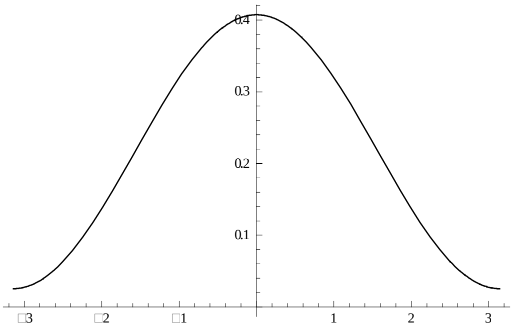
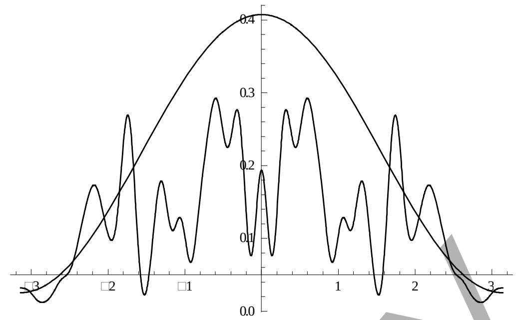


Теоретическая плотность



Расширенная периодограмма, построенная по непересекающимся интервалам наблюдений и теоретическая спектральная плотность

Рисунок 2б – Результаты для процесса, реализованного на рисунке 1б

Требуются дополнительные исследования по выбору ширины спектрального окна и количеству интервалов осреднения в зависимости от длины реализации случайного процесса, так как очевидно, данные параметры существенно влияют на качество оценки.

С помощью разработанных алгоритмов можно легко анализировать различные данные в виде эргодических стационарных случайных процессов, что является актуальным для решения задачи анализа данных в автоматизированном режиме для производственных предприятий.

Список цитированных источников

1. Волков, И.К. Случайные процессы: учеб. для вузов / И.К. Волков, С.М. Зуев, Г.М. Цветкова; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 448 с.
2. Труш, Н.Н. Случайные процессы. Преобразование Фурье наблюдений: учеб. пособие / Н.Н. Труш, Е. И. Мирская. – Минск: БГУ, 2000. – 60 с.
3. Труш, Н.Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов / Н.Н. Труш. – Мн.: БГУ, 1999. – 218 с.

УДК 519.6+517.983

СЛУЧАЙ ПРИБЛИЖЕННО ЗАДАННОГО ОПЕРАТОРА В НЕЯВНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Викторович Л.В.
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест
Научный руководитель: Матысик О.В., к. ф.-м. н., доцент

В действительном гильбертовом пространстве *H* решается операторное уравнение первого рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где *A* – ограниченный положительный самосопряженный оператор. Предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора *A*, но не является его собственным значением, т.е. рассматриваемая задача неустойчива и, значит, некорректна. Будем искать решение уравнения (1), используя неявную схему метода итераций, которая при приближенной правой части уравнения (1) y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ имеет вид

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha\left(Ax_{n+1,\delta} - y_\delta\right), \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим случай, когда счёт ведется по методу (2) не с оператором *A*, а с оператором A_h, $\|A - A_h\| \le h$. Введем погрешность $\eta_n = u_n - x_{n,\delta}$, где

$$(E+\alpha A_h)u_{n+1}=u_n+\alpha y_\delta, \quad u_0=0. \tag{3}$$

Из (3) следует

$$(E+\alpha A_h)\eta_{n+1}=\eta_n+\alpha Bx_{n+1}, \tag{4}$$

где $B=A-A_h$, $\|B\|\le h$, $\eta_0=0$.

По индукции нетрудно показать, что $\eta_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(E+\alpha A_h)^{-(k+1)}\alpha Bx_{n-k}$.

Так как $\|x_n\|=\left\|A^{-1}\left[E-(E+\alpha A)^{-n}\right]y\right\|\le n\alpha\|y\|$, то $\|x_{n-k}\|\le(n-k)\alpha\|y\|$.

