Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»

Кафедра высшей математики

Интегралы. Дифференциальные уравнения. Кратные и криволинейные интегралы

Методические указания по дисциплине
«Высшая математика»
для студентов технических специальностей

Брест 2004

УДК 519.2 (076)

Разработка содержит методические материалы по разделам курса «Высшая математика», изучаемые во втором семестре студентами технических специальностей. В нее включены вопросы учебной программы и типовые задачи. Включены тексты аттестационных работ по темам «Интегралы» и «Дифференциальные уравнения» и решения типовых вариантов этих аттестационных работ. Настоящая разработка поможет студентам успешно выполнить и защитить аттестационные работы и подготовиться к сдаче экзамена.

Составители

Гладкий И.И., *старший преподаватель,*
Денисович О.К., *ассистент,*
Лизунова И.В., *доцент,*
Маньяков Н.В., *старший преподаватель.*

Рецензент:
Зав. кафедрой математического моделирования БрГУ им А.С. Пушкина, к.ф.-м.н., доцент **Тузик С.А.**

Вопросы учебной программы за 2 семестр

1. Комплексные числа. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы записи комплексных чисел. Геометрическое изображение комплексных чисел.
2. Действия над комплексными числами.
3. Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла.
4. Таблица интегралов.
5. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
6. Интегрирование рациональных функций.
7. Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций.
8. Интегрирование некоторых иррациональных функций.
9. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции.
10. Определенный интеграл как предел интегральной суммы, его геометрический и физический смыслы.
11. Основные свойства определенного интеграла.
12. Интеграл с переменным верхним пределом.
13. Формула Ньютона-Лейбница.
14. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
15. Интегрирование периодических, четных и нечетных функций.
16. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Главное значение несобственного интеграла первого рода. Признаки сравнения.
17. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Главное значение несобственного интеграла второго рода.
18. Вычисление площадей плоских фигур в декартовой и полярной системах координат.
19. Вычисление объемов тел по параллельным сечениям и объемов тел вращения.
20. Вычисление длины дуги кривой.
21. Нахождение работы переменной силы с помощью определенного интеграла.
22. Вычисление статических моментов, координат центра масс и моментов инерции плоской кривой.
23. Вычисление статических моментов, координат центра масс и моментов инерции плоской фигуры.

24. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
25. ДУ с разделенными и разделяющимися переменными.
26. Однородные ДУ первого порядка.
27. Линейные ДУ первого порядка и уравнения Бернулли.
28. ДУ высших порядков. Задача Коши.
29. ДУ, допускающие понижение порядка.
30. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) и свойства их решений.
31. Линейная зависимость и независимость функций. Определитель Вронского.
32. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ.
33. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ). Теорема о структуре общего решения ЛНДУ.
34. Принцип суперпозиции решений ЛНДУ.
35. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).
36. ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.
37. ЛОДУ высших порядков с постоянными коэффициентами.
38. ЛНДУ с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью.
39. Решение систем дифференциальных уравнений.
40. Определение, свойства и вычисление двойного интеграла.
41. Двойной интеграл в полярных координатах.
42. Вычисление объемов и площадей с помощью двойного интеграла.
43. Вычисление массы, статических моментов, координат центра масс и моментов инерции плоской пластины.
44. Определение, свойства и вычисление тройного интеграла.
45. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.
46. Вычисление объема тела, массы тела, его статических моментов, координат центра масс и моментов инерции.
47. Определение, свойства и вычисление криволинейного интеграла по длине дуги (КРИ-1).
48. Приложения криволинейного интеграла первого рода.
49. Определение, свойства и вычисление криволинейного интеграла по координатам (КРИ-2).
50. Формула Грина.
51. Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.
52. Восстановление функции по ее полному дифференциалу.
53. Приложения криволинейного интеграла второго рода.

Перечень типовых задач по темам семестра.

1. *Представить в тригонометрической и показательной форме, числа*

а) $\sqrt{3}+i$; **б)** $\dfrac{2}{1+i}$; **в)** $-1+\sqrt{3}i$; **г)** -5; **д)** $-\dfrac{1}{2}i$.

2. *Выполнить действия, ответ представить в алгебраической форме*

а) $\dfrac{(1-3i)^2}{3i(2-5i)}$; **б)** $\dfrac{(2+i)^3}{1+2i}$; **в)** $\left(1+\sqrt{3}i\right)^5$.

3. *Найти корни уравнения*

а) $z^3=1+\sqrt{3}i$; **б)** $z^4+1=0$; **в)** $z^2-i=0$; **г)** $z^2+4z+5=0$.

4. *Найти интегралы*

$\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{25-x^4}}$; $\displaystyle\int\frac{x^3dx}{\sqrt{9-x^4}}$; $\displaystyle\int x\cdot\sqrt{4-x^2}\,dx$; $\displaystyle\int x^4\cdot\sqrt[3]{1-2x^5}\,dx$;

$\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+3}}$; $\displaystyle\int\frac{e^{\sqrt{1-2x}}}{\sqrt{1-2x}}dx$; $\displaystyle\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2 x(3tgx+2)}$;

$\displaystyle\int\frac{x+5}{x^2+x-2}dx$; $\displaystyle\int\frac{2x-10}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$; $\displaystyle\int\frac{x^5}{x^3-3x+2}dx$; $\displaystyle\int\frac{x^5-x+1}{x^4-2x^2-3}dx$;

$\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+4}$; $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$; $\displaystyle\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2+x+1}}$; $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+10}}$;

$\displaystyle\int\sqrt{25-x^2}\,dx$; $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$; $\displaystyle\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}}$; $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$;

$\displaystyle\int(2x-1)e^{-3x}dx$; $\displaystyle\int x\cdot arctg\,x\,dx$; $\displaystyle\int\arccos x\,dx$; $\displaystyle\int(1-x)\cos(3x+1)\,dx$;

$\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx$; $\displaystyle\int\sin(\ln x)dx$; $\displaystyle\int\ln^2 x\,dx$; $\displaystyle\int(2x+3)\ln(x-4)\,dx$;

$\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x-3\sin x}$; $\displaystyle\int\frac{dx}{5+3\cos x}$; $\displaystyle\int\frac{dx}{1+3\cos^2 x}$; $\displaystyle\int\frac{tg\,x}{1-ctg^2x}dx$;

$\displaystyle\int\cos^4 3x\sin^2 3x\,dx$; $\displaystyle\int\cos^3 x\sin^8 x\,dx$; $\displaystyle\int\sin^4 2x\,dx$; $\displaystyle\int\frac{dx}{4\sin^2 x-5\cos^2 x}$.

5. *Вычислить определенные интегралы*

а) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$**;** **б)** $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx$; **в)** $\int\limits_0^{\pi^2} \cos\sqrt{x}\,dx$; **г)** $\int\limits_0^1 x^2 e^x\,dx$.

6. *Вычислить несобственные интегралы или установить их рассходимость*

а) $\int\limits_0^\infty x^3 e^{-x^2}dx$; **б)** $\int\limits_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^3}$; **в)** $\int\limits_1^\infty \frac{2}{\sqrt{x}}dx$; **г)** $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; **д)** $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$**;**

е) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$**;** **ж)** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$**;** **з)** $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$**;** **и)** $\int\limits_0^\infty \frac{xdx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}$**.**

7. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями*

а) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} y = x^3, \\ y = 1, \\ x = 0; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t; \end{cases}$ **г)** $r = 2(1-\cos\varphi)$; **д)** $r = 4\sin^2\varphi$**.**

8. *Вычислить длину дуги линии, описываемой уравнением*

а) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$**;** **б)** $\begin{cases} x = 7(t - \sin t), \\ y = 7(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$; **в)** $r = 5(1+\cos\phi)$.

9. *Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси* Ox *фигуры, ограниченной линиями*

а) $\begin{cases} y = \sin x, \\ y = 0, \\ 0 \le x \le \pi; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} y = e^x, \\ x = 0, \\ y = 0, \\ x = 1; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = 0; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 5\sin t. \end{cases}$

10. *Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси* Oy *фигуры, ограниченной линиями*

а) $\begin{cases} y^2 = 4 - x, \\ x = 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} y = x^3, \\ x = 0, \\ y = 8; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 5\sin t. \end{cases}$

11. Вычислить работу, которую необходимо затратить на выкачивание воды из резервуара P. Удельный вес воды принять равным $9{,}81\frac{кН}{м^3}$.

1) P: полусфера радиусом 2м;

2) P: желоб, в перпендикулярном сечении которого лежит полуокружность радиусом 1м, длина желоба 10м;

3) P: цилиндр с радиусом основания 1м и высотой 3м;

4) P: конус с радиусом основания 2м и высотой 5м;

5) P: правильная треугольная пирамида с основанием 2м и высотой 5м;

6) P: правильная четырехугольная пирамида со стороной основания 2м и высотой 5м.

12. Вычислить работу, затрачиваемую на преодоление силы тяжести при построении сооружения Q из некоторого материала, удельный вес которого γ.

1) Q: правильная усеченная четырехугольная пирамида, сторона верхнего основания которой равна 2м, нижнего – 4м, высота 2м, $\gamma = 24\frac{кН}{м^3}$;

2) Q: правильная треугольная пирамида со стороной основания 3м и высотой 6м, $\gamma = 20\frac{кН}{м^3}$;

3) Q: усеченный конус, радиус верхнего основания которого равен 1м, нижнего – 2м, высота – 2м, $\gamma = 21\frac{кН}{м^3}$.

13. Вычислить силу давления воды на пластину R, вертикально погруженную в воду, считая что удельный вес воды равен $9{,}81\frac{кН}{м^3}$.

1) R: равнобедренный треугольник, обращенный вершиной вниз, высота равна 1м, основание совпадает с кромкой воды и равно 2м;

2) R: полукруг радиусом 2м, диаметр совпадает с кромкой воды;

3) R: равнобедренный треугольник, обращенный вершиной вниз, основание которого равно 4м, высота 1м, погруженный на 1м относительно кромки воды;

4) R: полукруг радиусом 1м, обращенный выпуклостью вверх и погруженный на 1м относительно кромки воды;

5) R: равнобокая трапеция, нижнее основание которой равно 8м, верхнее – 4м, высота равна 2м, нижнее основание находится на 1м ниже кромки воды.

14. Найти общее или частное решение (общий или частный интеграл) дифференциального уравнения

а) $e^{x+2y}dy = xdx$;

б) $\left(x + xy\right)dx + \left(y - xy\right)dx = 0,\ \ y\left(1\right) = 1$;

в) $\sin y \cos x dx = \cos y \sin x dx$;

г) $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ \ y(1) = 0$;

д) $\left(x + 2y\right)dx - xdx = 0$;

е) $y' + ytgx = \dfrac{1}{\cos x}$;

ж) $y' - y = e^x,\ \ y(0) = 1$;

з) $y' + 3y = e^{2x}y^2,\ \ y(0) = 1$;

и) $y' + 2e^x y = 2e^x\sqrt{y}$;

к) $\left(2x - 2\sin^2 y - y\sin 2y\right)dy + ydx = 0,\ \ y\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

15. Проинтегрировать уравнения

а) $y''' = x^2 - \cos x$; **б)** $x^2 y''' = \left(y''\right)^2$; **в)** $y y'' = \left(y'\right)^2$.

16. Решить задачу Коши

а) $y'' = \dfrac{\ln x}{x^2}$, $y(1) = 3$, $y'(1) = 1$;

б) $xy''' - y'' = x^2 + 1$, $y(-1) = 0$, $y'(-1) = 1$, $y''(-1) = 0$;

в) $2y'^2 = (y-1)y''$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

17. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных

а) $y'' + 4y = ctg2x$; **б)** $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^2}{x^2}$; **в)** $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

18. Найти решение ДУ, удовлетворяющее начальным условиям

а) $y'' + 16y = 32e^{4x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$;

б) $y'' + 15y' + 6y = 52\sin 2x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = -2$;

в) $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$;

г) $y''' - 7y'' + 6y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 30$.

19. Решить систему ДУ двумя способами: а) сведением к ДУ высшего порядка (методом исключения); б) с помощью характеристического уравнения а) $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 3y, \\ \dot{y} = x + 5y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

20. Записать двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ *в виде повторных с внешним интегрированием по* x *и внешним интегрированием по* y, *если область* D *задана указанными линиями*

а) $\begin{cases} x^2 = 2y, \\ 5x - 2y - 6 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = \sqrt{4 - x^2}, \\ y = \sqrt{3x}, \\ x \geq 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = -x, \\ y^2 = x + 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x \geq 0, \\ y = 1, \\ y = -1, \\ y = \log_{\frac{1}{2}} x. \end{cases}$

21. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями

а) $\iint\limits_D (x^3 + 3y)\,dx\,dy$, $D: \begin{cases} x + y = 1, \\ y = x^2 - 1, \\ x \geq 0; \end{cases}$ б) $\iint\limits_D x\,y\,dx\,dy$, $D: \begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = 0, \\ x + y = 2. \end{cases}$

22. Вычислить двойной интеграл, используя полярные координаты

а) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{3-x^2}} \dfrac{dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$; б) $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \dfrac{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dy$;

в) $\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} \dfrac{x\,y}{x^2 + y^2}\,dy$; г) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,dy$.

23. Вычислить площадь плоской области D, *ограниченной заданными линиями*

а) $D: \begin{cases} y = \sqrt{2 - x^2}, \\ y = x^2; \end{cases}$ б) $D: \begin{cases} y = 2 - x, \\ y = 2x - x^2, \\ x = 0; \end{cases}$ в) $D: \begin{cases} y = \cos x, \\ y \leq x + 1, \\ y \geq 0. \end{cases}$

24. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями, с помощью двойного интеграла

а) $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;

б) $x = \sqrt{25 - y^2}$, $z = x$, $y = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

25. *Вычислить массу неоднородной пластины* D

а) $D: x \geq 0,\quad y \geq 0,\quad x^2 + y^2 = 4,\quad \mu = 4 - x^2;$

б) $D: x = 0,\quad y = 0,\quad x + y = 1,\quad \mu = x^2 + y^2.$

26. *Вычислить координаты центра масс однородной фигуры, лежащей в плоскости* Oxy *и ограниченной линиями*

а) $y^2 = 4x + 4$, $\quad y^2 = -2x + 4$ **б)** $x = y^2$, $\quad y = x^2$.

27. *Вычислить момент инерции относительно начала координат фигуры плотностью* $\mu(x, y)$, *ограниченной линиями*

а) $\mu(x, y) = 1$, $\quad x + y = 2$, $\quad x = 2$, $\quad y = 2$;

б) $\mu(x, y) = 3{,}5$, $\quad x^2 + y^2 - 2x = 0;$

в) $\mu(x, y) = x^2 y$, $\quad y = x^2$, $\quad y = 1$;

28. *Вычислить тройные интегралы*

а) $\iiint\limits_V x\,y\,z^2 dx\,dy\,dz$, $\quad V: 0 \leq x \leq 2,\ -1 \leq y \leq 0,\ 0 \leq z \leq 4;$

б) $\iiint\limits_V \left(2x - y^2 - z\right) dx\,dy\,dz$, $\quad V: 1 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq 2,\ -1 \leq z \leq 0$;

в) $\iiint\limits_V \dfrac{x\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\quad V: x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 4x,\ z \geq 0,\ z = 4,\ y \geq 0,\ y \leq x.$;

г) $\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz$, $\quad V: z = \sqrt{18 - x^2 - y^2},\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x \geq 0$.

29. *С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного поверхностями*

а) $x^2 + y^2 = 1$, $\quad z = 2 - x - y$, $\quad z \geq 0$;

б) $y = 2x$, $\quad z = x^2$, $\quad z \geq 0$, $\quad y \geq 0$, $\quad x = 4$;

в) $x + y = 2$, $\quad z = x^2 + y^2$, $\quad z \geq 0$, $\quad y \geq 0$, $\quad x \geq 0$.

30. *Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область* V, *ограниченную указанными поверхностями*

а) $V: \quad z = 8\left(x^2 + y^2\right),\quad z = 32$;

б) $V: \quad z = 9\sqrt{x^2 + y^2},\quad z = 36$;

в) $V: \quad y = 3\sqrt{x^2 + z^2},\quad y = 9$.

31. Вычислить момент инерции относительно указанной оси координат однородного тела ($\mu(x;y)=1$), занимающего область ограниченную данными поверхностями

а) $x=y^2+z^2$, $\quad x=2$, $\quad Ox$;

б) $y=2\sqrt{x^2+z^2}$, $\quad y=2$, $\quad Oy$;

в) $z^2=x^2+y^2$, $\quad z=3$, $\quad Oz$.

32. Вычислить

а) $\int\limits_L x\,dl$, если L − отрезок прямой соединяющей точки $A(0;0)$ и $B(1,2)$;

б) $\int\limits_L \dfrac{dl}{x+y}$, если L − отрезок прямой, $y=x+2$, соединяющей точки $A(2;4)$ и $B(1,3)$;

в) $\int\limits_L \sqrt{2y}\,dl$, если L − первая арка циклоиды $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases}$ $(a>0)$;

г) $\int\limits_L (x+y)\,dl$, если L − первый виток лемнискаты $\rho^2=a^2\cos^2\varphi$.

