Министерство образования Республики Беларусь

Брестский государственный технический университет

Кафедра высшей математики

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Методические указания по дисциплине
”Высшая математика”
для студентов технических специальностей

Брест 2000

УДК 517.331+517.445
Г52

Брестский государственный технический университет
Кафедра высшей математики

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом
Брестского государственного технического университета

А в т о р ы:
Гладкий И.И., ассистент
Сидоревич М.П., к.ф.-м.н., доцент
Тузик Т.А., доцент

Р е ц е н з е н т:
Савчук В.Ф., к.ф.-м.н.,
зав. кафедрой алгебры и геометрии
Брестского государственного университета

Г52 **Гладкий И.И., Сидоревич М.П., Тузик Т.А.** Элементы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления: методические указания для студентов технических специальностей. – Брест, Изд. БГТУ, – 2000. – 88с.

Содержится необходимый теоретический и практический материал для проведения практических занятий по дисциплине |”Высшая математика” для студентов технических специальностей дневной и заочной формы обучения. Данное пособие может быть использовано для самостоятельного изучения данного курса.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

1. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1.1. МНОЖЕСТВА C, $\overline{\mathrm{C}}$. СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

Обычное собственно комплексное число обозначают z. Алгебраическая форма его записи имеет вид $z = x + i\,y$, где

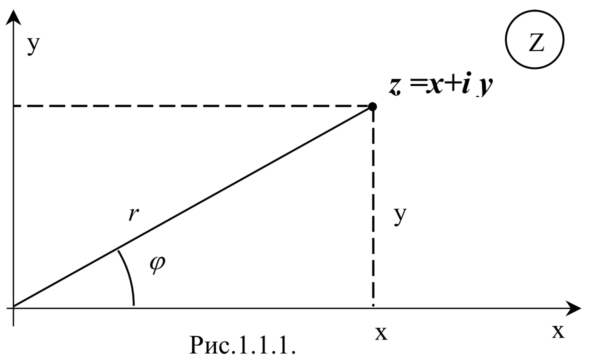


Рис.1.1.1.

$$x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z,\ i = \sqrt{-1}.$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\varphi = \arg z,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$$

или

$$-\pi \le \varphi < \pi,$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r}.$$

Тригонометрическая форма записи комплексного числа

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Показательная форма записи

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = |z| \cdot e^{i\varphi}.$$

Множество всех собственно комплексных чисел обозначают C. К этим числам добавляется несобственное (бесконечное) комплексное число, называемое бесконечно удаленной точкой или ∞. Чтобы получить геометрическое изображение числа ∞, устанавливают соответствие между точками M сферы и точками z комплексной плоскости.

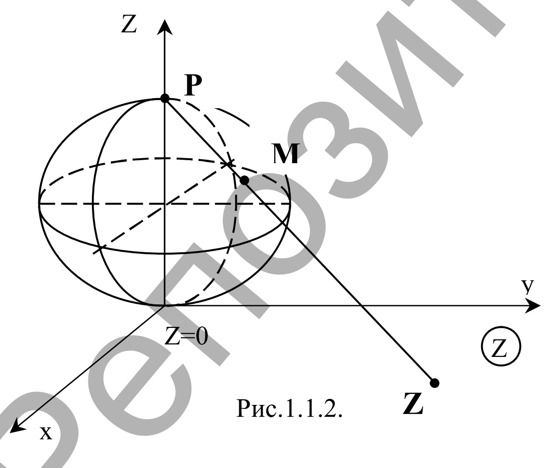


Рис.1.1.2.

т. P – полюс,

Из т. $M \in$ сфере, проводим луч PM до пересечения с плоскостью z.

Таким образом, $(\forall M \in \text{сфере}) \Leftrightarrow (z \in \text{плоскости})$.

