АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ В МАТЕМАТИКЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

УДК 517.8

О ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ НЕКОТОРЫХ ДИСКРЕТНЫХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Антоник И.А., Гладкий И.И., Липовцев А.П., Каримова Т.И.
Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Махнист Л.П., к.т.н., доцент

В работе представлен общий подход к вычислению некоторых числовых характеристик распределений дискретных случайных величин. В частности, рассмотрены геометрическое, биномиальное распределения и распределение Пуассона (например, в [1]).

В работе [2] рассмотрены взаимосвязи между начальными, центральными и соответствующими факториальными моментами случайных величин, способы вычисления одних моментов, используя другие, и вычисление моментов случайных величин, используя числа Стирлинга первого и второго рода.

Геометрическим называют распределение дискретной случайной величины X, принимающей целые неотрицательные значения $k = 0,1,2,\ldots$ с вероятностями $P(X = k) = p_k = p(1-p)^k = pq^k$, где $0 < p < 1$ – параметр геометрического распределения ($q = 1 - p$).

Пуассона распределение – распределение вероятностей случайной величины X, принимающей целые неотрицательные значения $k = 0,1,2,\ldots$ с вероятностями $P(X = k) = p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, где $\lambda > 0$ – параметр.

Биномиальным (*распределением Бернулли*) называют распределение вероятностей случайной величины X, принимающей целочисленные значения $k = 0,1,2,\ldots,n$ с вероятностями соответственно

$$P(X = k) = p_k(n,p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальный коэффициент, $0 \le p \le 1$ – параметр биномиального распределения ($q = 1 - p$), называемый вероятностью положительного исхода.

Моментом n-го порядка ($n = 0,1,2,\ldots$) случайной величины X относительно числа a называется математическое ожидание $M\left((X-a)^n\right)$.

Начальным моментом n-го порядка ($n = 0,1,2,\ldots$) случайной величины X относительно числа a называется $\alpha_n = M\left(X^n\right)$. Заметим, что $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = M(X)$.

Центральным моментом n-го порядка ($n = 0,1,2,\ldots$) случайной величины X (относительно центра распределения, т.е. числа $a = M(X)$), называется $\mu_n = M\left(\left(X - M(X)\right)^n\right)$. Очевидно, что $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = D(X)$.

Факториальным моментом n-го порядка ($n=0,1,2,\ldots$) случайной величины X относительно числа a называется математическое ожидание $M\left((X-a)(X-a-1)\ldots(X-a-n+1)\right)$.

Начальным факториальным моментом n-го порядка ($n=0,1,2,\ldots$) случайной величины X относительно числа a называется $\alpha_{[n]}=M\left(X^{[n]}\right)=$. $=M\left(X(X-1)\ldots(X-n+1)\right)$ Заметим, что $\alpha_{[0]}=1$, $\alpha_{[1]}=M(X)$.

Центральным факториальным моментом n-го порядка ($n=0,1,2,\ldots$) случайной величины X (относительно центра распределения, т.е. числа $a=M(X)$) называется $\mu_{[n]}=M\left(\left(X-M(X)\right)^{[n]}\right)=M\left(\left(X-M(X)\right)\left(X-M(X)-1\right)\ldots\left(X-M(X)-n+1\right)\right)$. Заметим, что $\mu_{[0]}=1$, $\mu_{[1]}=0$, $\mu_{[2]}=D(X)$.

Начальные факториальные моменты *n*-го порядка $\alpha_{[n]}$ могут быть найдены по формулам: $\alpha_{[n]}=n!q^n p^{-n}$ для геометрического распределения [3], $\alpha_{[n]}=\lambda^n$ для распределения Пуассона [4], $\alpha_{[m]}=n^{[m]}p^m$ для биномиального распределения [5].

Начальные моменты *n*-го порядка α_n случайной величины связаны с ее начальными факториальными моментами соотношением [2]

$$\alpha_n=\sum_{m=1}^{n}S_m^{(n)}\alpha_{[m]}, \tag{1}$$

где коэффициенты $S_m^{(n)}$ – числа Стирлинга второго рода. Тогда для геометрического распределения получим формулу $\alpha_n=\sum_{m=1}^{n}\alpha_m^{(n)}q^m p^{-m}$, где коэффициенты $\alpha_m^{(n)}=S_m^{(n)}m!$ (последовательность A019538 в OEIS (англ. On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, Энциклопедия целочисленных последовательностей)) и могут быть получены с помощью рекуррентной формулы $\alpha_m^{(n)}=m\left(\alpha_{m-1}^{(n-1)}+\alpha_m^{(n-1)}\right)$, полагая $\alpha_m^{(n)}=0$, если $m<1$ или $m>n$. Для распределения Пуассона формула (1) примет вид $\alpha_n=\sum_{m=1}^{n}S_m^{(n)}\lambda^m$. Используя формулу (1), начальные моменты *n*-го порядка биномиального распределения могут быть вычислены так: $\alpha_1=\alpha_{[1]}=np$ – математическое ожидание,