33. Вычислить

а) $\int\limits_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, где L − дуга параболы $y=x^2$ от точки $A(-1,1)$ до точки $B(1,1)$;

б) $\int\limits_L 2xy\,dx-x^2\,dy$, где L − ломанная OAB: $O(0,0)$, $B(2,0)$, $A(2,1)$;

в) $\int\limits_L x\,dy-y\,dx$, где L − дуга астроиды $\begin{cases} x=2\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t, \end{cases}$ от точки $A(2,0)$ до точки $B(0,2)$;

г) $\int\limits_{L_{AB}} 2xy\,dx+y^2\,dy+z^2\,dz$, где L_{AB} − дуга одного витка винтовой линии

$$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \\ z=2t, \end{cases}$$ от токи $A(1,0,0)$ до точки $B(1,0,4\pi)$.

34. Вычислить по определению и по формуле Грина:

а) $\oint\limits_L y\,dx - x\,dy$, где L − дуга эллипса $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ "пробегаемая" против хода часовой стрелки;

б) $\oint\limits_L x\,dy$, где L − контур треугольника, образованного прямыми $y = x$, $x = 2$, $y = 0$ при положительном направлении обхода контура;

в) $\oint\limits_L \left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - y^2\right)dy$, где L − контур треугольника с вершинами $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ при положительном направлении обхода контура.

35. Вычислить работу силы $\vec{F}(x,y)$ при перемещении материальной точки вдоль линии L

а) $\vec{F}(x,y) = y\vec{i} + (x+y)\vec{j}$, L: $y = x^2$ из точки $O(0,0)$ в точку $A(1,1)$;

б) $\vec{F}(x,y) = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$, L: прямая, соединяющая точки $A(0,0)$ и $B(2,1)$;

в) $\vec{F}(x,y) = (x+y)\vec{i} - x\vec{j}$, L: окружность $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ по ходу часовой стрелки.

Аттестационная работа по теме «Интегралы»

Задание 1. Найти неопределенные интегралы (результаты в случаях а), б) проверить дифференцированием):

1.	**а)** $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x\,dx$;	**б)** $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$;	**в)** $\int \frac{x^4+5}{4x^3-x}dx$;
	г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}$;	д) $\int \frac{dx}{\sin x+tg\,x}$;	е) $\int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-5x+1}}dx$.
2.	**а)** $\int \frac{x\,dx}{(x^2+4)^6}$;	**б)** $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$;	**в)** $\int \frac{x^4-2}{x^3+1}\,dx$;
	г) $\int \frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$;	д) $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\cos x}$;	е) $\int \frac{2x+1}{5x^2+2x+10}dx$.
3.	**а)** $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^3}}$;	**б)** $\int x\ln\frac{1-x}{1+x}\,dx$;	**в)** $\int \frac{x^5}{x^3-3x+2}\,dx$;
	г) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x+2}}\,dx$;	д) $\int \frac{dx}{3\cos x+4\sin x}$;	е) $\int \frac{x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}}dx$.
4.	**а)** $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3tg\,x+2)}$;	**б)** $\int x\sin x\cdot\cos x\,dx$;	**в)** $\int \frac{x^5+3}{x^4+5x^2+6}\,dx$;
	г) $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$;	д) $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$;	е) $\int \frac{3x-2}{5x^2+2x+10}dx$.
5.	**а)** $\int \frac{\cos 3x}{(4+\sin 3x)^2}dx$;	**б)** $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$;	**в)** $\int \frac{x^6\,dx}{x^4-16}$;
	г) $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$;	д) $\int \frac{\cos^3 2x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx$;	е) $\int \frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}}\,dx$.
6.	**а)** $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$;	**б)** $\int x\arcsin x\,dx$;	**в)** $\int \frac{x^4+x+1}{x^3+x^2-2x}\,dx$;
	г) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}$;	д) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x}\,dx$;	е) $\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5}\,dx$.
7.	**а)** $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x}\,dx$;	**б)** $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$;	**в)** $\int \frac{x^5+3}{x^4+4x^2}dx$;
	г) $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$;	д) $\int ctg^4 x\,dx$;	е) $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx$.

8. **а)** $\int \cos^3 x \cdot \sin 2x\, dx$; **б)** $\int (\sqrt{2} - 8x) \sin 3x\, dx$; **в)** $\int \frac{x^3 - 3x - 12}{x^3 + x^2 - 6x} dx$;

г) $\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x\left(1 - \sqrt[3]{x}\right)} dx$; **д)** $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}} dx$; е) $\int \frac{x+4}{2x^2 - 7x + 1} dx$.

9. **а)** $\int \frac{6x - 5}{2\sqrt{6 - 5x + 3x^2}} dx$; **б)** $\int e^{-3x}(2 - 9x)\, dx$; **в)** $\int \frac{x^5\, dx}{x^4 + 6x^2 + 8}$;

г) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$; **д)** $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$; е) $\int \frac{2x - 8}{\sqrt{1 - x + x^2}} dx$.

10. **а)** $\int \frac{dx}{x\cos^2(1 + \ln x)}$; **б)** $\int arctg\sqrt{4x - 1}\, dx$; **в)** $\int \frac{6x^4 - 1}{2x^3 - x + 1} dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{(x+3)^2}}$; **д)** $\int \frac{dx}{\left(1 + e^x\right)^2}$; е) $\int \frac{3x - 2}{5x^2 - 3x + 2} dx$.

11. **а)** $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx$; **б)** $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$; **в)** $\int \frac{x^5 - x + 1}{x^4 + 2x^2 - 3} dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(1 + \sqrt{x}\right)}$; **д)** $\int (3 + \cos 2x) \sin^2 x\, dx$; е) $\int \frac{2x - 10}{\sqrt{1 + x - x^2}} dx$.

12. **а)** $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{9 - x^4}}$; **б)** $\int \frac{x\, dx}{\sin^2 x}$; **в)** $\int \frac{x^4 - 2x^2 - 1}{x^3 - 2x + 1} dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x} - \sqrt[4]{1 - 2x}}$; **д)** $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin x + \cos x}$; е) $\int \frac{x + 5}{x^2 + x - 2} dx$.

13. **а)** $\int \frac{2^x\, dx}{\sqrt{1 - 4^x}}$; **б)** $\int e^{2x} \cdot \cos x\, dx$; **в)** $\int \frac{4x^5 + 1}{x^3 - 1} dx$;

г) $\int x^2\sqrt{4 - x^2}\, dx$; **д)** $\int tg^4 3x\, dx$; е) $\int \frac{2x + 5}{\sqrt{4x^2 + 8x + 9}} dx$.

14. **а)** $\int \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{3 + \sin^2\alpha}$; **б)** $\int \sin \ln x\, dx$; **в)** $\int \frac{x^5 - 2x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$;

г) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 9}}$; **д)** $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$; е) $\int \frac{x\, dx}{2x^2 + x + 5}$.

15. **а)** $\int \frac{\ln tg\, x}{\sin x \cdot \cos x}\, dx$; **б)** $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^5}}\, dx$; **в)** $\int \frac{x^5 - 1}{4x^3 + x}\, dx$;

г) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\, dx$; **д)** $\int ctg^3 x\, dx$; е) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x+3x^2}}\, dx$.

16. **а)** $\int \left(2 - 3x^{4/3}\right)^{1/5} \cdot x^{1/3}\, dx$; **б)** $\int (\arcsin x)^2\, dx$; **в)** $\int \frac{x^4}{x^3 + x^2 + 2x + 2}\, dx$;

г) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}\, dx$; **д)** $\int \sqrt[5]{\cos^3 x}\, \sin^3 x\, dx$; е) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2 - 2x + 6}}\, dx$.

17. **а)** $\int \frac{dx}{e^x\left(3 + e^{-x}\right)}$; **б)** $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}\, dx$; **в)** $\int \frac{x^6 + 2}{x^4 + 3x^2}\, dx$;

г) $\int \sqrt{\frac{3+2x}{x-2}}\, dx$; **д)** $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\, dx$; е) $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2 - x + 5}}\, dx$.

18. **а)** $\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{1 + x^{3/2}}$; **б)** $\int \ln^2 x\, dx$; **в)** $\int \frac{2x^3 - x - 1}{x^3 - x^2 - 6x}\, dx$;

г) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$; **д)** $\int tg^7 x\, dx$; е) $\int \frac{x+1}{2x^2 + 3x - 4}\, dx$.

19. **а)** $\int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx$; **б)** $\int x\, arctg\, x\, dx$; **в)** $\int \frac{x^5 + 2x - 2}{x^4 - 1}\, dx$;

г) $\int \frac{\sqrt[4]{x} + 1}{\left(\sqrt{x} + 4\right)\sqrt[4]{x^3}}\, dx$; **д)** $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x\, \sqrt[3]{\cos x}}\, dx$; е) $\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2 - 4x - 1}}\, dx$.

20. **а)** $\int \frac{\sqrt[3]{4 + \ln x}}{x}\, dx$; **б)** $\int x \cdot tg^2 x\, dx$; **в)** $\int \frac{x^4}{x^3 - 3x - 2}\, dx$;

г) $\int \sqrt{\frac{1 - e^x}{1 + e^x}}\, dx$; **д)** $\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x\, dx$; е) $\int \frac{x-7}{x^2 + 4x + 13}\, dx$.

21. **а)** $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\, dx$; **б)** $\int \frac{4x^4 + 1}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)}\, dx$; **в)** $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx$;

г) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}\, dx$; **д)** $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$; е) $\int \frac{8x+3}{\sqrt{5 + 2x - x^2}}\, dx$.

22. **а)** $\int \frac{e^x}{e^{-x}+e^x}dx$; **б)** $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}\,dx$; **в)** $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$;

г) $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$; **д)** $\int \frac{x^5+3}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$; е) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$.

23. **а)** $\int \frac{\cos^5 x}{\sin x}\,dx$; **б)** $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$; **в)** $\int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}dx$;

г) $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$; **д)** $\int \frac{x^5+2}{(x^2+1)(x^2+x)}dx$; е) $\int \frac{2x-3}{\sqrt{8-2x-x^2}}dx$.

24. **а)** $\int \frac{x+1}{3+4x-x^2}\,dx$; **б)** $\int \frac{arctg\,x}{1+x^2}dx$; **в)** $\int \frac{dx}{tg\,x\cdot\cos 2x}$;

г) $\int \frac{2x^5-3x^2}{1+3x^3-x^6}\,dx$; **д)** $\int \frac{x^4+2x}{(x+2)^2(x^2+1)}\,dx$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

25. **а)** $\int \frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^5}dx$; **б)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}\left(1+\sqrt[3]{x-2}\right)}$; **в)** $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$;

г) $\int \frac{2x^3-3x^2+3}{x^3-2x^2+2x}dx$; **д)** $\int \frac{2x-1}{5-4x-x^2}dx$; е) $\int \frac{\lg x}{x^3}dx$.

26. **а)** $\int \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^5}\,dx$; **б)** $\int \frac{x+4}{\sqrt{x^2+x-2}}dx$; **в)** $\int \ln(x^2+1)\,dx$;

г) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(2-x^2\right)^3}}$; **д)** $\int \frac{x^5+6}{x^4+3x^2}\,dx$; е) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\,dx$.

27. **а)** $\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$; **б)** $\int \frac{x^4dx}{(2+x^2)(x^2-1)}$; **в)** $\int arctg\sqrt{x}\,dx$;

г) $\int \frac{x^3\,dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}$; **д)** $\int \frac{x+5}{2x^2+2x+3}\,dx$; е) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}dx$.

28. **а)** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; **б)** $\int \frac{x^5-1}{x^3+x^2+x}\,dx$; **в)** $\int x\cos^2 x\,dx$;

г) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$; **д)** $\int \frac{dx}{\cos x\cdot\sin^3 x}$; е) $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+1}}\,dx$.

29.	**а)** $\int \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+x\right)^2}dx$;	**б)** $\int \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx$;	**в)** $\int \frac{3x+1}{x\left(1+x^2\right)^2}dx$;
	г) $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$;	**д)** $\int \frac{\sqrt{tg\,x}}{\sin x\cdot\cos x}dx$;	е) $\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx$.

30.	**а)** $\int tg\,x\cdot\ln\cos x\,dx$;	**б)** $\int \frac{5x^3-14}{x^3-x^2+4x-4}\,dx$;	**в)** $\int \arccos x\,dx$;
	г) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-4x+1}}dx$;	**д)** $\int \sqrt{1+\sin x}\,dx$;	е) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx$.

Задание 2. Вычислить определенные интегралы.

1. а) $\int_2^3 y\cdot\ln(y-1)\,dy$; **б)** $\int_{-1}^{1}\frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$.

2. а) $\int_{-2}^{0} x^2 e^{-\frac{x}{2}}\,dx$; **б)** $\int_{\ln 5}^{\ln 12}\frac{dx}{\sqrt{e^x+4}}$.

3. а) $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$; **б)** $\int_0^{13}\frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}\,dx$.

4. а) $\int_0^{\pi} x^2\cdot\sin x\,dx$; **б)** $\int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{26}}\frac{x^3dx}{\left(x^2+1\right)^{2/3}}$.

5. а) $\int_{-1/2}^{1/2}\arccos 2x\,dx$; **б)** $\int_4^9\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$.

6. а) $\int_1^2 (y-1)\ln y\,dy$; **б)** $\int_{e^2}^{e^3}\frac{\ln x}{x\left(1-\ln^2 x\right)}\,dx$.

7. а) $\int_{-1/2}^{0} xe^{-2x}dx$; **б)** $\int_{\ln 3}^{\ln 8}\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

8. а) $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cdot\cos x\,dx$; **б)** $\int_1^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

9. а) $\int_{-2/3}^{-1/3} x\cdot e^{-3x}\,dx$; **б)** $\int_0^{\ln 2}\frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$.

10. а) $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$; б) $\int\limits_2^5 \frac{x^2\, dx}{(x-1)\sqrt{x-1}}$.

11. а) $\int\limits_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x\, dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos y}{4+\sqrt{\sin y}}\, dy$.

12. а) $\int\limits_0^1 arctg\sqrt{x}\, dx$; б) $\int\limits_{\ln 3}^0 \frac{1-e^x}{1+e^x} dx$.

13. а) $\int\limits_0^\pi (x+2)\cdot\cos\frac{x}{2}\, dx$; б) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

14. а) $\int\limits_0^{\pi/8} x^2 \sin 4x\, dx$; б) $\int\limits_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}} dx$.

15. а) $\int\limits_1^2 y^2 \ln y\, dy$; б) $\int\limits_0^{\sqrt[3]{7}} \frac{z^2\, dz}{\sqrt{9+z^3}}$.

16. а) $\int\limits_1^2 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx$; б) $\int\limits_0^{\ln\sqrt{2}} \frac{e^x}{e^x+e^{-x}} dx$.

17. а) $\int\limits_{3/2}^2 arctg\,(2x-3) dx$; б) $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

18. а) $\int\limits_0^{\pi/2} (x+3)\sin x\, dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{(1+x)^4} dx$.

19. а) $\int\limits_1^e x\ln^2 x\, dx$; б) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$.

20. а) $\int\limits_{-3}^0 (x-2)e^{-x/3} dx$; б) $\int\limits_{2/3}^{7/3} \frac{x}{\sqrt{2+3x}} dx$.

21. а) $\int\limits_0^{\pi/9} \frac{x}{\cos^2 3x} dx$; б) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

22. а) $\int\limits_{1/2}^1 \arcsin(1-x)\, dx$; б) $\int\limits_0^5 \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx$.

23. а) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} arctg\left(\frac{1}{x}\right) dx$; б) $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$.

24. а) $\int\limits_{-1}^{0} x\ln(1-x)\,dx$; б) $\int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x-1}$.

25. а) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2-x}}\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{\ln 5} \frac{e^x\cdot\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$.

26. а) $\int\limits_{1}^{2} \ln(3x+2)\,dx$; б) $\int\limits_{3}^{8} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

27. а) $\int\limits_{0}^{4} x^3\cdot\sqrt{x^2+9}\,dx$; б) $\int\limits_{3}^{8} \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$.

28. а) $\int\limits_{-1}^{0} (x+1)e^{-2x}\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{5} \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$.

29. а) $\int\limits_{0}^{\pi/4} x\,tg^2x\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{\ln 2} \frac{dx}{e^x\left(3+e^{-x}\right)}$.

30. а) $\int\limits_{0}^{1} x\,arctg\,x\,dx$; б) $\int\limits_{3}^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx$.

Задание 3. Вычислить несобственные интегралы или доказать их рассходимость.

1. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x}{16x^4+1}\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$.

2. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{16x}{16x^4-1}\,dx$; б) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$.

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^5}}\,dx$.

4. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{16x^4-1}}\,dx$; б) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}$.

5. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3+8\right)^4}}\,dx$; б) $\int\limits_{1/4}^{1} \frac{dx}{20x^2-9x+1}$.

6. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x}{\sqrt[4]{\left(16+x^2\right)^5}}\,dx$; **б)** $\int\limits_{1/2}^{1}\frac{\ln 2}{(1-x)\ln^2(1-x)}\,dx$.

7. а) $\int\limits_{4}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-4x+1}}\,dx$; **б)** $\int\limits_{0}^{2/3}\frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x}\,dx$.

8. а) $\int\limits_{-1}^{\infty}\frac{dx}{\pi\,(x^2+4x+5)}$; **б)** $\int\limits_{0}^{1}\frac{x}{1-x^4}\,dx$.

9. а) $\int\limits_{-1}^{\infty}\frac{x}{x^2+2x+3}\,dx$; **б)** $\int\limits_{0}^{\pi/6}\frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{\left(1-\sin 3x\right)^5}}\,dx$.

10. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{arctg\,2x}{\pi\left(1+4x^2\right)}\,dx$; **б)** $\int\limits_{0}^{1}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

11. а) $\int\limits_{1/2}^{\infty}\frac{16}{\pi\,(4x^2+4x+5)}\,dx$; **б)** $\int\limits_{-1/3}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$.

12. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x}{4x^2+4x+5}\,dx$; **б)** $\int\limits_{3/4}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$.

13. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x+2}{\sqrt[3]{\left(x^2+4x+1\right)^4}}\,dx$; **б)** $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{e^{-tg\,x}}{\cos^2 x}\,dx$.

14. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{3-x^2}{x^2+4}\,dx$; **б)** $\int\limits_{0}^{1}\frac{2\cdot e^{1-\frac{2}{\pi}\arcsin x}}{\pi\cdot\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

15. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{arctg\,2x}}{1+4x^2}\,dx$; **б)** $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4-4x+x^2}}$.

16. а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{4}{x\left(1+\ln^2 x\right)}\,dx$; **б)** $\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}\,dx$.

17. а) $\int\limits_{0}^{\infty}x\sin x\,dx$; **б)** $\int\limits_{-3/4}^{0}\frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$.

18. а) $\int\limits_{1/3}^{\infty} \frac{\pi}{\left(1+9x^2\right) arctg^2 3x} dx$; **б)** $\int\limits_{0}^{1/3} \frac{dx}{9x^2-9x+2}$.

19. а) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{\left(4+x^2\right)\cdot\sqrt{\pi\, arctg\frac{x}{2}}}$; **б)** $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{3\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$.

20. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x}$; **б)** $\int\limits_{0}^{3} \frac{\sqrt[3]{9}\, x}{\sqrt[3]{9-x^2}} dx$.

21. а) $\int\limits_{0}^{\infty} x e^{-3x}\, dx$; **б)** $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^4}{\sqrt[3]{1-x^5}}\, dx$.

22. а) $\int\limits_{-\infty}^{0} \left(\frac{x^2}{x^3-1} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx$; **б)** $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^2}{\sqrt{64-x^6}} dx$.

23. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1}$; **б)** $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$.

24. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$; **б)** $\int\limits_{1}^{5} \frac{x^2}{\sqrt{31(x^3-1)}} dx$.

25. а) $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x\left(\ln x-1\right)^2}$; **б)** $\int\limits_{1}^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$.

26. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{6x^2-5x+1}$; **б)** $\int\limits_{0}^{4} \frac{10x}{\sqrt[4]{\left(16-x^2\right)^3}} dx$.

27. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{9x^2-9x+2}$; **б)** $\int\limits_{0}^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$.

28. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; **б)** $\int\limits_{1}^{2} \frac{x-2}{\sqrt{x-1}} dx$.

29. а) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; **б)** $\int\limits_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

30. а) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{x^2}{x^3+x+1} dx$; **б)** $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Задание 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями:

1. **а)** $\begin{cases} x=\sqrt{e^{y}-1}; \\ x=0; \\ y=\ln 2. \end{cases}$

б) $\begin{cases} r=4\cos 3\varphi; \\ r\geq 2. \end{cases}$

2. **а)** $\begin{cases} x=4-(y-1)^2 \\ x=y^2-4y+3. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x=2(t-\sin t); \\ y=2(1-\cos t); \\ y=0; \\ 0\leq t\leq 2\pi. \end{cases}$

3. **а)** $\begin{cases} y=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}; \\ y=0; \\ x=1; \\ x=2. \end{cases}$

б) $r=3(1+\cos\varphi)$.

4. **а)** $\begin{cases} y=x^2\cdot\cos x; \\ y=0; \\ 0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

б) $r=4\sin 2\varphi$.

5. **а)** $\begin{cases} x=\sqrt{4-y^2}; \\ x=0; \\ y=0; \\ y=1. \end{cases}$

б) $r=4\cdot\cos 3\varphi$.

6. **а)** $\begin{cases} x=4-y^2; \\ x=y^2-2y. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x=6\cos^3 t; \\ y=6\sin^3 t. \end{cases}$

7. **а)** $\begin{cases} y=\arccos x; \\ y=0; \\ x=0. \end{cases}$

б) $r=7\left|\sin 2\varphi\right|$

8. **а)** $\begin{cases} y=(x-2)^3; \\ y=4x-8. \end{cases}$

б) $\begin{cases} r=2\sin\varphi; \\ r=4\sin\varphi. \end{cases}$

9. **а)** $\begin{cases} y=\ln x; \\ y=\ln^2 x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} r=2\cos\varphi; \\ r=3\cos\varphi. \end{cases}$

10. **а)** $\begin{cases} x^2+y^2=16; \\ x^2=12(y-1). \end{cases}$

б) $r=\dfrac{1}{2}+\cos\varphi$.

11. **а)** $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x^2}; \\ y = 0; \\ x \ge 1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = 2\cos t; \\ y = 6\sin t; \\ y \ge 3. \end{cases}$

12. **а)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8; \\ 2x \ge y^2. \end{cases}$

б) $r = 3\sqrt{\cos 2\varphi}.$

13. **а)** $\begin{cases} y = x(x-1)(x-2); \\ y = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = 13\cos^3 t; \\ y = 13\sin^3 t. \end{cases}$

14. **а)** $\begin{cases} y = \ln x; \\ y = 0; \\ x = e. \end{cases}$

б) $r = 4\sin^2 \varphi$.

15. **а)** $\begin{cases} y = x + 1; \\ y = \cos x; \\ y = 0. \end{cases}$

б) $r^2 = 2\sin 2\varphi$

16. **а)** $\begin{cases} x^2 = 4y; \\ y = \dfrac{8}{x^2 + 4}. \end{cases}$

б) $\begin{cases} r = \sqrt{2}\cos\varphi; \\ r = \sqrt{2}\sin\varphi. \end{cases}$

17. **а)** $\begin{cases} y = 2^x; \\ y = 2x - x^2; \\ x = 0; \\ x = 2. \end{cases}$

б) $\begin{cases} r = 2\cos\varphi; \\ r = 4\cos\varphi. \end{cases}$

18. **а)** $\begin{cases} y = x^3; \\ y = 1; \\ x = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} r = 3(1 + \sin\varphi); \\ r = 3. \end{cases}$

19. **а)** $\begin{cases} y^2 = 4 - x; \\ x = 0. \end{cases}$

б) $r = 5(\cos\varphi + \sin\varphi).$

20. **а)** $\begin{cases} y^2 = x^3; \\ y = 4; \\ x = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} r = \sqrt{3}\sin\varphi; \\ r \ge 1 - \cos\varphi. \end{cases}$

21. **а)** $\begin{cases} y^2 = x+1; \\ y^2 = 9-x. \end{cases}$

б) $\begin{cases} r = \dfrac{4}{\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{6}\right)}; \\ \dfrac{\pi}{6} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

22. **а)** $\begin{cases} y = \dfrac{1}{1+x^2}; \\ y = \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$

б) $\begin{cases} r = 2(1-\cos\varphi); \\ r \ge 2. \end{cases}$

23. **а)** $\begin{cases} y = \sqrt{x}; \\ y = x^3. \end{cases}$

б) $\begin{cases} r = 2\cos\varphi; \\ r \ge 1. \end{cases}$

24. **а)** $\begin{cases} y = 3x^2 + 1; \\ y = 3x + 7. \end{cases}$

б) $\begin{cases} r = 24 \cdot e^{\varphi}; \\ -\pi \le \varphi \le \pi. \end{cases}$

25. **а)** $\begin{cases} x^2 = 4y; \\ y = \dfrac{8}{x^2+4}. \end{cases}$

б) $\begin{cases} r = 25 \cdot \varphi; \\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$

26. **а)** $\begin{cases} y = e^x; \\ y = e^{-x}; \\ x = 1. \end{cases}$

б) $r = 26(1+\sin\varphi).$

27. **а)** $\begin{cases} x\,y = 2; \\ x + 2y - 5 = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} r = \cos\varphi; \\ r = \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right); \\ -\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

28. **а)** $\begin{cases} y = x^2 - 4; \\ x - y + 8 = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = 3\cos t; \\ y = 8\sin t; \\ y \ge 4. \end{cases}$

29. **а)** $\begin{cases} x\,y = 1; \\ y = x^2; \\ y = 4. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = t - \sin t; \\ y = 1 - \cos t; \\ y \ge 1; \\ 0 \le x \le 2\pi \end{cases}$

30. **а)** $\begin{cases} y = -x^2 + 4; \\ 2x - y + 1 = 0. \end{cases}$

б) $r = \cos\varphi - \sin\varphi.$

Задание 5. Вычислить длину дуги заданной линии

1. $x=\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{\ln y}{2}$, где $(1\le y\le e)$.

2. $r=2\varphi$, где $\left(0\le\varphi\le\dfrac{3}{4}\right)$.

3. $y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\ln x}{2}$, где $(1\le x\le 2)$.

4. $r=3(1+\sin\varphi)$, где $\left(-\dfrac{\pi}{6}\le\varphi\le 0\right)$.

5. $y=\ln\cos x+2$, где $\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{6}\right)$.

6. $r=\sqrt{2}\,e^{\varphi}$, где $|\varphi|\le\dfrac{\pi}{2}$.

7. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$, где $\left(0\le x\le\dfrac{7}{9}\right)$.

8. $y=\varphi^2$, где $(0\le\varphi\le\pi)$.

9. $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t, \end{cases}$ где $(0\le e\le\ln\pi)$.

10. $2y=e^x+e^{-x}$, где $(0\le x\le\ln 3)$.

11. $y=\dfrac{1}{3}x\sqrt{x}$, где $(0\le x\le 12)$.

12. $y=\ln x$, где $\left(\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}\right)$.

13. $y=\arcsin\left(e^{-x}\right)$, где $(0\le x\le 1)$.

14. $x^2+y^2=9$.

15. $y=\dfrac{x^2}{2}-1$, отсеченной осью Ox.

16. $y=\ln(2\cos x)$, где $\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{3}\right)$.

17. $\begin{cases} x=\sqrt{3}\,t^2, \\ y=t-t^3, \end{cases}$ (петля).

18. $\rho=2(1-\cos\varphi)$.

19. $\begin{cases} x=9(t-\sin t), \\ y=9(1-\cos t), \end{cases}$ где $(0\le t\le 2\pi)$.

20. $y=\ln\sin x$, где $\left(\dfrac{\pi}{3}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$.

21. $r=3\sin\varphi$.

22. $9y^2=4(3-x)^3$, между точками пересечения с осью Oy.

23. $y^2=(x-1)^3$, от точки $A(1,0)$ до точки $B\left(6;\ 5\sqrt{5}\right)$.

24. $y=1-\ln\cos x$, где $\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{6}\right)$.

25. $\begin{cases} x=2(\cos t+t\sin t), \\ y=2(\sin t-t\cos t), \end{cases}$ где $(0\le t\le\pi)$.

26. $r=\sin^3\left(\dfrac{\varphi}{3}\right)$, где $\left(0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\right)$.

27. $2y=e^x+e^{-x}$, где $(0\le x\le\ln 27)$.

28. $r=3(1-\cos\varphi)$.

29. $\begin{cases} x=2\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t. \end{cases}$

30. $y^2=(x+1)^3$, где $(0\le x\le 3)$.

Задание 6. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры Ф вокруг соответствующей оси.

1. $\begin{cases} y^2 = 4 - x; \\ x = 0. \end{cases}$ Ось Oy.

2. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}; \\ x = 0; \\ y = 0. \end{cases}$ Ось Ox.

3. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1.$ Ось Oy.

4. $\begin{cases} y^3 = x^2; \\ y = 1. \end{cases}$ Ось Ox.

5. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t); \\ y = 6(1 - \cos t). \end{cases}$ Ось Ox.

6. $\begin{cases} x = 3\cos^2 t; \\ y = 4\sin^2 t; \\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ Ось Oy.

7. $\begin{cases} y^2 = x; \\ x^2 = y. \end{cases}$ Ось Ox.

8. $\begin{cases} y^2 = (x-1)^3; \\ x = 2. \end{cases}$ Ось Ox.

9. $\begin{cases} x = \sqrt{1 - y^2}; \\ y = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,x; \\ y = 0. \end{cases}$ Ось Ox.

10. $\begin{cases} y = \sin x; \\ y = 0; \\ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$ Ось Ox.

11. $\begin{cases} y^2 = 4x; \\ x^2 = 4y. \end{cases}$ Ось Ox.

12. $\begin{cases} x = 2\cos t; \\ y = 5\sin t. \end{cases}$ Ось Ox.

13. $\begin{cases} y = x^2; \\ 8x = y^2. \end{cases}$ Ось Oy.

14. $\begin{cases} y = e^x; \\ x = 0; \\ y = 0; \\ x = 1. \end{cases}$ Ось Ox.

15. $\begin{cases} y^2 = \dfrac{4}{3}x; \\ x = 3. \end{cases}$ Ось Ox.

16. $\begin{cases} y = 2x - x^2; \\ y = 0. \end{cases}$ Ось Ox.

17. $\begin{cases} y = 1 + 2x - x^2; \\ y = x. \end{cases}$ Ось Oy.

18. $\begin{cases} x = 18\cos^3 t; \\ y = 18\sin^3 t. \end{cases}$ Ось Oy.

19. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{1} = 1.$ Ось Ox.

20. $\begin{cases} x^3 = (y-1)^2; \\ x = 0; \\ y = 0. \end{cases}$ Ось Ox.

21. $\begin{cases} xy = 4; \\ 2x + y - 6 = 0. \end{cases}$ Ось Ox.

22. $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t; \\ y = 2\sin t. \end{cases}$

Ось Oy.

23. $\begin{cases} y = 2 - x^2; \\ y = x^2. \end{cases}$

Ось Ox.

24. $\begin{cases} y = -x^2 + 8; \\ y = x^2. \end{cases}$

Ось Ox.

25. $\begin{cases} y^2 = (x+4)^3; \\ x = 0. \end{cases}$

Ось Ox.

26. $\begin{cases} y = x^3; \\ x = 0; \\ y = 8. \end{cases}$

Ось Oy.

27. $\begin{cases} x = 27\cos^3 t; \\ y = 27\sin^3 t. \end{cases}$

Ось Ox.

28. $\begin{cases} 2y = x^2; \\ 2x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$

Ось Ox.

29. $\begin{cases} y = x - x^2; \\ y = 0. \end{cases}$

Ось Ox.

30. $\begin{cases} y = 2 - \dfrac{x^2}{2}; \\ x + y = 2. \end{cases}$

Ось Ox.

Задание 7. Найти координаты центра масс плоской однородной фигуры (Φ) или однородной кривой (L).

1. (Φ): $\begin{cases} y = x^2; \\ y = 3 - x. \end{cases}$	**2.** (Φ): $\begin{cases} y^2 = 2x - 2; \\ y = x - 1. \end{cases}$	**3.** (Φ): $\begin{cases} x^2 + 4y - 16 = 0; \\ y = 0. \end{cases}$
4. (Φ): $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ y = 2; \\ x = 0; \\ x = 1. \end{cases}$	**5.** (Φ): $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1; \\ x \geq 0; \\ y \geq 0. \end{cases}$	**6.** (Φ): $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16; \\ \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1; \\ x = 0. \end{cases}$ В 1-ом квадранте.
7. (Φ): $\begin{cases} y^2 = 4 - x; \\ y = 0. \end{cases}$	**8.** (Φ): $\begin{cases} 8y^2 = x^3; \\ x = 8. \end{cases}$	**9.** (Φ): $\rho = 1 + \cos\varphi.$
10. (Φ): $\begin{cases} y = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}; \\ y = 0; \\ x = 12. \end{cases}$	**11.** (Φ): $\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x}. \end{cases}$	**12.** (Φ): $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{3}; \\ x \geq 0; \\ y \geq 0. \end{cases}$
13. (Φ): $\begin{cases} y = \sqrt{13^2 - x^2}; \\ y = 0. \end{cases}$	**14.** (Φ): $\begin{cases} y = 1 + 2x - x^2; \\ y = 0. \end{cases}$	**15.** (Φ): $\begin{cases} x = 15(t - \sin t); \\ y = 15(1 - \cos t); \\ y = 0. \end{cases}$

16. (Φ): $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1; \\ x \ge 0; \\ y \ge 0. \end{cases}$	**17.** (Φ): треугольник, стороны которого лежат на прямых: $x+y=17$, $x=0$, $y=0$.	**18.** (L): $\begin{cases} y=\dfrac{3}{2}\left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}\right); \\ -3 \le x \le 3. \end{cases}$
19. (L): $\begin{cases} x=\sqrt{3}\,t^2; \\ y=t-t^3; \\ 0 \le t \le 1. \end{cases}$	**20.** (L): кривая $\rho=2\sqrt{3}\cos\varphi,$ заключенная между лучами $\varphi=0$ и $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.	**21.** (L): кривая $\rho=2\sin\varphi$, от точки $(0;\ 0)$ до точки $\left(\sqrt{2};\ \dfrac{\pi}{4}\right)$
22. (L): $\rho=2(1+\cos\varphi)$.	**23.** (L): $\begin{cases} x=e^t\sin t; \\ y=e^t\cos t; \\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$	**24.** (L): $\begin{cases} x=2\cos^3\left(\dfrac{t}{4}\right); \\ y=2\sin^3\left(\dfrac{t}{4}\right). \end{cases}$ В 1-ом квадранте.
25. (L): $\begin{cases} x=3(t-\sin t); \\ y=3(1-\cos t). \end{cases}$ Первая арка.	**26.** (L): $\begin{cases} \rho=7\cdot e^{\varphi}; \\ \dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi. \end{cases}$	**27.** (L): $\begin{cases} \rho=a(1+\cos\varphi); \\ 0 \le \varphi \le \pi. \end{cases}$
28. (L): Дуга окружности радиусом 25, стягивающая центральный угол α в первом квадранте.	**29.** (L): $x^{2/3}+y^{2/3}=2^{2/3}$ В первом квадранте.	**30.** (L): $\begin{cases} x=2(t-\sin t); \\ y=2(1-\cos t); \\ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

Задание 8.

