах таблицы *2* сделаны вычисления для начал интервалов, и только в 10-й строке – для конца последнего интервала.

Как видим, выравнивающие частоты в основном близки к эмпирическим частотам (графы 4 и 11), что еще раз подтверждает правильность выдвинутой гипотезы о нормальном распределении признака.

На графике совместим n_i и n_i', приняв их за частоты x_i – середин интервалов.



Пунктирная линия соединяет точки $(x_i;\, n_i')$ и является графиком гипотетической функции плотности. Близость этих линий еще раз говорит в пользу выдвигаемой гипотезы.

Гипотезу о виде распределения проверим, применяя критерий согласия Пирсона, в котором вычисляется статистика

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}.$$

При этом интервалы, имеющие частоты, меньшие пяти, объединяются с соседними (графы 11 и 12). В итоге получено $\chi^2_{набл.} = 2,2065$.

Далее определим число степеней свободы $v = k - r - 1$, где $k = 6$ – число интервалов с учетом их объединения, а $r = 2$ – число параметров распределения, вычисленных по выборке (a и σ^2). У нас получится $v = 3$. Тогда при уровне значимости $\alpha = 0,01$ и $v = 3$ по таблице "*Критические точки распределения* χ^2" находим $\chi^2_{крит.} = \chi^2(3;\, 0,01) = 11,3$. Так как $\chi^2_{набл.} < \chi^2_{крит.}$, то с 99%-ой уверенностью можно утверждать, что признак X распределен нормально и его функция плотности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{16,91\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-58,63)^2}{571,90}}$$

с $a = 58,63$ и $\sigma = 16,91$.

Теперь для отыскания вероятности попадания признака X в интервал $(58,63 - 5;\ 58,63 + 3) = (53,63;\ 61,63)$ воспользуемся формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

У нас

$$P(53,63 < X < 61,63) = \Phi\left(\frac{61,63-58,63}{16,91}\right) - \Phi\left(\frac{53,63-58,63}{16,91}\right) = \Phi(0,18) + \Phi(0,30) =$$

$$= 0,0714 + 0,1179 = 0,1893.$$

Задание 2.

Предварительные вычисления вносим в "расширенную" таблицу 3:

Таблица 3.

$x \backslash y$	10	15	20	25	30	m_x	$x m_x$	$x^2 m_x$	$\bar{Y}_x$
2	3	4				7	14	28	12,86
5		10	9	3		22	110	550	18,41
8		6	40	5		51	408	3264	19,90
11			4	8	3	15	165	1815	24,67
14				2	3	5	70	980	28,00
m_y	3	20	53	18	6	n= 100	767	6637	
$y m_y$	30	300	1060	450	180	2020			
$y^2 m_y$	300	4500	21200	11250	5400	42650			
$\bar{X}_y$	2	5,30	7,72	9,50	12,50				

Сначала подсчитываются частоты составляющих признаков m_x и m_y суммированием совместных частот по строкам и столбцам соответственно.

Числа в столбцах m_x, $x m_x$, $x^2 m_x$, стоящие под двойной чертой, и строках m_y, $y m_y$, $y^2 m_y$, стоящие справа от двойной черты, получены суммированием и равны n, $\sum x m_x$, $\sum x^2 m_x$ и соответственно n, $\sum y m_y$, $\sum y^2 m_y$. Находим числовые характеристики составляющих признаков X и $У$:

$$\bar{x} = \frac{\sum x m_x}{n} = \frac{767}{100} = 7.67,$$

$$D(x) = \frac{\sum x^2 m_x}{n} - \bar{x}^2 = \frac{6637}{100} - 7.67^2 = 7.54, \quad \sigma_x = \sqrt{7.54} = 2.75,$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y m_y}{n} = \frac{2020}{100} = 20.2,$$

$$D(y) = \frac{\sum y^2 m_y}{n} - \bar{y}^2 = \frac{42650}{100} - 20.2^2 = 16.46, \quad \sigma_y = \sqrt{16.46} = 4.06.$$

Далее,

$$\sum xym_{xy} = 2\left(10\cdot 3 + 15\cdot 4\right) + 5\left(15\cdot 10 + 20\cdot 9 + 25\cdot 3\right) + 8\left(15\cdot 6 + 20\cdot 40 + 25\cdot 5\right) +$$

$$+11\left(20\cdot 4 + 25\cdot 8 + 30\cdot 3\right) + 14\left(25\cdot 2 + 30\cdot 3\right) = 16355.$$

Находим выборочный коэффициент корреляции по формуле:

$$r_в = \frac{\sum xyn_{xy} - n\cdot\bar{x}\cdot\bar{y}}{n\sigma_x\sigma_y} = \frac{16355 - 100\cdot 7,67\cdot 20,2}{100\cdot 2,75\cdot 4,06} = 0,772\,. \qquad (*)$$