$\alpha_2=\alpha_{[2]}+\alpha_{[1]}=n(n-1)p^2+np$,

$\alpha_3=\alpha_{[3]}+3\alpha_{[2]}+\alpha_{[1]}=n(n-1)(n-2)p^3+3n(n-1)p^2+np$ и т.д.

Центральные моменты *n*-го порядка случайной величины X связаны с ее начальными моментами соотношением [2]

$$\mu_n=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m\alpha_{n-m}\alpha_1^m. \tag{2}$$

Тогда для геометрического распределения формула (2) примет вид $\mu_n = \sum_{m=1}^{n} \mu_m^{(n)} \frac{q^m}{p^m}$, где коэффициенты $\mu_m^{(n)}$ определяются соотношением $\mu_m^{(n)} = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j C_n^j S_{m-j}^{(n-j)} (m-j)!$ [3]. Центральный момент *n*-го порядка распределения Пуассона, с учетом формулы (2), можно найти по формуле $\mu_n = \lambda \sum_{i=0}^{n-2} C_{n-1}^i \mu_i$. Для биномиального распределения получим:

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = -np^2 + np = np(-p+1);$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3 = np\left(2p^2 - 3p + 1\right);$$

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4 = \left(3n^2 - 6n\right)\left(p^4 - 2p^3 + p^2\right) - np^2 + np \text{ и т.д.}$$

Список цитированных источников

1. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 1999. – 576с.
2. Зеневич, Е.А. Моменты распределения вероятностей / Е.А. Зеневич, Н.В. Фомина (научные руководители: Л.П. Махнист, Т.И. Каримова) Сборник конкурсных научных работ студентов и магистрантов: в 2 ч. – Брест: Из-во БрГТУ, 2012. – Ч. 1. – С. 68–72.
3. О моментах геометрического распределения / Л.П. Махнист [и др.] // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии: сб. материалов регион. нау.-практ. конф., Брест, 18-19 октября 2012 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина; под общ. ред. О.В. Матысика. – Брест, 2012. – С.108–110.
4. Антоник, И.А. О моментах распределения Пуассона / И.А. Антоник (Научные руководители: к.т.н., доцент Л.П. Махнист, доцент И.И. Гладкий) // Сборник конкурсных научных работ студентов и магистрантов: в 2 ч. – Брест: Издательство БрГТУ, 2013. – Ч. 1. – С. 47–50.
5. Липовцев А.П. О моментах биномиального распределения / А.П. Липовцев (научные руководители: Л.П. Махнист, Т.И. Каримова) // Сборник конкурсных научных работ студентов и магистрантов: в 2 ч. – Брест: Издательство БрГТУ, 2013. – Ч. 1. – С. 71–74.

УДК 517. 538.52 + 517. 538.53

ОБ ОДНОМ ПРИЛОЖЕНИИ МЕТОДА ПЕРЕВАЛА

Астафьева А.В.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, г. Гомель

Научный руководитель: Старовойтов А.П., д. ф.-м. н., доцент

Рассмотрим набор

$$f_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^i, \quad j = 1, 2, \ldots, k \qquad (1)$$

голоморфных в нуле функций или формальных степенных рядов. Зафиксируем произвольные целые неотрицательные числа $n, m_1, m_2, \ldots, m_k$. По определению полагаем $m = \sum_{i=1}^{k} m_i$, $n_j = n + m - m_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Известно (см. [1]), что при $j = 1, 2, \ldots, k$ существуют такие многочлены $Q_m(z)$, $P_{n_j}^j(z)$, $deg\, Q_m \le m$, $deg\, P_{n_j}^j \le n_j$, для которых

$$R_{n,m}^j(z) = Q_m(z) f_j(z) - P_{n_j}^j(z) = A_j z^{n+m+1} + \ldots \qquad (2)$$