Это соответствие называется стереографической проекцией. При таком соответствии сфера без точки P изображает множество всех собственно комплексных чисел. Возьмем последовательность $z_n \to \infty$, тогда соответствующая последовательность точек M_n сферы будет стремится к т. P. Поэтому точка P изображает бесконечно удаленную точку на сфере, а ей соответствующая точка плоскости (единственная) называется **бесконечно удаленной**.

Множество всех комплексных чисел, включая и бесконечно удаленную точку, обозначается $\overline{C}$ и называется расширенной комплексной плоскостью.

Если $x = x(t)$ и $y = y(t)$, $t \in T$ – непрерывные или непрерывно дифференцируемые функции действительного аргумента t, то $z = x(t) + i\,y(t)$ определяет в $\overline{C}$ непрерывную кривую γ. Этот факт будем записывать в виде:

$$\gamma:\ z = x(t) + i\,y(t).$$

Пример. Определить вид кривой $z = 3 \cdot e^{it} - e^{-it}$, $t \in R$.

$$z = 3 \cdot e^{it} - e^{-it} = 3 \cdot (\cos t + i \sin t) - (\cos t - i \sin t) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 4\sin t. \end{cases} \ t \in R \Rightarrow \ \frac{x}{2} = \cos t, \frac{y}{4} = \sin t \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Значит, γ – эллипс.

1.2. ОКРЕСТНОСТИ, ОБЛАСТИ, ИХ ГРАНИЦЫ

Уравнение $|z - z_0| = R$ определяет на плоскости (z) окружность с центром в т. z_0 радиуса R.

Множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \varepsilon$, называется **ε – окрестностью точки** z_0 и обозначается $U_\varepsilon(z_0)$. Рассмотрим некоторое множество $D \subset C$.

Точка z_0 называется **внутренней точкой** множества D, если существует окрестность т. z_0 из точек, целиком принадлежащих D.

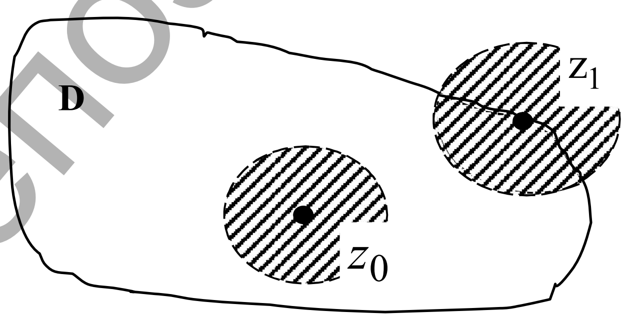


Рис.1.2.1.

Точка z_1 называется **граничной точкой** множества D, если в любой ее окрестности есть точки как принадлежащие D, так и не принадлежащие ей.

Множество всех граничных точек для D образует ее границу L.

Областью называется множество $D \subset \overline{C}$, обладающее свойствами:

1. открытости: D состоит из внутренних точек;
2. связности: любые две точки D можно соединить непрерывной линией 1, состоящей из точек $\in D$.

Множество, состоящее из области D и ее границы L, называется **замкнутой областью**: $\overline{D} = D \cup L$. Область n – связна, если ее граница состоит из n непересекающихся кусков.

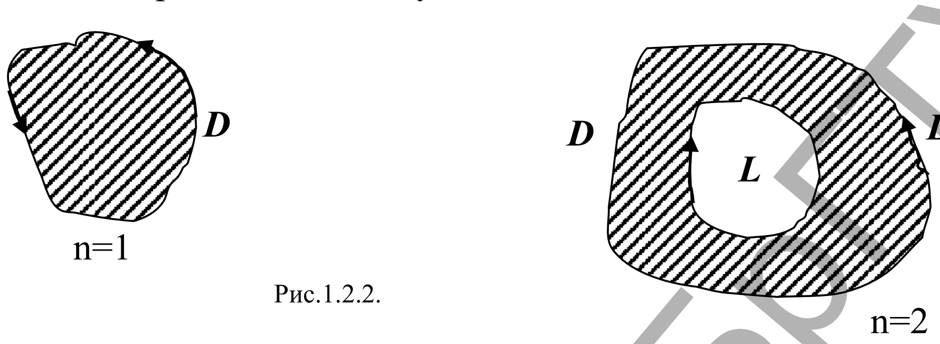


Рис.1.2.2.

