Тогда для геометрического распределения формула (2) примет вид $\mu_n = \sum_{m=1}^{n} \mu_m^{(n)} \frac{q^m}{p^m}$, где коэффициенты $\mu_m^{(n)}$ определяются соотношением $\mu_m^{(n)} = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j C_n^j S_{m-j}^{(n-j)} (m-j)!$ [3]. Центральный момент *n*-го порядка распределения Пуассона, с учетом формулы (2), можно найти по формуле $\mu_n = \lambda \sum_{i=0}^{n-2} C_{n-1}^{i} \mu_i$. Для биномиального распределения получим:

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = -np^2 + np = np(-p+1);$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3 = np\left(2p^2 - 3p + 1\right);$$

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4 = \left(3n^2 - 6n\right)\left(p^4 - 2p^3 + p^2\right) - np^2 + np \text{ и т.д.}$$

Список цитированных источников

1. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 1999. – 576с.
2. Зеневич, Е.А. Моменты распределения вероятностей / Е.А. Зеневич, Н.В. Фомина (научные руководители: Л.П. Махнист, Т.И. Каримова) Сборник конкурсных научных работ студентов и магистрантов: в 2 ч. – Брест: Из-во БрГТУ, 2012. – Ч. 1. – С. 68–72.
3. О моментах геометрического распределения / Л.П. Махнист [и др.] // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии: сб. материалов регион. нау.-практ. конф., Брест, 18-19 октября 2012 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина; под общ. ред. О.В. Матысика. – Брест, 2012. – С.108–110.
4. Антоник, И.А. О моментах распределения Пуассона / И.А. Антоник (Научные руководители: к.т.н., доцент Л.П. Махнист, доцент И.И. Гладкий) // Сборник конкурсных научных работ студентов и магистрантов: в 2 ч. – Брест: Издательство БрГТУ, 2013. – Ч. 1. – С. 47–50.
5. Липовцев А.П. О моментах биномиального распределения / А.П. Липовцев (научные руководители: Л.П. Махнист, Т.И. Каримова) // Сборник конкурсных научных работ студентов и магистрантов: в 2 ч. – Брест: Издательство БрГТУ, 2013. – Ч. 1. – С. 71–74.

УДК 517. 538.52 + 517. 538.53

ОБ ОДНОМ ПРИЛОЖЕНИИ МЕТОДА ПЕРЕВАЛА

Астафьева А.В.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, г. Гомель

Научный руководитель: Старовойтов А.П., д. ф.-м. н., доцент

Рассмотрим набор

$$f_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^i, \ \ j = 1, 2, \ldots, k \qquad (1)$$

голоморфных в нуле функций или формальных степенных рядов. Зафиксируем произвольные целые неотрицательные числа $n, m_1, m_2, \ldots, m_k$. По определению полагаем $m = \sum_{i=1}^{k} m_i$, $n_j = n + m - m_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Известно (см. [1]), что при $j = 1, 2, \ldots, k$ существуют такие многочлены $Q_m(z)$, $P_{n_j}^j(z)$, $deg\, Q_m \le m$, $deg\, P_{n_j}^j \le n_j$, для которых

$$R_{n,m}^j(z) = Q_m(z) f_j(z) - P_{n_j}^j(z) = A_j z^{n+m+1} + \ldots . \qquad (2)$$

Дроби $\pi_{n,m}^{j}(z)=\pi_{n_j,m}^{j}(z;f_j)=P_{n_j}^{j}(z)/Q_m(z),\quad j=1,2,..,k$ определяются условиями (2), вообще говоря, не однозначно. В случае единственности множества $\{\pi_{n,m}^{j}\}_{j=1}^{k}$, его элементы называют аппроксимациями Эрмита-Паде для системы функций (1).

Следующая теорема показывает способ применения метода перевала к исследования аппроксимаций Эрмита-Паде.

Теорема. *Пусть* $\left\{e^{(a+ib)z},e^{(a-ib)z}\right\}$ *– набор из экспонент с действительными числами* a, b, *для которых выполнено неравенство* $a^2/b^2+b^2/a^2-14<0$, *а* $\left\{\pi_{n_1,m}{}^{1}(z,e^{(a+ib)\xi}),\pi_{n_2,m}{}^{2}(z,e^{(a-ib)\xi}\right\}$ *– соответствующие этому набору аппроксимации Эрмита-Паде. Тогда, если* $m_1=m_2=n$, $n_1=n_2=2n$, *для любого комплексного числа* z, *при* $n\to+\infty$

$$e^{(a+ib)z}-\pi_{2n,m}{}^{1}(z,e^{(a+ib)\xi})=\frac{2z^{3n+1}}{(3n)!(2b^2+4iab-a^2)n}(ab)^{n+1}\times(2b+ia)^{n+1}e^{5az/2}(1+O(1)),$$

$$e^{(a-ib)z}-\pi_{2n,m}{}^{2}(z,e^{(a-ib)\xi})=\frac{2(-1)^{n+1}z^{3n+1}}{(3n)!(2b^2+4iab-a^2)n}(ab)^{n+1}\times(2b+ia)^{n+1}e^{5az/2}(1+O(1)).$$