Для оценки $\left\|(E+\alpha A_h)^{-(k+1)}\right\|$ потребуем, чтобы пространство H было сепарабельным и оператор A_h сокоммутировал с A, тогда [1, с. 388] он является функцией оператора A, т. е. $A_h=\int\limits_0^M\varphi(\lambda)\,dE_\lambda$, $M=\|A\|$ и спектральная функция у этих операторов одна и та же. Следовательно, $\|A-A_h\| =\max\limits_{[0,M]}|\lambda-\varphi(\lambda)|\le h$, так что

$$\left\|(E+\alpha A_h)^{-(k+1)}\right\|=\max_{[0,M]}\frac{1}{|1+\alpha\varphi(\lambda)|^{k+1}}\le\max_{[0,M]}\frac{1}{|1+\alpha(\lambda-h)|^{k+1}}\le\frac{1}{|1-\alpha h|^{k+1}}.$$

Таким образом, считая $\alpha h<1$, имеем $\|\eta_n\|\le\alpha^2h\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{(1-\alpha h)^{k+1}}\|y\|$.

Нетрудно доказать, что $\alpha^2h\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{(1-\alpha h)^{k+1}}\|y\|=h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^n}-n\alpha h-1\right]\|y\|$.

В результате получена оценка погрешности метода итераций (2)

$$\|\eta_n\|\le h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^n}-n\alpha h-1\right]\|y\|. \tag{5}$$

Покажем, что полученная оценка имеет порядок $O(h)$.

$$h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^n}-n\alpha h-1\right]\|y\|=h^{-1}\left[\frac{1-n\alpha h(1-\alpha h)^n-(1-\alpha h)^n}{(1-\alpha h)^n}\right]\|y\|=$$

$$=\frac{h^{-1}\left[1-n\alpha h\left(1-n\alpha h+\frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2h^2-\ldots\right)-1+n\alpha h-\frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2h^2+\ldots\right]}{(1-\alpha h)^n}\|y\|=$$

$$=h^{-1}\frac{\left[n^2\alpha^2h^2-\frac{n^2(n-1)}{2!}\alpha^3h^3-\ldots-\frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2h^2+\ldots\right]}{(1-\alpha h)^n}\|y\|.$$

Знаменатель имеет порядок $O(1)$, а числитель $O(h)$, поэтому правая часть в (5) имеет порядок $O(h)$.

Общая оценка погрешности неявного итерационного метода (2) с учетом неточности в правой части уравнения линейного операторного уравнения (1) и погрешности в операторе имеет вид

$$\|x-u_{n,\delta}\| \le \|x-x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta}-u_{n,\delta}\| \le s^s(2n\alpha)^{-s}\|z\| + n\alpha\delta +$$

$$h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^n} - n\alpha h - 1\right]\|y_\delta\|.$$

Список цитированных источников

1. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

УДК 519.6

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ НЕЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С ПРИБЛИЖЁННО ЗАДАННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Гиль Д.В.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Научный руководитель: Савчук В.Ф., к. ф.-м. н., доцент

Пусть H и F – гильбертовы пространства и A – линейный непрерывный оператор, действующий из H в F. Предполагается, что нуль не является его собственным значением, однако принадлежит его спектру. Решается уравнение

$$A_\eta x = y_\delta,$$

где $\|A - A_\eta\| \le \eta$ и $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Предположим, что точное решение уравнения существует и является единственным. Будем искать его с помощью неявного итерационного метода

$$(E + \alpha A_\eta^k)x_{n+1} = x_n + \alpha A_\eta^{k-1} y_\delta,\ x_0 = 0, k \in N. \quad (1)$$

Пусть $H = F$, $A = A^* \ge 0$, $A_\eta = A_\eta^* \ge 0$, $S_p(A_\eta) \le [0, M]$, $0 < \eta < \eta_0$. Тогда итерационный метод (1) запишется в виде

$$x_n = g_n(A_\eta)y_\delta,$$

где $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \frac{1}{(1+\alpha\lambda^k)^n}\right] \ge 0$. Причем $g_n(\lambda)$ удовлетворяет условиям

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |g_n(\lambda)| \le \gamma n^{1/k},\ (n>0),\ \gamma = k\alpha^{1/k}, \quad (2)$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \lambda^s|1-\lambda g_n(\lambda)| \le \gamma_s n^{-s/k},\ (n>0),\ \gamma_s = \left(\frac{s}{2k\alpha}\right)^{s/k}, \quad (3)$$

(здесь s – степень истокопредставимости точного решения $x = A^s z$, $s > 0$, $\|z\| \le \rho$).

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |1-\lambda g_n(\lambda)| \le \gamma_0,\ \gamma_0 = 1,\ (n>0). \quad (4)$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \lambda|1-\lambda g_n(\lambda)| \to 0,\ n\to\infty. \quad (5)$$