Замечание. Если $\mathbf{L = L_1 \cup L_2}$ – граница области D, то обход по L совершают так, чтобы область D была слева.

Окрестностью бесконечно удаленной точки называется множество, удовлетворяющее неравенству $|z| > R$.

1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ $f(z)$, ПРЕДЕЛА И НЕПРЕРЫВНОСТИ

Даны две области D и $E \subset \overline{C}$.
Если каждому значению $z \in D$ ставится в соответствие значение $w \in E$ (одно или несколько), то говорят, что w – **функция от** z, т.е. $w = f(z)$ (однозначная или многозначная).

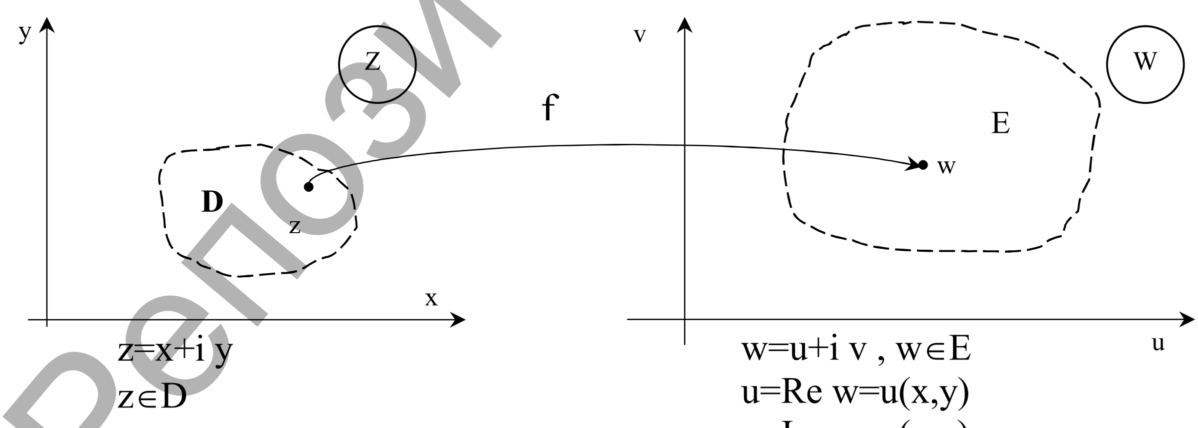


Рис.1.3.1.

В случае многозначной функции множество E состоит из нескольких комплексных плоскостей (или их частей), которые образуют так называемую риманову поверхность.

Пример. Функция $w = z^2 = (x + i\,y)^2 = (x^2 - y^2) + i\,2xy$ – однозначная в $\overline{C}$.

Функция $w = \sqrt{z+1} + \sqrt{z-1}$ – четырехзначная:

$$\text{при } z = 0 \quad w(0) = \sqrt{1} + \sqrt{-1} = \{1+i,\ 1-i,\ -1+i,\ -1-i\}.$$

Пусть $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ определена в $\overset{o}{U}(z_0) = U(z_0) \setminus z_0$

Число A называется **пределом** $f(z)$ при $z \to z_0$, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что если $0 < |z - z_0| < \delta$, то $|f(z) - A| < \varepsilon$.

Записывают: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A = a + i\,b$. (1.3.1)

Из этого равенства (1.3.1) следует, что $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = a$ и $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = b$.

Геометрическое толкование равенства (1.3.1): окрестность $\overset{0}{U}_\delta(z_0)$ плоскости z отображается на окрестность $U_\varepsilon(A)$ плоскости w.