8.1–8.15. Вычислить работу, которую необходимо затратить на выкачивание воды из резервуара Р. Удельный вес воды принять равным $\gamma=9{,}81\text{кН}/\text{м}^3$:

1. Р – котел, имеющий форму сферического сегмента с высотой 1,5м и радиусом 1 м.

2. Р – полуцилиндр, радиус основания которого 1м и длина 5м.

3. Р – усеченный конус с радиусом верхнего основания равным 1м, нижнего 2м и высотой 3м.

4. P – желоб, перпендикулярное сечение которого является параболой. Длина желоба 5м, ширина 4м, глубина 4м.

5. P – цилиндрическая цистерна, радиус основания которой 1м, длина 5м.

6. P – правильная треугольная пирамида с основанием 2м и высотой 5м.

7. P – правильная треугольная пирамида, обращенная вершиной вниз, сторона основания которой 4м, высота 6м.

8. P – конус, обращенный вершиной вниз, радиус основания которого 3м, высота 5м.

9. P – усеченный конус, радиус верхнего основания которого 3м, нижнего 1м, высота 5м.

10. P – конус, обращенный вершиной вниз, радиус основания которого 3м, высота 5м.

11. P – цилиндр с радиусом основания 1м и высотой 3м.

12. P – желоб, в перпендикулярном сечении которого лежит полуокружность радиусом 1м, длина желоба 10м.

13. P – полусфера радиусом 2м.

14. P – цилиндрическая цистерна, радиус основания которой 2м, длина 4м.

15. P – полуцилиндр, радиус основания которого 3м и длина 10м.

8.16 – 8.30. Вычислить работу, затрачиваемую на преодоление силы тяжести при построении сооружения Q из некоторого материала.

16. Q – правильная треугольная пирамида, со стороной основания 3м и высотой 6м. Удельный вес материала $\gamma = 20\,\text{kH}/\text{м}^3$.

17. Q – правильная треугольная пирамида, со стороной основания 4м и высотой 8м. Удельный вес материала $\gamma = 10\,\text{kH}/\text{м}^3$.

18. Q – правильная треугольная пирамида, со стороной основания 2м и высотой 3м. Удельный вес материала $\gamma = 25\,\text{kH}/\text{м}^3$.

19. Q – правильная треугольная пирамида, со стороной основания 5м и высотой 4м. Удельный вес материала $\gamma = 15\,\text{kH}/\text{м}^3$.

20. Q – правильная треугольная пирамида, со стороной основания 6м и высотой 5м. Удельный вес материала $\gamma = 22\,\text{kH}/\text{м}^3$.

21. Q – правильная треугольная пирамида, со стороной основания 2м и высотой 1м. Удельный вес материала $\gamma = 24\,\text{kH}/\text{м}^3$.

22. Q – правильная треугольная пирамида, со стороной основания 4м и высотой 3м. Удельный вес материала $\gamma = 18\,\text{kH}/\text{м}^3$.

23. Q – конус, радиус основания которого 2м, высота 3м. Удельный вес материала $\gamma = 20\,\text{kH}/\text{м}^3$.

24. Q – конус, радиус основания которого 3м, высота 4м. Удельный вес материала $\gamma = 22\,\text{kH}/\text{м}^3$.

25. Q – конус, радиус основания которого 4м, высота 5м. Удельный вес материала $\gamma = 18\,\text{kH}/\text{м}^3$.

26. Q – конус, радиус основания которого 5м, высота 3м. Удельный вес материала $\gamma = 16\,\text{kH}/\text{м}^3$.

27. Q – конус, радиус основания которого 6м, высота 4м. Удельный вес материала $\gamma = 20\,\text{kH}/\text{м}^3$.

28. Q – конус, радиус основания которого 5м, высота 6м. Удельный вес материала $\gamma = 25\,\text{kH}/\text{м}^3$.

29. Q – конус, радиус основания которого 4м, высота 5м. Удельный вес материала $\gamma = 30\,\text{kH}/\text{м}^3$.

30. Q – конус, радиус основания которого 1м, высота 1м. Удельный вес материала $\gamma = 20\,\text{kH}/\text{м}^3$.

Решение типового варианта аттестационной работы по теме «*Интегралы*»

Задание 1. Найти неопределенные интегралы (результаты в случаях а), б) проверить дифференцированием):

а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3tg\,x+2)}$; **б)** $\int arctg\sqrt{x}\,dx$; **в)** $\int \frac{x^3+6x}{(x-2)^2(x^2+1)}dx$; **г)** $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{2-x^2}}$;

д) $\int \frac{dx}{4\sin x+5\cos x-2}$; **е)** $\int \frac{2x+3}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx$; **ж)** $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$.

Решение

а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3tg\,x+2)}$.

Так как

$$\frac{3\,dx}{\cos^2 x} = d(3tg\,x+2),$$

то

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x(3tg\,x+2)} = \frac{1}{3}\int \frac{3\,dx}{\cos^2 x(3tg\,x+2)} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3tg\,x+2)}{3tg\,x+2} = \frac{1}{3}\ln|3tg\,x+2| + C.$$

Результат проверим дифференцированием:

$$\left(\frac{1}{3}\ln|3tg\,x+2|+C\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3tg\,x+2}\cdot\frac{3}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x(3tg\,x+2)}.$$

б) $\int arctg\sqrt{x}\,dx$.

Сделав замену переменной $x=t^2$ и применив метод интегрированием по частям, получим:

$$\int arctg\sqrt{x}\,dx = \left|\begin{matrix} x=t^2 \\ dx=2t\,dt \end{matrix}\right| = \int arctg\,t\cdot 2t\,dt = 2\int t\cdot arctgt\,dt =$$

$$= \left|\begin{matrix} u=arctg\,t, & du=\frac{1}{1+t^2}dt \\ dv=t\cdot dt, & v=\frac{t^2}{2} \end{matrix}\right| = 2\left(\frac{t^2}{2}\cdot arctg\,t - \int\frac{t^2\,dt}{2(1+t^2)}\right) = t^2\cdot arctg\,t - \int\frac{t^2\,dt}{t^2+1} =$$

$$= t^2\cdot arctg\,t - \int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = t^2\cdot arctg\,t - \int dt + \int\frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= t^2\cdot arctg\,t - t + arctg\,t + C = x\,arctg\sqrt{x} - \sqrt{x} + arctg\sqrt{x} + C.$$

Результат проверим дифференцированием:

$$\left(x\,arctg\sqrt{x}-\sqrt{x}+arctg\sqrt{x}+C\right)'=arctg\sqrt{x}+x\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+$$

$$+\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=arctg\sqrt{x}+\frac{x-1-x+1}{2\sqrt{x}(1+x)}=arctg\sqrt{x}\,.$$

в) $\int\frac{x^3+6x}{(x-2)^2(x^2+1)}dx$.

Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью и может быть представлена в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x^3+6x}{(x-2)^2(x^2+1)}=\frac{A}{(x-2)^2}+\frac{B}{x-2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Приводя, правую часть к общему знаменателю и приравнивая числители, получим:

$$x^3+6x=A(x^2+1)+B(x-2)(x^2+1)+(Cx+D)(x-2)^2.$$

Приравнивая, коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа от равенства, получаем систему линейных алгебраических уравнений, относительно неизвестных A, B, C, D:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & B+C=1 \\ x^2 & A-2B+D-4C=0 \\ x^1 & B+4C-4D=6 \\ x^0 & A-2B+4D=0 \end{array}\Bigg\}$$

Решение системы:

$$A=4\,,\ B=\frac{2}{5}\,,\ C=\frac{3}{5}\,,\ D=-\frac{4}{5}\,.$$

И так, разложение рациональной дроби на простейшие имеет вид:

$$\frac{x^3+6x}{(x-2)^2(x^2+1)}=\frac{4}{(x-2)^2}+\frac{\frac{2}{5}}{x-2}+\frac{\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}}{x^2+1}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{x^3+6x}{(x-2)^2(x^2+1)}dx=4\int\frac{dx}{(x-2)^2}+\frac{2}{5}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{5}\int\frac{3x-4}{x^2+1}dx=-\frac{4}{x-2}+\frac{2}{5}\ln|x-2|+$$

$$+\frac{3}{10}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}-\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{4}{x-2}+\frac{2}{5}\ln|\,x-2\,|+\frac{3}{10}\ln\left|\,x^2+1\right|-\frac{4}{5}arctg\,x+C\,.$$

г) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{2-x^2}}$.

Воспользуемся тригонометрической подстановкой $x=\sqrt{2}\sin t$.

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{2-x^2}} = \left| \begin{array}{l} x=\sqrt{2}\sin t, \\ dx=\sqrt{2}\cos t\,dt, \\ \sqrt{2-x^2}=\sqrt{2}\cos t \end{array} \right| = \int \frac{\left(\sqrt{2}\right)^3 \sin^3 t\cdot\sqrt{2}\cos t}{\sqrt{2}\cos t}dt = 2\sqrt{2}\int \sin^3 t\,dt =$$

$$=-2\sqrt{2}\int (1-\cos^2 t)\,d(\cos t) = -2\sqrt{2}\left(\cos t+\frac{\cos^3 t}{3}\right)+C=-2\sqrt{2-x^2}+\frac{\sqrt{(2-x^2)^3}}{3}+C.$$

Второй способ решения.

Подынтегральная функция представляет собой дифференциальный бином

$$x^m\left(a+bx^n\right)^p, \text{ где } m=3,\ n=2,\ p=-\frac{1}{2}.$$

Так как $\frac{m+1}{n}=\frac{3+1}{n}=2\in Z$, то для нахождения интеграла применим подстановку $2-x^2=t^2$.

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{2-x^2}} = \left| \begin{array}{l} 2-x^2=t^2 \\ x^2=2-t^2 \\ x\,dx=-t\,dt \end{array} \right| = \int \frac{(2-t^2)\cdot(-t\,dt)}{t} = \int (t^2-2)\,dt = \frac{t^3}{3}-2t+C=$$

$$=\frac{\left(2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}-2\sqrt{2-x^3}+C=\frac{\sqrt{\left(2-x^2\right)^3}}{3}-2\sqrt{2-x^2}+C.$$

д) $\int \frac{dx}{4\sin x+5\cos x-2}$.

Так как подынтегральная функция является рациональной функцией от $\sin x$ и $\cos x$, то применим универсальную тригонометрическую подстановку $tg\frac{x}{2}=t$, тогда $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}$:

$$\int \frac{dx}{4\sin x+5\cos x-2} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2}+5\frac{1-t^2}{1+t^2}-2} = \int \frac{2\,dt}{8t+5-5t^2-2-2t^2} =$$

$$=2\int\frac{dt}{-7t^2+8t+3}=-\frac{2}{7}\int\frac{dt}{t^2-\frac{8}{7}t-\frac{3}{7}}=-\frac{2}{7}\int\frac{d\left(t-\frac{4}{7}\right)}{\left(t-\frac{4}{7}\right)^2-\frac{37}{49}}=-\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{37}{49}}}\ln\left|\frac{t-\frac{4}{7}-\frac{\sqrt{37}}{7}}{t-\frac{4}{7}+\frac{\sqrt{37}}{7}}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{37}}\ln\left|\frac{7tg\frac{x}{2}-4-\sqrt{37}}{7tg\frac{x}{2}-4+\sqrt{37}}\right|+C.$$

е) $\int\frac{2x+3}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx.$

Для нахождения этого интеграла выделим в числителе производную квадратного трехчлена, стоящего под знаком корня, и разложим интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int\frac{2x+3}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx=\frac{1}{4}\int\frac{8x+4+8}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx=\frac{1}{4}\int\frac{8x+4}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx+$$

$$+2\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}=\frac{1}{4}\int\frac{d\left(4x^2+4x+5\right)}{\sqrt{4x^2+4x+5}}+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+\frac{5}{4}}}=\frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{4x^2+4x+5}+$$

$$+\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}}=\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+5}+\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+5}+\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+\frac{5}{4}}\right|+C.$$

ж) $\int\frac{\sqrt[3]{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx.$

Данный интеграл от иррациональной функции приводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $x+1=t^6$.

$$\int\frac{\sqrt[3]{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx=\left|\begin{array}{l}x+1=t^6\\ x=t^6-1\\ dx=6t^5dt\end{array}\right|=\int\frac{\left(t^2+1\right)\cdot 6t^5dt}{t^3-1}=6\int\frac{t^7+t^5}{t^3-1}dt=I.$$

Так как в полученном интеграле подынтегральная функция является неправильной рациональной дробью, то выделим из нее целую частью.

$$\frac{t^7+t^5}{t^3-1}=t^4+t^2+t+\frac{t^2+t}{t^3-1}.$$

Представим полученную правильную рациональную дробь в виде суммы простейших дробей

$$\frac{t^2+t}{t^3-1}=\frac{t^2+t}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}=\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+1}.$$

$$At^2+At+A+Bt^2+Ct-Bt-C=t^2+t.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, имеем

$$\begin{cases} A+B=1; \\ A+C-B=1; \\ A-C=0. \end{cases}$$

и далее находим: $A=\frac{2}{3}$, $B=\frac{1}{3}$, $C=\frac{2}{3}$.

Тогда,

$$\frac{t^7+t^5}{t^3-1}=t^4+t^2+t+\frac{2}{3(t-1)}+\frac{1}{3}\cdot\frac{t+2}{t^2+t+1}.$$

Следовательно,

$$I=6\int\frac{t^7+t^5}{t^3-1}\,dt=6\int\left(t^4+t^2+t+\frac{2}{3(t-1)}+\frac{1}{3}\cdot\frac{t+2}{t^2+t+1}\right)dt=6\int t^4dt+6\int t^2dt+$$

$$+\int t\,dt+4\int\frac{dt}{t-1}+\int\frac{2t+1+3}{t^2+t+1}dt=6\frac{t^5}{5}+2t^3+3t^2+4\ln\left|t-1\right|+\int\frac{2t+1}{t^2+t+1}dt+$$

$$+3\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{6t^5}{5}+2t^3+3t^2+4\ln\left|t-1\right|+\ln\left|t^2+t+1\right|+2\sqrt{3}\,arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{6}{5}\cdot\sqrt[6]{(x+1)^5}+2\sqrt{x+1}+3\cdot\sqrt[3]{x+1}+4\ln\left|\sqrt[6]{x+1}-1\right|+\ln\left|\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[6]{x+1}+1\right|+$$

$$+2\sqrt{3}\,arctg\frac{2\cdot\sqrt[6]{x+1}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Задание №2. Вычислить определенные интегралы.

а) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{\ln(1-x)}{(1-x)^2}dx$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{8}}x^2\cos 4x\,dx$; в) $\int\limits_{0}^{5}\frac{dx}{2+\sqrt{3x+1}}$; г) $\int\limits_{0}^{\ln 5}\frac{e^x\cdot\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$.

Решение

а) Применив метод интегрирования по частям, получим:

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{\ln(1-x)}{(1-x)^2}dx=\left|\begin{matrix}u=\ln(1-x), & du=\frac{-dx}{1-x}\\ dv=\frac{dx}{(1-x)^2}, & v=\frac{1}{1-x}\end{matrix}\right|=\frac{\ln(1-x)}{1-x}\Bigg|_{-1}^{0}+\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{(1-x)^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{1-x}\Bigg|_{-1}^{0}=-\frac{1}{2}\ln 2+1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(1-\ln 2)\approx 0{,}153.$$

б) Дважды применив метод интегрирования по частям, получим:

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{8}}x^2\cos 4x\,dx=\left|\begin{matrix}u=x^2, & du=2xdx\\ dv=\cos 4xdx, & v=\frac{1}{4}\sin 4x\end{matrix}\right|=\frac{1}{4}x^2\sin 4x\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{8}}-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{8}}x\sin 4x\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=x, & du=dx\\ dv=\sin 4x\,dx, & v=-\frac{1}{4}\cos 4x\end{matrix}\right|=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{64}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}x\cos 4x\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{8}}+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{8}}\frac{1}{4}\cos 4x\,dx\right)=$$

$$=\frac{\pi^2}{256}+\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{2}-\frac{1}{32}\sin 4x\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{8}}=\frac{\pi^2}{256}-\frac{1}{32}=\frac{\pi^2-8}{256}\approx 0{,}0073.$$

в) Данный интеграл от иррациональной функции приводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $\sqrt{3x+1}=t.$ Имеем:

$$\int\limits_{0}^{5}\frac{dx}{2+\sqrt{3x+1}}=\left|\begin{matrix}\sqrt{3x+1}=t, & x=0\Rightarrow t=1\\ x=\frac{1}{3}(t^2-1), & x=5\Rightarrow t=4\\ dx=\frac{2}{3}t\,dt & \end{matrix}\right|=\int\limits_{1}^{4}\frac{\frac{2}{3}t}{2+t}\,dt=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\int\limits_{1}^{4}\frac{t\,dt}{t+2}=\frac{2}{3}\cdot\int\limits_{1}^{4}\frac{t+2-2}{t+2}dt=\frac{2}{3}\cdot\int\limits_{1}^{4}\left(1-\frac{2}{t+2}\right)dt=\frac{2}{3}t\Bigg|_{1}^{4}+\frac{4}{3}\ln|t+2|\Bigg|_{1}^{4}=$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\ln 6-\frac{4}{3}\ln 3=2+\frac{4}{3}\ln 2\approx 2{,}924$$

г) $$\int\limits_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx=\left|\begin{array}{ll}\sqrt{e^x-1}=t, & dx=\dfrac{2tdt}{t^2+1}\\ e^x=t^2+1, & x=0\ \Rightarrow t=0\\ x=\ln\left(t^2+1\right), & x=\ln 5\Rightarrow t=2\end{array}\right|=\int\limits_0^2\frac{\left(t^2+1\right)\cdot t\cdot\dfrac{2t}{t^2+4}}{t^2+4}dt=$$

$$=2\int\limits_0^2\frac{t^2}{t^2+4}dt=2\int\limits_0^2\frac{t^2+4-4}{t^2+4}dt=2\int\limits_0^2\left(1-\frac{4}{t^2+4}\right)dt=2t\Big|_0^2-4arctg\frac{t}{2}\Big|_0^2=$$

$$=4-4arctg1+4arctg\,0=4-\pi\approx 0{,}858\,.$$

Ответ. а) 0,153; **б)** 0,0073; **в)** 2,924; **г)** 0,858.