Близость $r_в$ к единице говорит о достаточно тесной связи признаков X и $У$. Для оценки существенности этой связи на уровне значимости α, равном 0,01 или 0,05 вычислим статистику $t_{набл.} = \frac{|r_в|}{\sigma_r}$, где среднеквадратическая ошибка коэффициента корреляции вычисляется по формуле

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-0,772^2}{100-2}} = 0,064\,.$$

Отсюда $t_{набл.} = \frac{0,772}{0,064} = 12,06$. Далее, принимая уровень значимости $\alpha = 0,01$, при числе степеней свободы $\nu = n - 2 = 100 - 2 = 98$ по таблице распределения Стьюдента находим $t_{крит.} = 2,626$. Так как $t_{набл.} > t_{крит.}$, то с 99%-ой уверенностью можно говорить о существенности тесной связи между признаками Y и X.

Теперь находим уравнения прямых регрессии по формулам:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_в\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\cdot(x-\bar{x}); \quad \bar{x}_y - \bar{x} = r_в\cdot\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\cdot(y-\bar{y}),$$

$$\bar{y}_x - 20,2 = 0,772\cdot\frac{4,06}{2,75}\cdot(x - 7,67),$$

$$\bar{x}_y - 7,67 = 0,772\cdot\frac{2,75}{4,06}\cdot(y - 20,2)\,.$$

После преобразований получим

$$\bar{y}_x = 1,14x + 11,46,$$

$$\bar{x}_y = 0,52y - 10,56\,.$$

Для сравнения вычислим эмпирические условные средние $\bar{Y}_X$ (последний столбец) и $\bar{X}_y$ таблицы:

$$\bar{Y}_2 = (10\cdot 3 + 15\cdot 4)/7 = 12,86,$$

$$\bar{Y}_5 = (15\cdot 10 + 20\cdot 9 + 25\cdot 3)/22 = 18,41 \text{ и т.д..}$$

Значения $\overline{X}_y$ находим аналогично (последняя строка):

$$\overline{X}_{10} = 2 \cdot 3/3 = 2,$$

$$\overline{X}_{15} = \left(2 \cdot 4 + 5 \cdot 10 + 8 \cdot 6\right)/20 = 5{,}30 \text{ и т.д.}$$

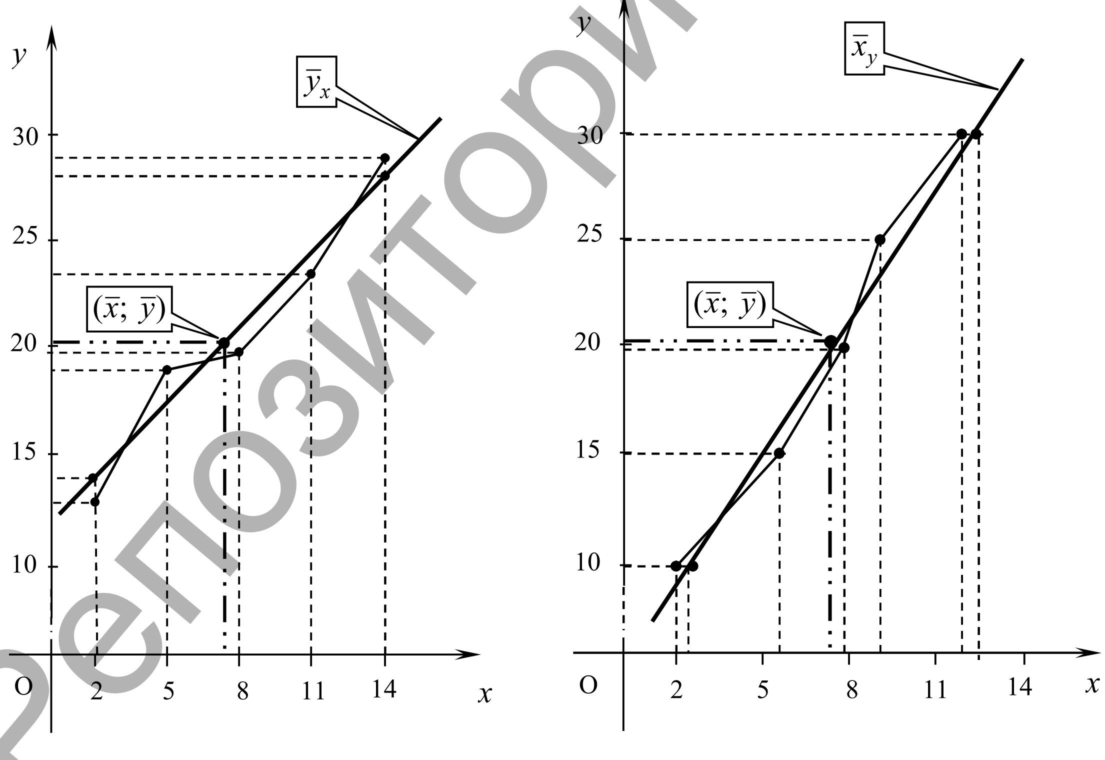
Построим графики полученных прямых, совмещая их с полигонами условных средних соответствующих составляющих признаков (на следующей странице на чертежах ломаные линии).