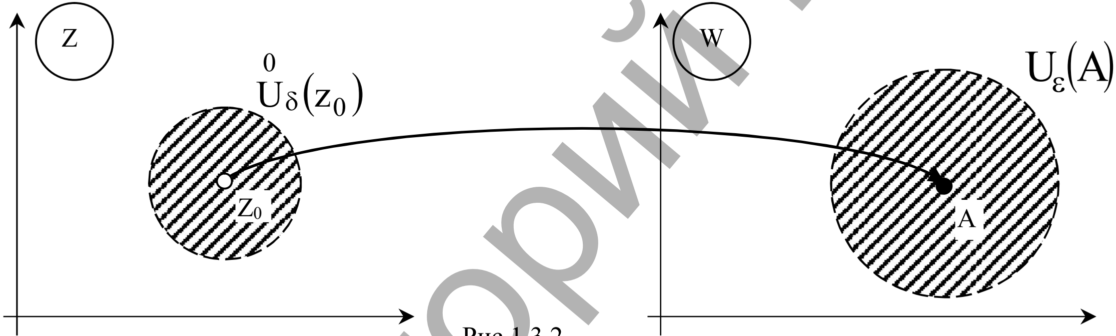


Рис.1.3.2.

Функция $f(z)$ называется **непрерывной в точке** z_0, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \qquad (1.3.2)$$

Из (1.3.2) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0)$ и $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0)$.

Из (1.3.2) следует, что непрерывная функция отображает бесконечно малые элементы на бесконечно малые.

Функции $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ – действительные функции двух независимых переменных x и y.

Из равенств (1.3.1) и (1.3.2) следует, что вся теория пределов, непрерывности действительных функций переносится на функцию комплексного переменного.

1.4 ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1) **Степенная функция** $w = z^n$, $n \in N$ однозначная, непрерывная для $\forall z \in \overline{C}$.

2) **Показательная функция** $w = e^z = \exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$, $|w| = e^x$, $\arg w = y$, определена и непрерывна для $\forall z \in \overline{C}$. Обладает всеми свойствами действительной показательной функции, имеет период $T = 2\pi i$, т.е. $\exp(z + 2\pi i) = \exp z$.

3) **Тригонометрические функции** $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ – определены, непрерывны для $\forall z \in \overline{C}$, периодические с периодом $T = 2\pi$. Легко проверить следующие равенства

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2,$$

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z,$$

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z.$$

Функции $w = \sin z$, $w = \cos z$ не являются ограниченными, т.е.

$$|\sin z| \le 1 \text{ или } |\sin z| > 1, \ |\cos z| \le 1 \text{ или } |\cos z| > 1.$$

4) **Гиперболические функции** $\mathrm{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\mathrm{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$. Имеют место такие соотношения (проверьте их!)

$$\mathrm{sh}\, z = -i \sin(iz), \qquad \mathrm{ch}\, z = \cos(iz),$$

$$\sin z = \sin x \cdot \mathrm{ch}\, y + i \cos x \cdot \mathrm{sh}\, y,$$

$$\cos z = \cos x \,\mathrm{ch}\, y - i \sin x \,\mathrm{sh}\, y,$$

$$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \mathrm{th}\, z = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}, \quad \mathrm{cth}\, z = \frac{\mathrm{ch}\, z}{\mathrm{sh}\, z}.$$

5) **Логарифмическая функция** $w = \mathrm{Ln}\, z$ вводится как обратная к показательной функции $z = e^w$:

$$z = |z| e^{i\varphi} = e^{u + iv} \Rightarrow u - ?, \ v - ?$$

$|z|\cdot e^{i\varphi}=e^{u}e^{iv}\Rightarrow|z|=e^{u}$, $u=\ln|z|$ – действительная функция. Т.к. аргументы равных комплексных чисел отличаются на $2k\pi$, то

$$v=\varphi+2k\pi=\arg z+2k\pi,\ k\in Z.$$

Следовательно,

$$\boxed{\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\arg z+i2k\pi,\quad k\in Z.}$$

Эта функция бесконечнозначная, определена и непрерывна для $\forall z\in C$, кроме $z=0$.