Задание 3. Вычислить несобственные интегралы или доказать их рассходимость.

а) $\displaystyle\int\limits_1^{\infty}\frac{2}{x\cdot\left(9+\ln^2 x\right)}dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$; в) $\displaystyle\int\limits_1^4\frac{dx}{x^2-6x+9}$.

Решение

а) $$\int\limits_1^{\infty}\frac{2}{x\cdot\left(9+\ln^2 x\right)}dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{2}{x\cdot\left(9+\ln^2 x\right)}dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{2\,d(\ln x)}{9+\ln^2 x}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}2\cdot\frac{1}{3}arctg\left(\ln|x|\right)\Big|_1^b=\frac{2}{3}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(arctg(\ln b)-arctg(\ln 1)\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

Следовательно, данный интеграл сходящийся.

б) Поскольку подынтегральная функция терпит разрыв в точке $x=\dfrac{\pi}{2}$, то

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx=\lim_{\alpha\to+0}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha}\frac{3\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx=-3\lim_{\alpha\to+0}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha}\frac{1-\cos^2 x}{\sqrt{\cos x}}d(\cos x)=$$

$$=-3\lim_{\alpha\to+0}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{\cos x}}-\cos^{\frac{3}{2}}x\right)d(\cos x)=-3\lim_{\alpha\to+0}\left(2\sqrt{\cos x}-\frac{2\cos^{\frac{5}{2}}x}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha}=$$

$$=-3\lim_{\alpha\to+0}\left(2\cdot\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}-\frac{2}{5}\cos^{\frac{5}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-2\sqrt{\cos 0}+\frac{2}{5}\cos^{\frac{5}{2}}0\right)=$$

$$=-3\left(-2+\frac{2}{5}\right)=\frac{24}{5}=4{,}8\,.$$

Интеграл сходящийся.

в) $\int\limits_1^4 \frac{dx}{x^2-6x+9} = \int\limits_1^4 \frac{dx}{(x-3)^2} = \int\limits_1^3 \frac{dx}{(x-3)^2} + \int\limits_3^4 \frac{dx}{(x-3)^2}$;

$$\lim_{\alpha\to+0} \int\limits_1^{3-\alpha} \frac{dx}{(x-3)^2} = -\lim_{\alpha\to+0} \left.\frac{1}{x-3}\right|_1^{3-\alpha} = -\lim_{\alpha\to+0}\left(\frac{1}{3-\alpha-3} - \frac{1}{1-3}\right) =$$

$$= -\lim_{\alpha\to+0}\left(\frac{1}{-\alpha} - \frac{1}{-2}\right) = \lim_{\alpha\to+0}\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{2} = +\infty - \frac{1}{2} = +\infty;$$

$$\lim_{\beta\to+0} \int\limits_{3+\beta}^{4} \frac{dx}{(x-3)^2} = -\lim_{\beta\to+0} \left.\frac{1}{x-3}\right|_{3+\beta}^{4} = -\lim_{\beta\to+0}\left(\frac{1}{4-3} - \frac{1}{3+\beta-3}\right) =$$

$$= -\lim_{\beta\to+0}\left(1 - \frac{1}{+\beta}\right) = -1 + \lim_{\beta\to+0}\left(\frac{1}{\beta}\right) = -1 + \infty = +\infty.$$

Несобственный интеграл расходится, так как пределы равны бесконечности.

Ответ. а) сходится; **б)** сходится; **в)** рассходится.

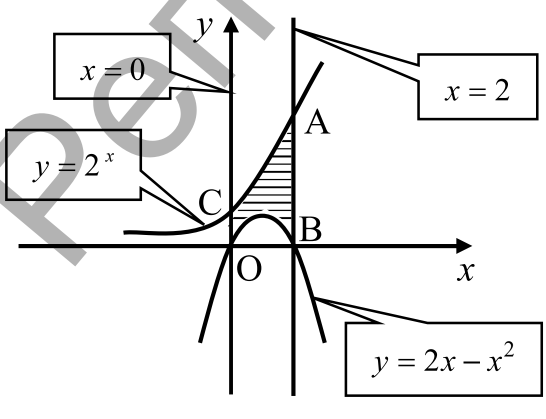
Задание 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями:

а) $\begin{cases} y = 2^x, \\ y = 2x - x^2, \\ x = 0, \\ x = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t; \end{cases}$ в) $\begin{cases} r = 2\cos 3\varphi, \\ r \geq 1. \end{cases}$

Решение

а) Фигура ограниченна графиками непрерывных функций $y = 2^x$ и $y = 2x - x^2$, и двумя прямыми $x = 0$ и $x = 2$.

Найдем координаты точек пересечения кривых A, B, C и O.



$\begin{cases} x = 0; \\ y = 2x - x^2; \end{cases}$ – $O(0; 0)$,

$\begin{cases} y = 2^x; \\ x = 2; \end{cases}$ – $A(2; 4)$,

$\begin{cases} y = 2x - x^2; \\ x = 2; \end{cases}$ – $B(2; 0)$,

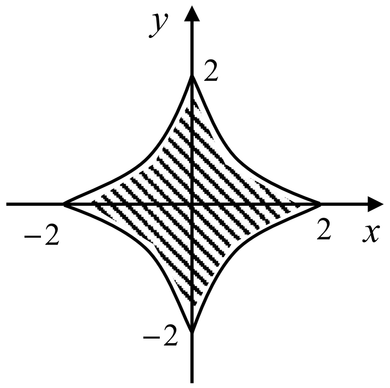
$\begin{cases} y = 2^x; \\ x = 0; \end{cases}$ – $C(0; 1)$.

Площадь определяем по формуле:

$$S=\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx=\int_0^2\left(2^x-\left(2x-x^2\right)\right)dx=\int_0^2\left(2^x-2x+x^2\right)dx=$$

$$=\frac{2^x}{\ln 2}\Bigg|_0^2-x^2\Big|_0^2+\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2=\frac{4}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}-4+\frac{8}{3}=\frac{3}{\ln 2}-\frac{4}{3}=\frac{9-4\ln 2}{3\ln 2}\approx 2{,}995\,(ед.^2)$$

б) $\begin{cases}x=2\cos^3 t,\\ y=2\sin^3 t,\end{cases}$ – кривая задана параметрически. Эти уравнения определяют астроиду. Так как фигура симметрична относительно координатных осей, то найдем площадь её четверти, лежащей в первом квадранте.



Применим формулу:

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)\,dt.$$

Вычислим $x'(t)$ и определим границы параметра t.

$x'(t)=2\cdot 3\cdot\cos^2 t\cdot\left(-\sin t\right)=-6\cdot\cos^2 t\cdot\sin t$.

При $x\left(t_1\right)=0\Rightarrow t_1=\dfrac{\pi}{2}$, а при $x\left(t_2\right)=2\Rightarrow t_2=0$.

Подставим полученные значения в формулу:

$$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}2\sin^3 t\cdot\left(-6\cos^2 t\cdot\sin t\right)dt=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cdot\cos^2 t\,dt=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\cdot\sin^2 t\,dt=$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt-\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\cdot\cos 2t\,dt=$$

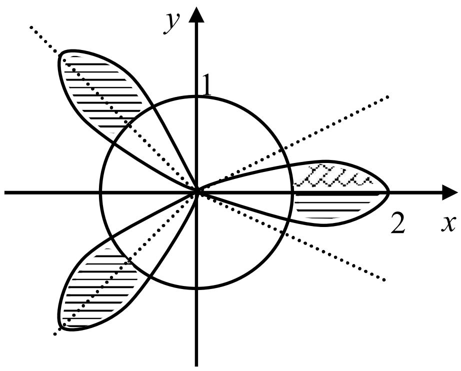
$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}dt-\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,d(\sin 2t)=\frac{3}{4}t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{3}{16}\sin 4t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\sin^3 2t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{8}.$$

Умножив полученную площадь на 4, получим площадь всей астроиды:

$$S_{астроиды}=4\cdot S=4\cdot\frac{3\pi}{8}=\frac{3\pi}{2}\approx 4{,}712\left(ед^2.\right)$$

в) $\begin{cases} r = 2\cos 3\varphi, \\ r \geq 1. \end{cases}$

Полярное уравнение $r = 2\cos 3\varphi$ определяет трехлепестковую розу, а уравнение $r = 1$ определяет окружность. Как видно из рисунка, фигура состоит из трех одинаковых частей, и, в то же время, эти части имеют ось симметрии. Значит, достаточно найти площадь шестой части. Пусть эта часть лежит в первой четверти. Определим полярный угол точки пересечения окружности и трехлепестковой розы в первой четверти:



$$\begin{cases} r = 2\cos 3\varphi, \\ r = 1; \end{cases} \Leftrightarrow 2\cos 3\varphi = 1 \Leftrightarrow \cos 3\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{9}.$$

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{9}}\left(4\cos^2 3\varphi - 1\right)d\varphi = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{9}}\cos^2 3\varphi\, d\varphi - \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{9}} d\varphi =$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{9}}\left(1 + \cos 6\varphi\right)d\varphi - \frac{1}{2}\varphi\Big|_{0}^{\frac{\pi}{9}} = \varphi\Big|_{0}^{\frac{\pi}{9}} + \frac{1}{6}\sin 6\varphi\Big|_{0}^{\frac{\pi}{9}} - \frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{9} + \frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{18} + \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

Таким образом, площадь всей фигуры:

$$S_{ф} = 6 \cdot S = 6 \cdot \left(\frac{\pi}{18} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}913\,(ед.^2)$$

Ответ. а) 2,995 $ед^2$; **б)** 4,712 $ед^2$; **в)** 1,913 $ед^2$.

Задание 5. Вычислить длину дуги линии заданной уравнениями:

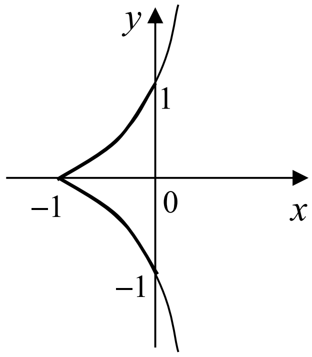
а) $\begin{cases} y^2 = (x+1)^3, \\ -1 \leq x \leq 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \\ 0 \leq t \leq 1; \end{cases}$ в) $r = 3(1 + \cos\varphi)$

Решение

а) $\begin{cases} y^2 = (x+1)^3, \\ -1 \leq x \leq 0; \end{cases}$

Для вычисления длины дуги данной линии воспользуемся формулой:

$$l = \int_{a}^{b}\sqrt{1 + (y')^2}\,dx.$$



Из рисунка видно, что линия симметрична относительно оси абсцисс. Поэтому искать будем длину линии лежащей во второй четверти:

$$y=\left(x+1\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Вычислим производную: $y'=\dfrac{3}{2}\left(x+1\right)^{\frac{1}{2}}$.

Подставляя данные в формулу, получим:

$$l=\int\limits_{-1}^{0}\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\left(x+1\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{2}}\,dx=\int\limits_{-1}^{0}\sqrt{1+\frac{9}{4}\left(x+1\right)}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{-1}^{0}\sqrt{9x+13}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{\left(9x+13\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{1}{27}\left(\sqrt{13^{3}}-8\right)=\frac{13\sqrt{13}-8}{27}.$$

Следовательно, длина искомой линии равна:

$$L=2\cdot l=2\cdot\frac{13\sqrt{13}-8}{27}=\frac{26\sqrt{13}-16}{27}\approx 2{,}879\ \left(ед\right).$$

б) $\begin{cases} x=e^{t}\cos t, \\ y=e^{t}\sin t, \\ 0\le t\le 1; \end{cases}$ − кривая задана уравнениями в параметрической форме.

Длина дуги кривой, соответствующая изменению параметра t от t_1 до t_2, выражается интегралом

$$l=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x'_t\right)^{2}+\left(y'_t\right)^{2}}\,dt.$$

Вычислим производные

$$x'_t=e^{t}\cos t-e^{t}\sin t \quad \text{и} \quad y'_t=e^{t}\sin t+e^{t}\cos t.$$

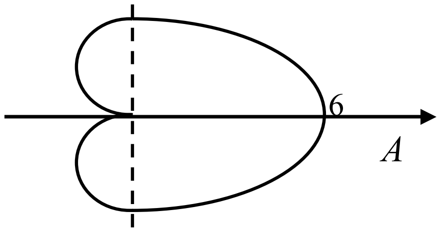
Подставляя их в формулу, имеем

$$l=\int\limits_{0}^{1}\sqrt{\left(e^{t}\cos t-e^{t}\sin t\right)^{2}+\left(e^{t}\sin t+e^{t}\cos t\right)^{2}}\,dt=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}e^{t}\sqrt{\cos^{2}t-2\cdot\cos t\cdot\sin t+\sin^{2}t+\sin^{2}t+2\cdot\cos t\cdot\sin t+\cos^{2}t}\,dt=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}e^{t}\sqrt{2}\,dt=\sqrt{2}\cdot e^{t}\Big|_{0}^{1}=\sqrt{2}\left(e-1\right)\approx 2{,}43\ \left(ед\right).$$

в) Кардиоида $r = 3(1+\cos\varphi)$ - кривая, симметричная относительна полярной оси. Вычислим длину дуги лежащей сверху от полярной оси.



Длина дуги вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi.$$

Найдем производную

$$r' = -3\sin\varphi.$$

Подставляя в формулу данные, получаем

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{9(1+\cos\varphi)^2 + 9\sin^2\varphi}\, d\varphi = 3\int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos\varphi}\, d\varphi = 6\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 12\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 12.$$

Следовательно, длина всей кардиоиды равна $L = 2\cdot l = 2\cdot 12 = 24\,(ед)$.

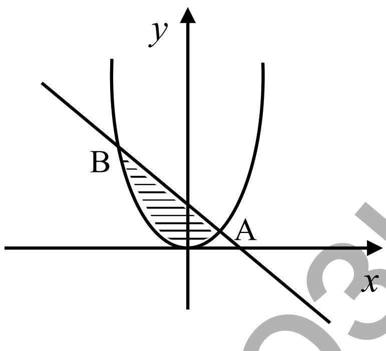
Ответ. а) 2,879 *ед* ; **б)** 2,43 *ед* ; **в)** 24 *ед* .

Задание 6. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры Φ вокруг указанной оси:

а) $\Phi: \begin{cases} 2y = x^2, \\ 2x + 2y - 3 = 0, \end{cases}$ ось $0x$; б) $\Phi: \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sqrt{3}\sin t, \end{cases}$ ось $0y$.

Решение

а) Для нахождения пределов интегрирования найдем координаты точек пересечения данных линий A и B.



Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 2y = x^2, \\ 2x + 2y - 3 = 0, \end{cases}$$

получим значения $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ и $\left(-3; \frac{9}{2}\right)$.

Значит, точка A имеет координаты $\left(1; \frac{1}{2}\right)$, а точка B $-$ $\left(-3; \frac{9}{2}\right)$.

Объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ вокруг оси Ox можно вычислить по формуле:

$$V_x = \pi\int_a^b \left(y_2^2 - y_1^2\right) dx.$$

Подставим полученные данные в формулу:

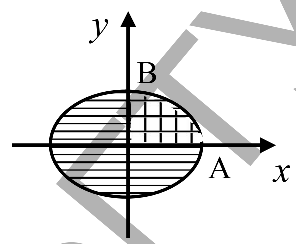
$$V_x = \pi\int_{-3}^{1} \left(\left(\frac{3-2x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 \right) dx = \frac{\pi}{4}\int_{-3}^{1} \left(9 - 12x + 4x^2 - x^4\right) dx =$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(9x-6x^2+\frac{4}{3}x^3-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-3}^{1}=\frac{\pi}{4}\left(9-6+\frac{4}{3}-\frac{1}{5}+27+54+36-\frac{243}{5}\right)=$$

$$=\frac{272}{15}\approx 18{,}133\left(ед^3\right).$$

б) $\Phi:\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=\sqrt{3}\sin t,\end{cases}$.

$A(2;\,0)$ и $B\left(0;\,\sqrt{3}\right)$.