Найдем теоретические значения условных средних:

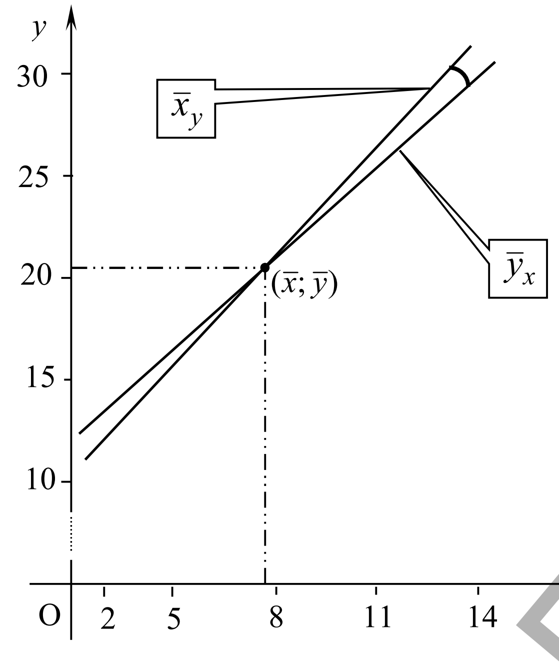
$\bar{y}_x(2)$=13,74; $\bar{y}_x(5)$=17,16; $\bar{y}_x(8)$=20,58; $\bar{y}_x(11)$=24,00; $\bar{y}_x(14)$=27,42.

$\bar{x}_y(10)$=2,31; $\bar{x}_y(15)$=4,91; $\bar{x}_y(20)$=7,51; $\bar{x}_y(25)$=10,11; $\bar{x}_y(30)$=12,71.

Сравнение $\overline{Y}_x$ и $\bar{y}_x$ показывает, что их значения достаточно близки. Отклонения между теоретическими значениями $\bar{y}_x$ и экспериментальными $\overline{Y}_x$ составляют: 0,88; -1,25; 0,68; -0,67; -0,53, малые значения которых говорят в пользу корректности полученного уравнения регрессии. Аналогично имеет место и для $\bar{x}_y$ и $\overline{X}_y$, отклонения между которыми равны соответственно: 0,31; -0,39; -0,21; 0,61; 0,21.(*)



Если изобразить обе прямые на одном чертеже, то, чем ближе к нулю острый угол между ними (отмечен дугой), тем теснее связь между признаками. Если же этот угол близок к 90º, то это говорит о слабой связи или об отсутствии таковой вообще.



Литература

1. Теория вероятностей / Методические указания и задания к контрольной работе по теории вероятностей для студентов экономических специальностей заочной формы обучения. Сост. Тузик Т.А., Санюкевич А.В., Емельянова Г.Р., Гоголинская Р.А., Денисович О.К. –Брест: БрПИ. –1999.
2. Теория вероятностей и математическая статистика / методические рекомендации и варианты контрольных работ по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов технических специальностей заочной формы обучения. Сост. Сидоревич М.П., Махнист Л.П., Гусева С.Т., Мороз Л.Т. –Брест: БрПИ. –2000.
3. Математическая статистика / задания, методические указания, статистические таблицы. Сост. Годунов Б.А., Рубанов В.С., Тузик.Т.А. –Брест: УО «БГТУ». –2002.
4. Рябушко А.П. и др. Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей и математической статистике. -Мн.: Выш.шк., 1992.
5. Белько И.В., Свирид Г.П. Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры и задачи. – Мн.: Новое издание, 2002.– 250 с.
6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Высш. шк., 2001. – 575 с.
7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. –М.: Высш. шк., 1998, - 479 с.
8. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. –М.: Высш. шк., 1979, - 400 с.
9. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. –М.: ИНФРА-М, 1997. –302 с.

Содержание

Учебное издание

Составители: Гладкий Иван Иванович

Дворниченко Александр Валерьевич

Санюкевич Александр Викторович

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические рекомендации и варианты контрольных работ
по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика»
для студентов технических специальностей заочной формы обучения

Редактор Т.В. Строкач
Ответственный за выпуск А.В. Дворниченко
Технический редактор А.Д. Никитчик
Компьютерный набор И.И. Гладкий

Подписано в печать 20.01.04г. Формат 60х84 1/16. Бумага писч.
Усл.п.л. 3,25. Уч.изд.л. 3,5. Тираж 150 экз. Заказ № 63.

Отпечатано на ризографе УО «Брестский государственный технический университет». 224017, Брест, ул. Московская,267.