6) **Общая степенная функция** $w=z^{\alpha}=e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$.

7) **Общая показательная функция** $w=a^{z}=e^{z\operatorname{Ln} a}$.

8) **Обратные тригонометрические функции** $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$ определяются как обратные к функциям $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$.

Например, пусть $w=\operatorname{Arcsin} z$, тогда $z=\sin w$

$$z=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i},\qquad e^{iw}-e^{-iw}=2iz,$$

$$e^{2iw}-2ize^{iw}-1=0,\qquad e^{iw}=iz+\sqrt{-z^2+1}$$

$$iw=\operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)$$

$$\boxed{w=\operatorname{Arcsin} z=-i\operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right).}$$

Аналогично рассуждая, получим (проверьте!)

$$\boxed{\operatorname{Arccos} z=-i\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),}$$

$$\boxed{\operatorname{Arctg} z=\frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz},}$$

$$\boxed{\operatorname{Arcctg} z=-\frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{iz-1}.}$$

Пример 1. Вычислить $\mathrm{Arcsin}\,i$.

$$\mathrm{Arcsin}\,i = -i\,\mathrm{Ln}\left(i^2 + \sqrt{1-i^2}\right) = -i\,\mathrm{Ln}\left(-1+\sqrt{2}\right).$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{2\left(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi\right)} = \sqrt{2}\left(\cos k\pi + i\sin k\pi\right), \qquad k = 0;1$$

$$\left(\sqrt{2}\right)_1 = \sqrt{2}, \qquad \left(\sqrt{2}\right)_2 = -\sqrt{2}$$

$$\left(\mathrm{Arcsin}\,i\right)_1 = -i\,\mathrm{Ln}\left(\sqrt{2}-1\right) = -i\left(\ln\left(\sqrt{2}-1\right) + i\arg\left(\sqrt{2}-1\right) + 2k\pi i\right) =$$

$$= -i\left(\ln\left(\sqrt{2}-1\right) + 2k\pi i\right) - 2k\pi - i\ln\left(\sqrt{2}-1\right) \approx 2k\pi - i\,0{,}88, \qquad k \in Z.$$

$$\left(\mathrm{Arcsin}\,i\right)_2 = -i\,\mathrm{Ln}\left(-1-\sqrt{2}\right) = -i\left(\ln\left(\sqrt{2}+1\right) + i\arg\left(-1-\sqrt{2}\right) + 2k\pi i\right) =$$

$$= -i\left(\ln\left(\sqrt{2}+1\right) + i\pi + 2k\pi i\right) = \pi(1+2k) - i\ln\left(1+\sqrt{2}\right), \qquad k \in Z$$

$$\arcsin i = \begin{cases} -i\ln\left(\sqrt{2}-1\right), \\ \pi - i\ln\left(\sqrt{2}+1\right). \end{cases}$$

Пример 2. Вычислить $\mathrm{Arsh}\,i$.

$$\mathrm{Arsh}\,i = \mathrm{Ln}\left(i + \sqrt{i^2+1}\right) = \mathrm{Ln}\,i = \ln 1 + i\arg i + i\,2k\pi = i\frac{\pi}{2} + i2k\pi =$$

$$= i\left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi, \qquad k \in Z$$

$$\mathrm{arsh}\ i = \frac{\pi}{2}\,i.$$

2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

2.1. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ $w = f(z)$. *АНАЛИТИЧНОСТЬ* $f(z)$

Пусть функция $w = f(z)$ однозначно определена для $\forall z \in D \subset \overline{C}$.