Воспользуемся формулой:

$$V_y=\pi\int_c^d x^2\,dy.$$

Фигура симметрична относительно оси Ox. Найдем объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy, части фигуры лежащей в первой четверти. Определим данные, необходимые для вычисления объема тела вращения. Так как граница фигуры задана параметрическими уравнениями, то имеем:

$$x=x(t)=2\cos t;$$

$$dy=y'(t)\,dt=\left(\sqrt{3}\sin t\right)'dt=\sqrt{3}\,\cos t\,dt;$$

$$c=A(2;0)\Rightarrow y(t_1)=0\Rightarrow\sqrt{3}\sin t_1=0\Rightarrow t_1=0;$$

$$d=B\left(0;\sqrt{3}\right)\Rightarrow y(t_2)=\sqrt{3}\Rightarrow\sqrt{3}\sin t_2=\sqrt{3}\Rightarrow\sin t_2=1\Rightarrow t_2=\frac{\pi}{2}.$$

Подставляя полученные данные в формулу, получим:

$$V_y=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2 t\cdot\sqrt{3}\cdot\cos t\,dt=4\sqrt{3}\,\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 t\right)d\left(\sin t\right)=$$

$$=4\sqrt{3}\,\pi\left(\sin t-\frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=4\sqrt{3}\,\pi\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{8\sqrt{3}\,\pi}{3}.$$

Умножая полученный объем на 2, получим объем искомого тела:

$$V=2\cdot V_y=2\cdot\frac{8\sqrt{3}\,\pi}{3}=\frac{16\sqrt{3}\,\pi}{3}\approx 29{,}021\left(ед^3\right).$$

Ответ. а) 18,133 $ед^3$; **б)** 29,021 $ед^3$.

Задание 7. Найти координаты центра масс однородной плоской:

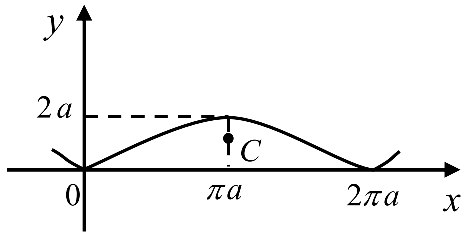
а) кривой L − дуга первой арки циклоиды $\begin{cases}x=a\left(t-\sin t\right),\\ y=a\left(1-\cos t\right).\end{cases}$;

б) фигуры Φ − ограниченной линиями $x + y = 4$ и $x = \sqrt{16 - 4y}$.

Кривую L и фигуру Φ считать однородной ($\mu(x, y) = 1$).

Решение

а) Точкам первой арки циклоиды, отвечают значения параметра t, изменяющиеся от 0 до 2π.



Координаты центра масс плоской дуги (массы m) вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{M_y}{m} \text{ и } y_c = \frac{M_x}{m},$$

где M_x и M_y − статические моменты кривой.

В случае однородной кривой, масса дуги m вычисляется по формуле (кривая задана в параметрическом виде):

$$m = \int_{t_1}^{t_2} \mu \cdot \sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2}\, dt,$$

а статические моменты:

$$M_x = \int_{t_1}^{t_2} \mu \cdot y(t)\sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2}\, dt \text{ и } M_y = \int_{t_1}^{t_2} \mu \cdot x(t)\sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2}\, dt.$$

В силу симметрии первой арки циклоиды, абсцисса центра масс будет лежать на прямой $x_c = \pi a$.

Вычислим m и M_x. Для этого найдем производные x'_t и y'_t:

$$x'_t = a(1 - \cos t) \text{ и } y'_t = \sin t.$$

Тогда,

$$\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2 = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = a^2(2 - 2\cos t).$$

Подставляя данные в формулы, получим:

$$m = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(2 - 2\cos t)}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}\, dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2} dt = -4a\cos\frac{t}{2}\bigg|_0^{2\pi} = 8a.$$

$$M_x = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\sqrt{a^2(2 - 2\cos t)}\, dt = a^2\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sqrt{2(1 - \cos t)}\, dt =$$

$$= \sqrt{2}\, a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{\frac{3}{2}} dt = \sqrt{2}\, a^2 \int_0^{2\pi} \left(2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{\frac{3}{2}} dt = 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\left(\frac{t}{2}\right) dt =$$

$$= -8a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) d\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) = -8a^2\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{3}\cos^3\left(\frac{t}{2}\right)\right)\bigg|_0^{2\pi} = \frac{32}{3}a^2.$$

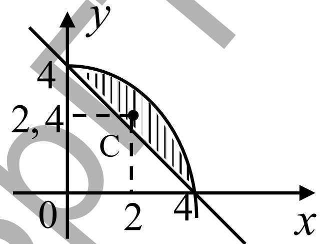
Таким образом, имеем $y_c = \dfrac{M_x}{m} = \dfrac{32a^2}{3 \cdot 8a} = \dfrac{4}{3}a$.

Следовательно, центр масс дуги первой арки циклоиды имеет координаты:

$$C\left(\pi a; \frac{4}{3}a\right).$$

б) $x + y = 4 \;\Rightarrow\; y = 4 - x$ − прямая,

$x = \sqrt{16 - 4y} \quad \Rightarrow \quad y = 4 - \dfrac{x^2}{4}$ − парабола направленная ветвями вниз с вершиной в точке $(0; 4)$.



Координаты центра масс плоской фигуры (массы m) вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{M_y}{m} \text{ и } y_c = \frac{M_x}{m},$$

где M_x и M_y − статические моменты плоской фигуры.

В случае однородной плоской фигуры, массу m вычисляем по формуле:

$$m = \int_a^b \mu \cdot \left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx,$$

а статические моменты:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \mu \cdot \left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right) dx \text{ и } M_y = \int_a^b \mu \cdot x\left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx.$$

В данном примере $f_2(x) = 4 - \dfrac{x^2}{4}$ и $f_1(x) = 4 - x$, а также $a = 0$ и $b = 4$.

Подставляя в формулы и вычисляя соответствующие интегралы, получим:

$$m = \int_0^4 \left(4 - \frac{x^2}{4} - 4 + x\right) dx = \int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_0^4 - \frac{x^3}{12}\bigg|_0^4 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}.$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^4 \left(\left(4 - \frac{x^2}{4}\right)^2 - (4 - x)^2\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \left(16 - 2x^2 + \frac{x^4}{16} - 16 + 8x - x^2\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 \left(8x - 3x^2 + \frac{x^4}{16}\right) dx = \frac{1}{2}\left(4x^2 - x^3 + \frac{x^5}{80}\right)\bigg|_0^4 = \frac{1}{2}\left(64 - 64 + \frac{64}{5}\right) = \frac{32}{5}.$$

$$M_y = \int_0^4 x\left(4 - \frac{x^2}{4} - 4 + x\right) dx = \int_0^4 \left(x^2 - \frac{x^3}{4}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{16}\right)\bigg|_0^4 = \frac{64}{3} - 16 = \frac{16}{3}.$$

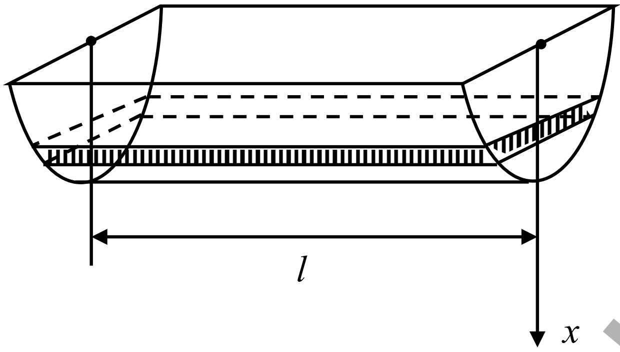
Следовательно, координаты центра масс фигуры Φ:

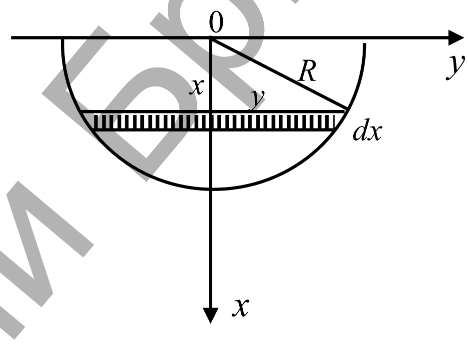
$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{16 \cdot 3}{3 \cdot 8} = 2 \text{ и } y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{32 \cdot 3}{5 \cdot 8} = \frac{12}{5} = 2{,}4 \Rightarrow C(2; 2{,}4).$$

Ответ. а) $\left(\pi a; \frac{4}{3}a\right)$; **б)** $(2; 2{,}4)$.

Задание 8. Вычислить работу, которую необходимо затратить на выкачивание воды из резервуара P. Удельный вес воды принять равным $9{,}81\, кН/м^3$ и $\pi = 3{,}14$. P − полуцилиндр (обращенный выпуклостью вниз), радиус основания которого $R = 1\, м$ и длина образующей $l = 5\, м$.

Решение





Объем элементарного слоя воды, находящегося на глубине x и имеющего длину l, ширину $2y$ и толщину dx, равен:

$$dV = 2y \cdot l \cdot dx = 2\sqrt{R^2 - x^2} \cdot l \cdot dx$$

Элементарная работа, совершаемая для поднятия этого слоя воды на высоту x, будет равна:

$$dA = 2\gamma l \sqrt{R^2 - x^2}\, x\, dx,$$

где γ − удельный вес воды.

Следовательно,

$$A = 2\gamma l \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, x\, dx = -\gamma l \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, d\left(R^2 - x^2\right) = -\gamma l \cdot \left. \frac{2\left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3} \right|_0^R =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \gamma l R^3 = \frac{2}{3} \cdot 9{,}81 \cdot 5 = 32{,}7 \ (кДж).$$

Ответ. 32,7 кДж..

Аттестационная работа по теме «Дифференциальные уравнения»

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения (ДУ).

1.	$3\left(x^2y+y\right)dy+\sqrt{2+y^2}\,dx=0$;	**2.**	$\left(1+e^x\right)y\,y'=e^x$;
3.	$4\left(x^2y+y\right)dy+\sqrt{5+y^2}\,dx=0$;	**4.**	$x\,dx-y\,dy=y\,x^2\,dy-x\,y^2dx$;
5.	$\sqrt{3+y^2}+\sqrt{1-x^2}\,y\,y'=0$;	**6.**	$\left(3+e^x\right)y\,y'=e^x$;
7.	$y\left(1+\ln y\right)+x\,y'=0$;	**8.**	$6x\,dx-2y\,dy=2y\,x^2dy-3x\,y^2dx$;
9.	$\sqrt{1-x^2}\,y'+x\,y^2+x=0$;	**10.**	$\left(1+e^x\right)y'=y\,e^x$;
11.	$y\ln y+x\,y'=0$;	**12.**	$6x\,dx-y\,dy=yx^2\,dy-3x\,y^2\,dx$;
13.	$\sqrt{5+y^2}+y\sqrt{1-x^2}\;y'=0$;	**14.**	$\left(e^x+8\right)dy-y\,e^x\,dx=0$;
15.	$x\sqrt{4+y^2}\,dx+y\sqrt{1+x^2}\,dy=0$;	**16.**	$2x\,dx+2y\,dy=\;x^2y\,dy-2x\,y^2\,dx$;
17.	$\sqrt{4-x^2}\;y'+x\,y^2+x=0$;	**18.**	$y\left(4+e^x\right)dy-e^x\,dx=0$;
19.	$x\sqrt{5+y^2}\,dx+y\sqrt{4+x^2}\,dy=0$;	**20.**	$6x\,dx-6y\,dy=3x^2y\,dy-2x\,y^2dx$;
21.	$y'\,y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0$;	**22.**	$\left(e^{2x}+5\right)dy+y\,e^{2x}\,dx=0$;
23.	$x\sqrt{3+y^2}\,dx+y\sqrt{2+x^2}\,dy=0$;	**24.**	$6x\,dx-6y\,dy=2x^2y\,dy+3y^2x\,dx$;
25.	$\sqrt{3+y^2}\,dx-y\,dy=x^2y\,dy$;	**26.**	$\sqrt{4+y^2}dx-y\,dy=\;x^2y\,dy$;
27.	$x\sqrt{1+y^2}+y\,y'\sqrt{1+x^2}=0$;	**28.**	$4x\,dx-3y\,dy=3x^2y\,dy-2x\,y^2\,dx$;
29.	$2x^2\,y\,y'+y^2=2$;	**30.**	$3y^2\,y'+16x=2x\,y^3$.

Задание 2. Найти общий интеграл ДУ.

1. $x\,y'=4\sqrt{x^2+y^2}+y$;

2. $y'=\dfrac{x^2+xy-5y^2}{x^2-6xy}$;

3. $x\,y'=\dfrac{3y^3+14x^2y}{7x^2+2y^2}$;

4. $4\,y'=\dfrac{y^2}{x^2}+10\dfrac{y}{x}+5$;

5. $x\,y'=2\sqrt{3x^2+y^2}+y$;

6. $y'=\dfrac{x^2+xy-3y^2}{x^2-4xy}$;

7. $x\,y'=\dfrac{3y^3+12x^2y}{2y^2+6x^2}$;

8. $y'=\dfrac{y^2}{x^2}+8\dfrac{y}{x}+12$;

9. $x\,y' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y$;

10. $y' = \dfrac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$;

11. $x\,y' = \dfrac{3y^3 + 10x^2 y}{2y^2 + 5x^2}$;

12. $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 8$;

13. $x\,y' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$;

14. $y' = \dfrac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$;

15. $x\,y' = \dfrac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}$;

16. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 6$;

17. $x\,y' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$;

18. $y' = \dfrac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$;

19. $x\,y' = \dfrac{3y^3 + 6x^2 y}{2y^2 + 3x^2}$;

20. $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 4$;

21. $x\,y' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$;

22. $y' = \dfrac{x + 2y}{2x - y}$;

23. $x\,y' = \dfrac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$;

24. $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 3$;

25. $x\,y' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$;

26. $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$;

27. $x\,y' = \dfrac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$;

28. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 4\dfrac{y}{x} + 2$;

29. $x\,y' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$;

30. $x\,y' = y - x e^{\frac{y}{x}}$.

Задание 3. Найти решение задачи Коши.

1.	$y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{\ln x}{x},\ y(1) = 1$;	**2.**	$y' - 4xy = -4x^3,\ y(0) = -\dfrac{1}{2}$;
3.	$y' - y\cos x = -\sin 2x,\ y(0) = 3$;	**4.**	$y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3,\ y(0) = \dfrac{1}{2}$;
5.	$y' + 2xy = x e^{-x^2}\sin x,\ y(0) = 1$;	**6.**	$y' - \dfrac{2}{x+1}y = e^x (x+1)^2,\ y(0) = 1$;
7.	$y' + xy = -x^3,\ y(0) = 3$;	**8.**	$y' + \dfrac{xy}{2(1 - x^2)} = \dfrac{x}{2},\ y(0) = \dfrac{2}{3}$;
9.	$y' + 2xy = -2x^3,\ y(1) = e^{-1}$;	**10.**	$y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2}{x^3},\ y(1) = 1$;

11.	$y' + \dfrac{1-2x}{x^2}\,y = 1,\ y(1) = 1;$	**12.**	$y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2,\ y(1) = 3;$
13.	$\left(xy + \sqrt{y}\right)dy + y^2 dx = 0,\ y(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}};$	**14.**	$y' + \dfrac{2y}{x} = x^3,\ y(1) = -\dfrac{5}{6};$
15.	$y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{8}{x^2},\ y(1) = 4;$	**16.**	$y' - \dfrac{y}{x} = -2\,\dfrac{\ln x}{x},\ y(1) = 1;$
17.	$y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}e^x,\ y(1) = e;$	**18.**	$y' - \dfrac{2x-5}{x^2}\,y = 5,\ y(2) = 4;$
19.	$y' + \dfrac{2x}{1+x^2}\,y = \dfrac{2x^2}{1+x^2},\ y(0) = \dfrac{2}{3};$	**20.**	$y' + \dfrac{y}{2x} = x^2,\ y(1) = 1;$
21.	$y' + \dfrac{y}{x} = \sin x,\ y(\pi) = \dfrac{1}{\pi};$	**22.**	$y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1;$
23.	$y' - \dfrac{y}{x+1} = e^x(x+1),\ y(0) = 1;$	**24.**	$y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x,\ y(-1) = \dfrac{3}{2};$
25.	$y' + y\,tg\,x = \cos x^2,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2};$	**26.**	$y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x,\ y(0) = 0;$
27.	$y' + y\,ctg\,x = 2x\sin x,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0;$	**28.**	$y' - \dfrac{y}{x} = x^2,\ y(1) = 0;$
29.	$y'x^3 = xy' - 2y,\ y(1) = 1;$	**30.**	$xy' - 2y = 2x^4,\ y(1) = 1.$

Задание 4. Решить задачу Коши.