Идея доказательства. Из хорошо известного факта в теории приближения получим

$$R_{n,2n}{}^{1}(z)=\frac{e^{(a+ib)z}z^{3n+1}}{(3n)!}\int_0^{a+ib}x^n(x-a-ib)^n(x-a+ib)^n e^{-zx}dx.$$

В этом интеграле разобьем кривую интегрирования на два участка, вследствие чего получим

$$R_{n,2n}{}^{1}(z)=\frac{e^{(a+ib)z}z^{3n+1}}{(3n)!}\Big(\int_0^{ib}x^n(x-a-ib)^n(x-a+ib)^n e^{-zx}dx+$$

$$+\int_{ib}^{a+ib}x^n(x-a-ib)^n(x-a+ib)^n e^{-zx}dx\Big). \qquad (3)$$

Введем новые обозначения

$$I_1^{1}(z)=\int_0^{ib}x^n(x-a-ib)^n(x-a+ib)^n e^{-zx}dx, \qquad (4)$$

$$I_2{}^{1}(z)=\int_{ib}^{a+ib}x^n(x-a-ib)^n(x-a+ib)^n e^{-zx}dx. \qquad (5)$$

Рассмотрим интеграл (4) и найдем его асимптотику с помощью метода перевала [3]. Для этого преобразуем данный интеграл к следующему виду

$$I_1^{1}(z)=\int_0^{ib}e^{-zx}e^{nLn(x(x-a-ib)(x-a+ib))}dx.$$

Интегрирование будем проводить по кривой $\gamma_1=\{z=iy:y\in[0,b]\}$, обозначим $S_1(z)=Ln(z(z-a-ib)(z-a+ib))$. Точка, в которой достигается $\max_{\gamma_1}\operatorname{Re}S_1(z)$, если выполнено ограничение на a, b из условия теоремы, находится на конце кривой интегрирования $z=ib$. Тогда применяя теорему о методе перевала в данном случае [3, теорема 1, стр. 414], получим

$$I_1^1(z) = \frac{(ab)^{n+1}(ia+2b)^{n+1}}{(2b^2+4aib-a^2)n} e^{-ibz}(1+O(1)). \qquad (6)$$

Асимптотика интеграла (5) находится аналогично. И пользуясь тем фактом, что $Q_n(z) = e^{-2z/3}(1+O(1))$, получаем первое равенство теоремы.

Перейдем к доказательству второго равенство теоремы. Рассмотрим

$$R_{n,2n}{}^2(z) = \frac{e^{(a-ib)z} z^{3n+1}}{(3n)!} \int_0^{a-ib} x^n (x-a-ib)^n (x-a+ib)^n e^{-zx} dx.$$

Преобразуем данный интеграл

$$R_{n,2n}{}^2(z) = \frac{e^{(a-ib)z} z^{3n+1}}{(3n)!} \Big(\int_0^{-ib} x^n (x-a-ib)^n (x-a+ib)^n e^{-zx} dx +$$

$$+ \int_{-ib}^{a-ib} x^n (x-a-ib)^n (x-a+ib)^n e^{-zx} dx \Big).$$

Для определения интегралов, входящих в последнее равенство, поступаем аналогично первому случаю. И получаем требуемые теоремой равенства.

Список цитированных источников

1. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит.,1988. -256с.
2. Сидоров, Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного: учеб. для вузов. – 3-е изд. / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин – М.: Наука, 1989. – 480 с.

УДК 519.853.3

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПРЯМОГО ОПОРНОГО МЕТОДА ДЛЯ МИНИМИЗАЦИИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Бруцкий В.Р., Мокин А.А.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Научный руководитель: Ракецкий В.М., к.ф.-м.н., доцент

1. Введение. Целью настоящей работы является экспериментальное исследование прямого опорного метода для минимизации выпуклых функций [1]. В качестве объекта для проведения численного эксперимента рассматривается задача безусловной оптимизации

$$f(x) \to min, x \in R^n, \qquad (1)$$

где $f(x)$ – дважды дифференцируемая сильно выпуклая функция, т.е. в задаче (1) всегда существует единственное решение x^* – точка минимума функции $f(x)$, которая удовлетворяет необходимым и достаточным условиям оптимальности

$$\Delta_j(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = 0, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

2. Алгоритм прямого опорного метода. Пусть $\{x, J_{оц}\}$ опорный план [1] задачи (1), известный к началу итерации, ε – заданная точность выполнения условий оптимальности (2), η – параметр метода, гарантирующий монотонное убывание целевой функции от итерации к итерации. Предположим, что опора целевой функции $J_{оц}$ состоит из индексов $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$, множество неопорных индексов $J_н$ состоит из индексов $\{j_1, j_2, \dots, j_{n-m}\}$, j_k –