Определение. Если при $\forall \Delta z \to 0$ существует конечный предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z), \qquad (2.1.1)$$

то он называется **производной функции** $f(z)$ в точке z, а функция дифференцируемой в т. z.

Из дифференцируемости функции $f(z)$ в т. z следует ее непрерывность в этой точке.

Так как приращение Δz стремится к 0 произвольным образом, т. е. точка $z + \Delta z \to z$ по произвольной непрерывной линии, лежащей в D, то условие дифференцируемости функции $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ накладывает на функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ определенные требования.

Теорема. Если функция $f(z)$ в т. z дифференцируема, то функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют в точке (x, y) частные производные первого порядка, удовлетворяющие условиям

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (2.1.2)$$

Условия (2.1.2) называются условиями Коши-Римана.

Доказательство.
Т.к. $f(z)$ дифференцируема в т. z, то предел (2.1.1) не зависит от способа стремления Δz к 0.

А)

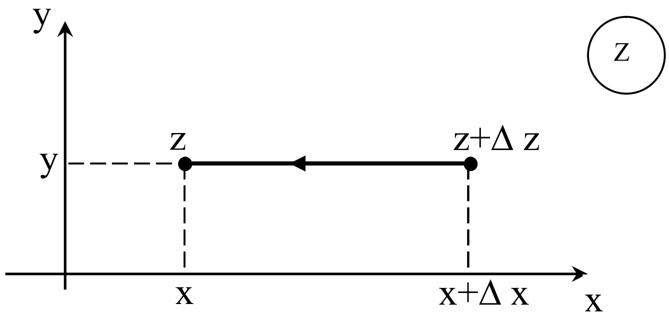


Рис.2.1.1.

Пусть

$$z + \Delta z = (x + \Delta x) + i\,y$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x,\ y) + i\,v(x + \Delta x,\ y) - u(x, y) - i\,v(x, y)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x,\ y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x,\ y) - v(x, y)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i\,\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \qquad (2.1.3)$$

В)

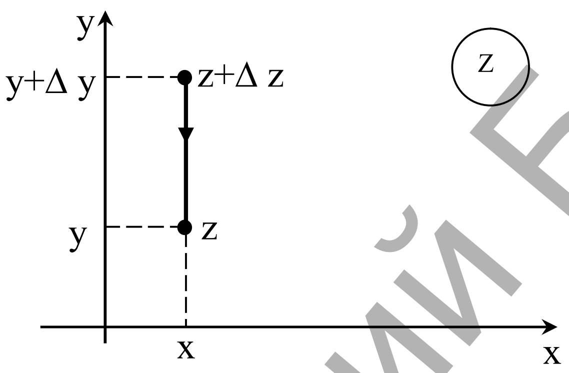


Рис.2.1.2.

Пусть

$$z + \Delta z = x + i(y + \Delta y)$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) + i\,v(x, y + \Delta y) - u(x, y) - i\,v(x, y)}{i\,\Delta y} =$$

$$= \frac{1}{i} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} =$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - i\,\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}. \qquad (2.1.4)$$

Т. к. $f'(z)$ существует, то из (2.1.3) и (2.1.4) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}} \text{ и } \boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}},$$

т. е. условия Коши-Римана (2.1.2).

Доказано, что условия (2.1.2) Коши-Римана являются и достаточными для дифференцируемости $f(z)$.

Функция $f(z)$, дифференцируемая в т. z и некоторой её окрестности, называется аналитической в этой точке.

Если $f(z)$ – аналитическая в $\forall z \in D$, то она аналитическая в области D. Для того чтобы $f(z)$ была **аналитической** в области D, необходимо и достаточно существование в D непрерывных частных производных от функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, удовлетворяющих условиям Коши-Римана.