1.	$2\left(y^3 - y + xy\right)dy = dx,$	$y(-2) = 0;$
2.	$\left(2x - 2\sin^2 y - y\sin 2y\right)dy + y\,dx = 0,$	$y\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4};$
3.	$\left(2xy + \sqrt{y}\right)dy + 2y^2\,dx = 0,$	$y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1;$
4.	$\left(x + \ln^2 y - \ln y\right)y' = \dfrac{y}{2},$	$y(2) = 1;$
5.	$y^2\left(y^2 + 4\right)dx + 2xy\left(y^2 + 4\right)dy = 2\,dy,$	$y\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 2;$
6.	$\left(13y^3 - x\right)y' = 4y,$	$y(5) = 1;$
7.	$ch\,y\,dx = \left(1 + x\,sh\,y\right)dy,$	$y(1) = \ln 2;$
8.	$2\left(\cos^2 y\cos 2y - x\right)y' = \sin 2y,$	$y\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{5\pi}{4};$

9.	$dx = (\sin y + 3\cos y + 3x)dy$,	$y\left(e^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{2}$;
10.	$2y\sqrt{y}\,dx - (6x\sqrt{y} + 7)dy = 0$,	$y(-4) = 1$;
11.	$(y^2 + 2y - x)y' = 1$,	$y(2) = 0$;
12.	$\sin 2y\,dx = (\sin^2 2y + 2\sin^2 y + 2x)dy$,	$y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$;
13.	$(xy + \sqrt{y})dy + y^2 dx = 0$,	$y(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$;
14.	$2y^2\,dx + \left(e^{\frac{1}{y}} + x\right)dy = 0$,	$y(0) = \frac{1}{2}$;
15.	$y^3(y-1)dx + 3xy^2(y-1)dy = (y+2)dy$,	$y\left(\frac{1}{4}\right) = 2$;
16.	$2(x + y^4)y' = y$,	$y(-2) = -1$;
17.	$(2\ln y - \ln^2 y)dy = y\,dx + x\,dy$,	$y(4) = e^2$;
18.	$8(4y^3 + xy - y)y' = 1$,	$y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
19.	$(3y\cos 2y - 2y^2\sin 2y - 2x)y' = y$,	$y(16) = \frac{\pi}{4}$;
20.	$dx + (xy - y^3)dy = 0$,	$y(-1) = 0$;
21.	$(104y^3 - x)\,y' = 4y$,	$y(8) = 1$;
22.	$e^{y^2}(dx - 2xy\,dy) = y\,dy$,	$y(0) = 0$;
23.	$(x\cos^2 y - y^2)y' = y\cos^2 y$,	$y(\pi) = \frac{\pi}{4}$;
24.	$(\cos 2y\cos^2 y - x)y' = \sin y\,\cos y$,	$y\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{3}$;
25.	$2(4y^2 + 4y - x)y' = 1$,	$y(0) = 0$;
26.	$y^2 dx + (xy - 1)dy = 0$,	$y(1) = e$;
27.	$(y^4 e^y + 2x)\,y' = y$,	$y(0) = 1$;
28.	$\left(e^{\frac{2}{y}} + x\right)dy + y^2 dx = 0$,	$y(e) = 2$;
29.	$y' = \frac{y}{3x - y^2}$,	$y(1) = 1$;

30.	$(1-2xy)y' = y(y-1)$,	$y(1)=2$;

Задание 5. Найти общее решение ДУ.

1.	$y''' x\ln x = y''$;	**2.**	$x y''' + y'' = 1$;
3.	$2xy''' = y''$;	**4.**	$(1+\sin x)y''' = y''\cos x$;
5.	$(1+x)y''' + y'' = x+1$;	**6.**	$cth\, x\, y'' - y' + \dfrac{1}{ch\, x} = 0$;
7.	$x^3 y''' + x^2 y'' = \sqrt{x}$;	**8.**	$y''' th\, 7x = 7y''$;
9.	$y''' th\, 5x = 5y''$;	**10.**	$y''' tg\, x = y'' + 1$;
11.	$x y''' + y'' = \sqrt{x}$;	**12.**	$th\, x\, y''' = y''$;
13.	$x y''' + y'' + x = 0$;	**14.**	$x y''' - y'' + \dfrac{1}{x} = 0$;
15.	$x^5 y''' + x^4 y'' = 1$;	**16.**	$(1+x^2)y'' + 2x y' = x^3$;
17.	$x y''' + 2y'' = 0$;	**18.**	$x^4 y'' + x^3 y' = 1$;
19.	$cth\, 2x \cdot y''' = 2y''$;	**20.**	$tg\, x \cdot y''' = 2y''$;
21.	$x^3 \cdot y''' + x^2 y'' = 1$;	**22.**	$y''' ctg\, 2x + 2y'' = 0$;
23.	$x^2 \cdot y'' + x y' = 1$;	**24.**	$tg\, x \cdot y'' - y' + \dfrac{1}{\sin x} = 0$;
25.	$x \cdot y''' + y'' = x+1$;	**26.**	$2x \cdot y''' = y''$;
27.	$x y''' + y'' = 1$;	**28.**	$y''' x\ln x = y''$;
29.	$x y''' = y'' - x y''$;	**30.**	$y''' = 2(y''-1)ctg\, x$.

Задание 6. Найти общее решение ДУ.

1.	$y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$;	**2.**	$y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 6x$;
3.	$y'' - y = \cos x + 2e^x$;	**4.**	$y'' + y = 3\sin 7x + 2\cos 7x$;
5.	$y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$;	**6.**	$y'' - 4y' + 8y = e^x(5\sin x - 3\cos x)$;
7.	$y'' + 2y' = e^x(\sin x + \cos x)$;	**8.**	$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 3x$;
9.	$y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 4x$;	**10.**	$y'' + y = -3\sin 3x + 2\cos 3x$;
11.	$y'' + 2y' + 5y = -2\sin x$;	**12.**	$y'' - 4y' + 8y = e^x(-3\sin x + 4\cos x)$;
13.	$y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x)$;	**14.**	$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 5x$;
15.	$y'' + y = 3\sin 5x + 2\cos 5x$;	**16.**	$y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x$;
17.	$y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos x$;	**18.**	$y'' - 4y' + 8y = e^x(3\sin x + 5\cos x)$;
19.	$y'' + 2y' = 6e^x(\sin x + \cos x)$;	**20.**	$y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 4x$;

21.	$y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 5x$;	**22.**	$y'' + y = -3\sin 7x + 2\cos 7x$;
23.	$y'' + 2y' + 5y = -\cos x$;	**24.**	$y'' - 4y' + 8y = e^{x}(2\sin x - \cos x)$;
25.	$y'' + 2y' = 3e^{x}(\sin x + \cos x)$;	**26.**	$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 4x$;
27.	$y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 8x$;	**28.**	$y'' + 2y' + 5y = 10\cos x$;
29.	$y'' + y = 3\sin 4x + 2\cos 4x$;	**30.**	$y'' - 4y' + 8y = e^{x}(-\sin x + 2\cos x)$.

Задание 7. Найти общее решение ДУ.

1.	$y'' - 2y' = 2\,ch\,2x$;
2.	$y'' + y = 2\sin x - 6\cos x + 2e^{x}$;
3.	$y'' - y = \cos x + 2e^{x}$;
4.	$y'' - 3y' = 2\,ch\,3x$;
5.	$y'' + 4y = -8\sin 2x + 32\cos 2x + 4e^{2x}$;
6.	$y'' - y = 10\sin x + \cos x + 4e^{x}$;
7.	$y'' - 4y' = 16\,ch\,4x$;
8.	$y'' + 9y = -18\sin 3x - 18e^{3x}$;
9.	$y'' - 4y' = 24e^{2x} - 4\cos 2x + 8\sin 2x$;
10.	$y'' - 5y' = 50\,ch\,5x$;
11.	$y'' + 16y = 16\cos 4x - 16e^{4x}$;
12.	$y'' - 9y = -9e^{3x} + 18\sin 3x - 9\cos 3x$;
13.	$y'' - y' = 2\,ch\,x$;
14.	$y'' + 25y = 20\cos 5x - 10\sin 5x + 50e^{5x}$;
15.	$y'' - 16y = 48e^{4x} + 64\cos 4x - 64\sin 4x$;
16.	$y'' + 2y' = 2sh2x$;
17.	$y'' + 36y = 24\sin 6x - 12\cos 6x + 36e^{x}$;
18.	$y'' - 25y = 25(\sin 5x + \cos 5x) - 50e^{5x}$;
19.	$y'' + 3y' = 2\,sh\,3x$;
20.	$y'' + 49y = 14\sin 7x + 7\cos 7x - 98e^{7x}$;
21.	$y'' - 36y = 36e^{6x} - 72(\sin 6x + \cos 6x)$;
22.	$y'' + 4y' = 16\,sh\,4x$;
23.	$y'' + 64y = 16\sin 8x - 16\cos 8x - 64e^{8x}$;
24.	$y'' - 49y' = 14e^{7x} - 49(\sin 7x + \cos 7x)$;
25.	$y'' + 5y' = 50\,sh\,5x$;

26.	$y'' + 81y = 162e^{9x} + 9\sin 9x + 3\cos 9x$;
27.	$y'' - 64 = 128\cos 8x - 64e^{8x}$;
28.	$y'' + y' = 2\,sh\,x$;
29.	$y'' + 100y = -200 \quad e^{x} + 20\sin 10x - 30\cos 10x$;
30.	$y'' - 100y = 20e^{10x} + 100\cos 10x$.

Задание 8. Найти решение задачи Коши.

1.	$y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\cos \pi x}$,	$y(0) = 3$,	$y'(0) = 0$;
2.	$y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}$,	$y(0) = \ln 4$,	$y'(0) = 3(1 - \ln 2)$;
3.	$y'' + 4y = 8\,ctg\,2x$,	$y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 5$,	$y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 4$;
4.	$y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{1 + e^{-2x}}$,	$y(0) = 1 + 2\ln 2$,	$y'(0) = 6\ln 2$;
5.	$y'' - 9y' + 18y = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{-3x}}$,	$y(0) = 0$,	$y'(0) = 0$;
6.	$y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\sin \pi x}$,	$y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$,	$y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi^2}{2}$;
7.	$y'' + \dfrac{1}{\pi^2} y = \dfrac{1}{\pi^2 \cos\left(\dfrac{x}{\pi}\right)}$,	$y(0) = 2$,	$y'(0) = 0$;
8.	$y'' - 3y' = \dfrac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}$,	$y(0) = 4\ln 4$,	$y'(0) = 3(3\ln 4 - 1)$;
9.	$y'' + y = 4\,ctg\,x$,	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4$,	$y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4$;
10.	$y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{2 + e^{-2x}}$,	$y(0) = 1 + 3\ln 3$,	$y'(0) = 10\ln 3$;
11.	$y'' + 6y' + 8y = \dfrac{4e^{-2x}}{2 + e^{2x}}$,	$y(0) = 0$,	$y'(0) = 0$;
12.	$y'' + 9y = \dfrac{9}{\sin 3x}$,	$y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 4$,	$y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3\pi}{2}$;
13.	$y'' + 9y = \dfrac{9}{\cos 3x}$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 0$;

14.	$y'' - y' = \dfrac{e^{-x}}{2+e^{-x}}$,	$y(0) = \ln 27$,	$y'(0) = \ln 9 - 1$;
15.	$y'' + 4y = 4\,ctg\,2x$,	$y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 3$,	$y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$;
16.	$y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{3+e^{-x}}$,	$y(0) = 1 + 8\ln 2$,	$y'(0) = 14\ln 2$;
17.	$y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4e^{2x}}{1+e^{-2x}}$,	$y(0) = 0$,	$y'(0) = 0$;
18.	$y'' + 16y = \dfrac{16}{\sin 4x}$,	$y\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 3$,	$y'\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 2\pi$;
19.	$y'' + 16y = \dfrac{16}{\cos 4x}$,	$y(0) = 3$,	$y'(0) = 0$;
20.	$y'' - 2y' = \dfrac{4e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$,	$y(0) = \ln 4$,	$y'(0) = \ln 4 - 2$;
21.	$y'' + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{4}ctg\left(\dfrac{x}{2}\right)$,	$y(\pi) = 2$,	$y'(\pi) = \dfrac{1}{2}$;
22.	$y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{2+e^{-x}}$,	$y(0) = 1 + 3\ln 3$,	$y'(0) = 5\ln 3$;
23.	$y'' + 3y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{2+e^{x}}$,	$y(0) = 0$,	$y'(0) = 0$;
24.	$y'' + 4y = \dfrac{4}{\sin 2x}$,	$y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$,	$y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \pi$;
25.	$y'' + 4y = \dfrac{4}{\cos 2x}$,	$y(0) = 2$,	$y'(0) = 0$;
26.	$y'' + y' = \dfrac{e^{x}}{2+e^{x}}$,	$y(0) = \ln 27$,	$y'(0) = 1 - \ln 9$;
27.	$y'' + y = 2\,ctg\,x$,	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$,	$y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$;
28.	$y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$,	$y(0) = 1 + 2\ln 2$,	$y'(0) = 3\ln 2$;
29.	$y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{x}}{1+e^{-x}}$,	$y(0) = 0$,	$y'(0) = 0$;
30.	$y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$,	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$,	$y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$;

Задание №9. Решить систему ДУ.

1.	$\begin{cases}\dot{x} = 4x - 8y;\\ \dot{y} = -8x + 4y.\end{cases}$	**2.**	$\begin{cases}\dot{x} = x - 5y;\\ \dot{y} = -x - 3y.\end{cases}$
3.	$\begin{cases}\dot{x} = 2x + 8y;\\ \dot{y} = x + 4y.\end{cases}$	**4.**	$\begin{cases}\dot{x} = x + 4y;\\ \dot{y} = 2x + 3y.\end{cases}$
5.	$\begin{cases}\dot{x} = x + 2y;\\ \dot{y} = 4x + 3y.\end{cases}$	**6.**	$\begin{cases}\dot{x} = 2x + 3y;\\ \dot{y} = 5x + 4y.\end{cases}$
7.	$\begin{cases}\dot{x} = 4x + 2y;\\ \dot{y} = 4x + 6y.\end{cases}$	**8.**	$\begin{cases}\dot{x} = y;\\ \dot{y} = x.\end{cases}$
9.	$\begin{cases}\dot{x} = -2x + y;\\ \dot{y} = -3x + 2y.\end{cases}$	**10.**	$\begin{cases}\dot{x} = -x + 8y;\\ \dot{y} = x + y.\end{cases}$
11.	$\begin{cases}\dot{x} = x - y;\\ \dot{y} = -4x + y.\end{cases}$	**12.**	$\begin{cases}\dot{x} = x - y;\\ \dot{y} = -4x + 4y.\end{cases}$
13.	$\begin{cases}\dot{x} = 2x + y;\\ \dot{y} = -6x - 3y.\end{cases}$	**14.**	$\begin{cases}\dot{x} = -2y;\\ \dot{y} = x.\end{cases}$
15.	$\begin{cases}\dot{x} = 3x + y;\\ \dot{y} = x + 3y.\end{cases}$	**16.**	$\begin{cases}\dot{x} = 5x + 4y;\\ \dot{y} = 4x + 5y.\end{cases}$
17.	$\begin{cases}\dot{x} = 3x - 2y;\\ \dot{y} = 2x + 8y.\end{cases}$	**18.**	$\begin{cases}\dot{x} = 4x - y;\\ \dot{y} = -x + 4y.\end{cases}$
19.	$\begin{cases}\dot{x} = 3x + y;\\ \dot{y} = 8x + y.\end{cases}$	**20.**	$\begin{cases}\dot{x} = 6x + 3y;\\ \dot{y} = -8x - 5y.\end{cases}$
21.	$\begin{cases}\dot{x} = -5x + 2y;\\ \dot{y} = x - 6y.\end{cases}$	**22.**	$\begin{cases}\dot{x} = 5x + 8y;\\ \dot{y} = 3x + 3y.\end{cases}$
23.	$\begin{cases}\dot{x} = 7x + 3y;\\ \dot{y} = x + 5y.\end{cases}$	**24.**	$\begin{cases}\dot{x} = x + 4y;\\ \dot{y} = x + y.\end{cases}$
25.	$\begin{cases}\dot{x} = x + 2y;\\ \dot{y} = 3x + 6y.\end{cases}$	**26.**	$\begin{cases}\dot{x} = 8x - 3y;\\ \dot{y} = 2x + y.\end{cases}$
27.	$\begin{cases}\dot{x} = -x - 2y;\\ \dot{y} = 3x + 4y.\end{cases}$	**28.**	$\begin{cases}\dot{x} = 6x - y;\\ \dot{y} = 3x + 2y.\end{cases}$
29.	$\begin{cases}\dot{x} = -2x - 3y;\\ \dot{y} = -x.\end{cases}$	**30.**	$\begin{cases}\dot{x} = 2x + y;\\ \dot{y} = 3x + 4y.\end{cases}$

Решение типового варианта аттестационной работы по теме «Дифференциальные уравнения»:

Задание 1. Найти общий интеграл ДУ:

$$20xdx - 3ydy = 3x^2 ydy - 5xy^2 dx$$

Решение

Группируя вместе слагаемые с общими множителями *dx* и *dy*, приводим уравнение к виду:

$$\left(20x + 5xy^2\right)dx = \left(3x^2 y + 3y\right)dy,$$

что равносильно

$$5x\left(4 + y^2\right)dx = 3y\left(x^2 + 1\right)dx.$$

Видно, что дифференциальное уравнение представляет собой уравнение с разделяющимися переменными. Для его интегрирования разделим обе части на $\left(4 + y^2\right)\left(x^2 + 1\right) \neq 0$, что приводит к

$$\frac{5xdx}{x^2 + 1} = \frac{3ydy}{y^2 + 4}.$$

Интегрируя обе части полученного равенства, находим

$$5\ln\left(x^2 + 1\right) = 3\ln\left(y^2 + 4\right) + \ln C,$$

или

$$\ln\left(x^2 + 1\right)^5 = \ln\left(\left(y^2 + 4\right)^3 C\right),$$

откуда окончательно получим

$$\left(x^2 + 1\right)^5 = C\left(y^2 + 4\right)^3.$$

Ответ. $\left(x^2 + 1\right)^5 = C\left(y^2 + 4\right)^3$ **.**

Задание 2. Найти общий интеграл ДУ:

$$y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}.$$

Решение

Покажем, что функция $f\left(x, y\right) = \dfrac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}$ является однородной нулевого порядка относительно переменных *x* и *y*.

$$f\left(tx, ty\right) = \frac{\left(tx\right)^2 + 2 \cdot tx \cdot ty - 5\left(ty\right)^2}{2\left(tx\right)^2 - 6 \cdot tx \cdot ty} = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy} = f\left(x, y\right).$$

Таким образом, делаем вывод, что предлагаемое дифференциальное уравнение является однородным. Для его решения введем замену $u = y/x$, откуда $y = ux$ и $y' = u + xu'$. Подставляя в исходное уравнение, получим

$$u + xu' = \frac{x^2 + 2x \cdot ux - 5(ux)^2}{2x^2 - 6x \cdot ux},$$

или

$$u + xu' = \frac{1 + 2u - 5u^2}{2 - 6u}.$$

Перенося слагаемое u в левую часть, и приводя к общему знаменателю, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$xu' = \frac{u^2 + 1}{2 - 6u},$$

Разделив переменные, имеем

$$\frac{(2 - 6u)\,du}{u^2 + 1} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части полученного равенства, найдем

$$2arctg(u) - 3\ln(u^2 + 1) + C = \ln|x|.$$

Интеграл от стоящего слева выражения вычислялся как

$$\int \frac{(2 - 6u)\,du}{u^2 + 1} = 2\int \frac{du}{u^2 + 1} - 3\int \frac{2udu}{u^2 + 1} = 2arctg(u) - 3\int \frac{d(u^2 + 1)}{u^2 + 1} =$$

$$= 2arctg(u) - 3\ln(u^2 + 1) + C.$$

Делая обратную замену $u = y/x$, окончательно получим

$$2arctg\left(\frac{y}{x}\right) - 3\ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right) + C = \ln|x|.$$

Ответ. $2arctg\left(\frac{y}{x}\right) - 3\ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right) + C = \ln|x|$.