При выполнении условий (2.1.2) **производная** $f'(z)$ находится по одной из четырех формул:

$$f'(z) = u'_x + i\,v'_y = v'_y - i\,u'_y = v'_y + i\,v'_x = u'_x - i\,u'_y.$$

Пример. Доказать, что $f(z) = z^2$ аналитическая $\forall z \in C$ и найти $f'(z)$.

$$f(z) = z^2 = (x + i\,y)^2 = \left(x^2 - y^2\right) + 2\,i\,x\,y$$

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \qquad v(x,y) = 2\,x\,y,$$

$$\begin{array}{lll} u'_x = 2\,x, & v'_x = 2\,y & \\ u'_y = -2\,y, & v'_y = 2\,x & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} u'_x = v'_y, & u'_y = -v'_x \\ 2x = 2x, & -2y = -2y, \quad \forall z \in C \end{array}$$

Тогда

$$f(z) = u'_x - i\,u'_y = 2x + 2\,i\,y = 2(x + i\,y) = 2z$$

$$\left(z^2\right)' = 2z.$$

Для аналитической функции справедливы **основные правила** дифференцирования и таблица производных:

1. $(\alpha_1 f_1(z) \pm \alpha_2 f_2(z))' = \alpha_1 f_1'(z) \pm \alpha_2 f_2'(z), \qquad \alpha_1, \alpha_2$ - const,

2. $(f_1(z) \cdot f_2(z))' = f_1'(z) f_2(z) + f_1(z) f_2'(z),$

2. $\left(\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}\right)' = \dfrac{f_1'(z) f_2(z) - f_1(z) f_2'(z)}{f_2^2(z)}, \qquad f_2(z) \neq 0.$

4. $F(z) = \varphi(f(z))$, f и φ – аналитические функции, то

$$F'(z) = \varphi'(w) \cdot w' = \varphi'(w) f'(z).$$

5. $(\cos z)' = -\sin z,$

6. $(\sin z)' = \cos z,$

7. $\left(z^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot z^{\alpha-1}, \qquad \alpha \in C,$

8. $(\operatorname{tg} z)' = \sec^2 z,$

9. $(\operatorname{arctg} z)' = \dfrac{1}{1+z^2},$

10. $\left(a^z\right)' = a^z \ln a$ и т. д.

Замечание. Если

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z| e^{i\varphi} = r e^{i\varphi}$$

и

$$f(z) = u(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi) + i\,v(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi),$$

то условия (2.1.2) Коши-Римана имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)}{\partial \varphi}, \\ \dfrac{\partial v(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)}{\partial \varphi} \end{cases} \tag{2.1.5}$$

и производная $f'(z)$ может быть записана так

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\,\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right).$$

Пример. Показать, что $w = \operatorname{Ln} z$ аналитическая для $\forall z, z \in C$, кроме $z = 0$ и найти w'.

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi),\ u(r,\varphi) = \ln r,$$

$$v(r,\varphi) = \varphi + 2k\pi, \qquad u'_r = \frac{1}{r}, \quad u'_\varphi = 0, \quad v'_r = 0, \quad v'_\varphi = 1.$$

$$\left.\begin{aligned} u'_r = \frac{1}{r}v'_\varphi \to \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\cdot 1 \\ v'_r = -\frac{1}{r}u'_\varphi \to 0 = -\frac{1}{r}\cdot 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{Ln} z = \frac{r}{z}\left(\frac{1}{r} + i0\right)$$

$$(\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}, \qquad z \neq 0.$$

2.2. СОПРЯЖЁННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Дана аналитическая функция $w = u(x, y) + i\,v(x, y)$, где

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2.2.1)$$

Легко видеть, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ будут гармоническими. Действительно,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x} = 0, \qquad \Delta u = 0,$$

u – гармоническая функция.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = 0, \qquad \Delta v = 0,$$

v – гармоническая функция.

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ – оператор Лапласа (лапласиан).}$$

Гармонические функции u и v, удовлетворяющие условиям Коши-Римана называются **сопряжёнными.**

Доказано, что зная одну из сопряжённых гармонических функций, можно найти другую гармоническую функцию так, чтобы $w = u + iv$ была аналитической.