Задание 3. Найти решение задачи Коши:

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}, \quad y(1) = 1.$$

Решение

Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Проинтегрируем его, используя метод И. Бернулли. Для этого сделаем замену $y = uv$ и $y' = u'v + uv'$. Таким образом, получим

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = -\frac{2}{x^2},$$

или

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = -\frac{2}{x^2}.$$

Так как одну из функций *u* или *v* можно выбирать произвольно, то в качестве *v* возьмем любое частное решение уравнения $v' - v/x = 0$. При таком выборе наше уравнение сведется к системе

$$\begin{cases} u'v = -2/x^2; \\ \dfrac{dv}{dx} - \dfrac{v}{x} = 0. \end{cases}$$

Находим функцию *v*:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = 0.$$

Разделив переменные, имеем

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x},$$

откуда $\ln v = \ln x + C$.

Так как нам необходимо найти любое частное решение, то можно положить $C = 0$. В этом случае − $v = x$.

Для нахождения *u* подставляем *v* в уравнение $u'v = -2/x^2$. Получаем

$$u'x = -\frac{2}{x^2}.$$

Разделив переменные

$$du = -\frac{2}{x^3}dx,$$

и интегрируя, найдем

$$u = \frac{1}{x^2} + C.$$

Таким образом, получили общее решение исходного уравнения в виде

$$y = uv = \left(\frac{1}{x^2} + C\right)x.$$

Для решения задачи Коши определим постоянную интегрирование *C*, удовлетворяющую данному условию $y(1) = 1$. Подставляя в общее решение $x = 1$ и $y = 1$, имеем

$$1 = \left(\frac{1}{1} + C\right)\cdot 1 \Leftrightarrow C = 0.$$

И окончательно можно записать

$$y = \left(\frac{1}{x^2} + 0\right)x \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}.$$

Ответ. $y = \frac{1}{x}$**.**

Задание №4. Решить задачу Коши:

$$dx + \left(2x + \sin 2y - 2\cos^2 y\right)dy = 0, \quad y(-1) = 0$$

Решение

Данное уравнение сводится к линейному, если x считать функцией, а y – аргументом: $x = x(y)$. Тогда $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$. В нашем случае, разделив обе части уравнения на dy, имеем

$$x'_y + 2x + \sin 2y - 2\cos^2 y = 0,$$

или

$$x'_y + 2x = 2\cos^2 y - \sin 2y.$$

Данное линейное уравнение решим с использованием замены $x = uv$ и $x'_y = u'v + uv'$. При этом получим:

$$u'v + uv' + 2uv = 2\cos^2 y - \sin 2y,$$

или

$$u'v + u\left(v' + 2v\right) = 2\cos^2 y - \sin 2y.$$

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} u'v = 2\cos^2 y - \sin 2y; \\ v' + 2v = 0 \end{cases}$$

Функцию v найдем как произвольное частное решение уравнения

$$v' + 2v = 0,$$

$$\frac{dv}{dy} = -2v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -2dy \Rightarrow \ln|v| = -2y \Leftrightarrow v = e^{-2y}.$$

Для нахождения функции u решаем уравнение $u'e^{-2y} = 2\cos^2 y - \sin 2y$. После разделения переменных получим

$$du = \left(2e^{2y}\cos^2 y - e^{2y}\sin 2y\right)dy.$$

Тогда

$$u = \int\left(2e^{2y}\frac{1+\cos 2y}{2} - e^{2y}\sin 2y\right)dy = \int\left(e^{2y} + e^{2y}\cos 2y - e^{2y}\sin 2y\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2y} + \frac{e^{2y}\left(\cos 2y + \sin 2y\right)}{4} - \frac{e^{2y}\left(\sin 2y - \cos 2y\right)}{4} + C =$$

$$= \frac{e^{2y}}{2}\left(1 + \cos 2y\right) + C = e^{2y}\cos^2 y + C.$$

Для вычисления интегралов $\int e^{2y}\cos 2y\,dy$, $\int e^{2y}\sin 2y\,dy$ использовался метод интегрирования по частям.

Таким образом, общее решение ДУ получим в виде

$$x = uv = \left(e^{2y}\cos^2 y + C\right)e^{-2y} = \cos^2 y + Ce^{-2y}.$$

Для нахождение решения задачи Коши воспользуемся условием $y(-1)=0$. Подставляя $x=-1$ и $y=0$ в общее решение, найдем C:

$$-1=\cos^2 0+Ce^{-2\cdot 0} \Leftrightarrow -1=1+C \Leftrightarrow C=-2.$$

Окончательно получим

$$x=\cos^2 y-2e^{-2y}.$$

Ответ. $x=\cos^2 y-2e^{-2y}$**.**

Задание 5. Найти общее решение ДУ:

$$y'''+\frac{2x}{x^2+1}y''=2x.$$

Решение

Данное уравнение является уравнением вида $F\left(x,y^{(k)},y^{(k+1)},...,y^{(n)}\right)=0$, допускающее понижения порядка до $(n-k)$ заменой $y^{(k)}=p(x)$. В нашем случае - $F(x,y'',y''')=0$. Поэтому, применяя замену $y''=p(x)$, получим уравнение:

$$p'+\frac{2x}{x^2+1}p=2x,$$

которое является линейным уравнением первого порядка относительно *p*.

Для его решения сделаем замену $p=uv$, $p'=u'v+uv'$:

$$u'v+uv'+\frac{2x}{x^2+1}uv=2x \Leftrightarrow u'v+u\left(v'+\frac{2x}{x^2+1}v\right)=2x \Leftrightarrow \begin{cases} u'v=2x, \\ v'+\dfrac{2x}{x^2+1}v=0. \end{cases}$$

В качестве *v* возьмем произвольное частное решение уравнения

$$\frac{dv}{dx}+\frac{2x}{x^2+1}v=0 \Rightarrow \frac{dv}{v}=-\frac{2xdx}{x^2+1} \Rightarrow \ln|v|=-\ln\left(x^2+1\right) \Leftrightarrow v=\frac{1}{x^2+1}.$$

Функцию *u* найдем из уравнения

$$u'\cdot\frac{1}{x^2+1}=2x \Leftrightarrow du=\left(2x^3+2x\right)dx \Leftrightarrow u=\frac{x^4}{2}+x^2+C_1.$$

Тогда

$$p=uv=\left(\frac{x^4}{2}+x^2+C_1\right)\cdot\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4+2x^2}{x^2+1}+\frac{C_1}{x^2+1}=\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+1-\frac{1}{x^2+1}\right)+\frac{C_1}{x^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)+\frac{2C_1-1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}.$$

Таким образом, получили уравнение $y''=\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)+\frac{2C_1-1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}$. Это уравнение вида $y''=f(x)$, решаемое двукратным интегрированием правой части.

$$y' = \int\left(\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)+\frac{2C_1-1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\right)dx\ ,$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}+x\right)+\frac{2C_1-1}{2}arctg\left(x\right)+C_2\,.$$

Отсюда окончательно находим

$$y = \int\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}+x\right)+\frac{2C_1-1}{2}arctg\left(x\right)+C_2\right)dx,$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{12}+\frac{x^2}{2}\right)+\frac{2C_1-1}{2}\left(x\cdot arctg\left(x\right)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right)+C_2x+C_3\text{ ю}$$

Интеграл $\int arctg\left(x\right)dx = x\cdot arctg\left(x\right)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$ вычислялся с помощью формулы интегрирования по частям.

Ответ. $y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{12}+\frac{x^2}{2}\right)+\frac{2C_1-1}{2}\left(x\cdot arctg\left(x\right)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right)+C_2x+C_3$**.**

Задание 6. Найти общее решение ДУ:

$$y''-6y'+9y=-39e^x\cos 3x\,.$$

Решение

Для решения данного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами найдем сначала решение соответствующего ему однородного уравнения $y''-6y'+9y=0$. Для этого составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\lambda^2-6\lambda+9=0 \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2=3\,.$$

Значит, решением соответствующего однородного уравнения будет являться функция $\overline{y}=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$.

Для нахождения общего решения данного неоднородного уравнения найдем его частное решение y_*. Будем искать его в виде $y_*=e^{3x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)$. Найдем первую и вторую производные:

$$y_*'=3e^{3x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)+e^{3x}\left(-3A\sin 3x+3B\cos 3x\right),$$

$$y_*''=9e^{3x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)+4e^{3x}\left(-3A\sin 3x+3B\cos 3x\right)+$$
$$+e^{3x}\left(-9A\cos 3x-9B\sin 3x\right).$$

В соответствии с методом неопределенных коэффициентов, имеем

$$9e^{3x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)+4e^{3x}\left(-3A\sin 3x+3B\cos 3x\right)+$$
$$+e^{3x}\left(-9A\cos 3x-9B\sin 3x\right)-18e^{3x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)-$$
$$-6e^{3x}\left(-3A\sin 3x+3B\cos 3x\right)+9e^{3x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)=-39e^x\cos 3x\,.$$

Получаем

$$\left(-9A-6B\right)\cos 3x+\left(-9B+6A\right)\sin 3x=-39\cos 3x,$$

Откуда

$$\begin{cases}-9A-6B=-39\\ -9B+6A=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=3\\ B=2\end{cases}.$$

Т.е. $y_*=e^{3x}\left(3\cos 3x+2\sin 3x\right)$. Таким образом, общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения $\overline{y}$ и частного решения y_*:

$$y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}+e^{3x}\left(3\cos 3x+2\sin 3x\right).$$

Ответ. $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}+e^{3x}\left(3\cos 3x+2\sin 3x\right)$.

Задание 7. Найти общее решение ДУ:

$$y''+5y'+4=36ch2x.$$

Решение

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y''+5y'+4=0$. Для этого найдем корни характеристического уравнения

$$\lambda^2+5\lambda+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\lambda=-1\\ \lambda=-4\end{array}\right..$$

Таким образом, получим

$$\overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}.$$

Т.к.

$$36ch2x=36\cdot\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}=18e^{2x}+18e^{-2x},$$

то найдем частные решения двух следующих неоднородных уравнений:

$$y''+5y'+4=18e^{2x} \text{ и } y''+5y'+4=18e^{-2x}.$$

Для первого из уравнений частное решение будем искать в виде $y_{*1}=Ae^{2x}$. Тогда $y'_{*1}=2Ae^{2x}$ и $y''_{*1}=4Ae^{2x}$. Подставляя их в соответствующее уравнение, имеем: $4Ae^{2x}+10Ae^{2x}+4Ae^{2x}=18e^{2x}$ или $18Ae^{2x}=18e^{2x}$, откуда A=1.

Значит,

$$y_{*1}=e^{2x}.$$

Аналогично, для второго уравнения находим

$$y_{*2}=-9e^{-2x}.$$

Тогда искомое общее решение имеет вид

$$y=\overline{y}+y_{*1}+y_{*2}=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}+e^{2x}-9e^{-2x}.$$

Ответ. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}+e^{2x}-9e^{-2x}$.

Задание 8. Найти решение задачи Коши:

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0.$$

Решение

Решая соответствующее однородное уравнение $y'' + y = 0$ (корнями характеристического уравнения $\lambda^2 + 1 = 0$ являются комплексные числа $\lambda_{1,2} = \pm i$) находим

$$\overline{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Воспользовавшись методом вариации постоянных (метод Лагранжа), будем искать решение исходного уравнения в виде $y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$. Система для определения $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ имеет вид:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}.$$

Решая эту систему по формулам Крамера, относительно $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ получим:

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\cos^2 x + \sin^2 x} = -\frac{\sin x}{\cos x},$$

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{1}{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1.$$

Отсюда находим

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \ln|\cos x| + C_1,$$

$$C_2(x) = \int dx = x + C_2.$$

Значит, общее решение имеет вид:

$$y = \left(\ln|\cos x| + C_1\right)\cos x + \left(x + C_2\right)\sin x,$$

а его производная

$$y' = \left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)\cos x - \left(\ln|\cos x| + C_1\right)\sin x + \sin x + \left(x + C_2\right)\cos x.$$

Для решения задачи Коши найдем значения C_1 и C_2 из системы:

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ 1+C_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=-1 \end{cases}.$$

Таким образом, искомое решение задачи Коши имеет вид:

$$y=\left(\ln\left|\cos x\right|+1\right)\cos x+\left(x-1\right)\sin x.$$

Ответ. $y=\left(\ln\left|\cos x\right|+1\right)\cos x+\left(x-1\right)\sin x$**.**

Задание 9. Решить систему ДУ:

$$\begin{cases} \dot{x}=-x+2y \\ \dot{y}=2x-y \end{cases}.$$

Решение

Воспользуемся методом исключения. Продифференцировав первое уравнение по t, получим

$$\ddot{x}=-\dot{x}+2\dot{y},$$

где, заменив $\dot{y}$ из второго уравнения системы, будем иметь

$$\ddot{x}=-\dot{x}+4x-2y.$$

Для исключения y выразим его из первого уравнения

$$y=\frac{\dot{x}+x}{2}.$$

Окончательно получим

$$\ddot{x}=-\dot{x}+4x-\dot{x}-x \Leftrightarrow \ddot{x}+2\dot{x}-3x=0.$$

Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Для его решения найдем корни соответствующего характеристического уравнения:

$$\lambda^2+2\lambda-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda=1 \\ \lambda=-3 \end{array}\right..$$

Следовательно,

$$x=C_1e^t+C_2e^{-3t}, \text{ а } \dot{x}=C_1e^t-3C_2e^{-3t}.$$

Тогда

$$y=\frac{\dot{x}+x}{2}=\frac{C_1e^t-3C_2e^{-3t}+C_1e^t+C_2e^{-3t}}{2}=C_1e^t-C_2e^{-3t}.$$

Таким образом, решение системы

$$\begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{-3t} \\ y=C_1e^t-C_2e^{-3t} \end{cases}.$$

Ответ. $\begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{-3t} \\ y=C_1e^t-C_2e^{-3t} \end{cases}$**.**

Литература

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. − М., Наука, 1998.
2. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. Части 1 и 2. – Мн, Выш. шк., 1985-1992 г.
3. Горбузов В.Н., Павлючик П.Б. Математический анализ: неопределенный интеграл. − Гродно, ГрГУ, 2000.
4. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 2. / Под редакцией А.П. Рябушко. – Мн, Выш. шк., 2000.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. − М., Высш. шк., 1997.
6. Гурский Е.И. Руководство к решению задач по высшей математике. Части 1 и 2., − Мн., Выш. шк., 1989, 1990.
7. Тузик А.И. Интегрирование функций одной и нескольких переменных. − Брест, БГТУ, 2000.
8. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике. Части 1 и 2. − Мн., Выш. шк., 1988.
9. Дадаян А.А., Дударенко В.А. Математический анализ. – Мн., Выш. шк.,1990.
10. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений. − Мн., Выш. шк., 1973.
11. Гусак А.А., Гусак Г.М., Бричикова Е.А. Справочник по высшей математике. – Мн.: ТетраСистемс, 1999.

Содержание

Учебное издание

Гладкий Иван Иванович
Денисович Ольга Константиновна
Лизунова Ирина Владимировна
Маньяков Николай Владимирович

Интегралы. Дифференциальные уравнения. Кратные и криволинейные интегралы

Методические указания по дисциплине
«Высшая математика»
для студентов технических специальностей

Редактор **Строкач Т.В.**
Ответственный за выпуск: **Гладкий И.И.**
Технический редактор: **Никитчик А.Д.**
Корректор: **Никитчик Е.В.**

Подписано в печать 04.11.2004 г. Формат $60 \times 84\ {}^{1}\!/_{16}$.
Бумага писч. Усл. п.л. 4,0. Уч. изд.л. 4,25. Тираж 200 экз. Заказ № 1088.

Отпечатано на ризографе
УО «Брестский государственный технический университет»
224017, Брест, ул. Московская, 267.