Пусть известна $u = u(x, y)$, надо найти $v = v(x, y)$.

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = \left|\text{ из условий } (2.2.1)\right| = -\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

$$\boxed{v = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u'_y(x, y)dx + u'_x(x, y)dy} \qquad (2.2.2)$$

Аналогично, если известна $v = v(x, y)$, то $u = u(x, y)$

$$\boxed{u = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v'_y(x, y)dx - v'_x(x, y)dy} \qquad (2.2.3)$$

В формулах (2.2.2) и (2.2.3) (x_0, y_0) и (x, y) – соответственно фиксированная и переменная точки области D, где $w = f(z)$ аналитическая.

Пример. Проверить, что функция $u = x^2 - y^2 + 3x - 2y$ является действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$ и найти $f(z)$.

Составим оператор Лапласа Δu.

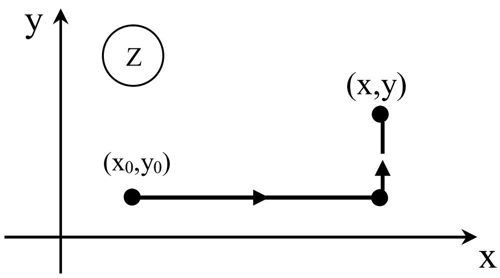


Рис.2.2.1.

$u'_x = 2x + 3$, $u''_{xx} = 2$, $u'_y = -2y - 2$,

$u''_{yy} = -2$.

$\Delta u = 2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow$

$u = u(x, y)$ – гармоническая функция.

$$v = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u'_y(x, y)dx + u'_x(x, y)dy = \int_{x_0}^{x} -u'_y(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} u'_x(x, y)dy.$$

$$v = \int_{x_0}^{x} (2y_0 + 2)dx + \int_{y_0}^{y} (2x + 3)dy = (2y_0 + 2)x\Big|_{x_0}^{x} + (2x + 3)y\Big|_{y_0}^{y} =$$

$$= (2y_0 + 2)(x - x_0) + (2x + 3)(y - y_0) =$$

$$= 2xy_0 + 2x - 2y_0x_0 - 2x_0 + 2xy - 2xy_0 + 3y - 3y_0 = 2xy + 2x + 3y + c.$$

$$v = 2xy + 2x + 3y + c,$$

$$c = -2x_0y_0 - 2x_0 - 3y_0.$$

$$w = u + iv = x^2 - y^2 + 3x - 2y + i(2xy + 2x + 3y + c) =$$

$$= x^2 + 2ixy + (iy)^2 + 3(x + iy) + i(2x + 2iy) + ic = z^2 + 3z + 2iz + ic =$$

$$= z^2 + (3 + 2i)z + ic = f(z).$$

Полезно знать, что

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \qquad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}),$$

$$z = x + iy, \qquad \bar{z} = x - iy.$$

2.3. ПОНЯТИЕ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в точке z_0, причем $f'(z_0) \neq 0$. Тогда $\left|f'(z_0)\right|$ равен коэффициенту растяжения в точке z_0 при отображении $w = f(z)$ плоскости z на плоскость w. Если $\left|f'(z_0)\right| > 1$, то имеет место растяжение, а при $\left|f'(z_0)\right| < 1$ – сжатие. В этом и состоит геометрический смысл модуля производной.

Аргумент производной $f'(z_0)$ геометрически равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к гладкой кривой γ на плоскости z, проходящей через точку z_0, чтобы получить направление касательной в точке $w_0 = f(z_0)$ к образу Γ этой кривой на плоскости w при отображении $w = f(z)$. При этом, если $\varphi = \arg f'(z_0) > 0$, то поворот происходит против часовой стрелки, а при $\varphi < 0$ – по часовой.

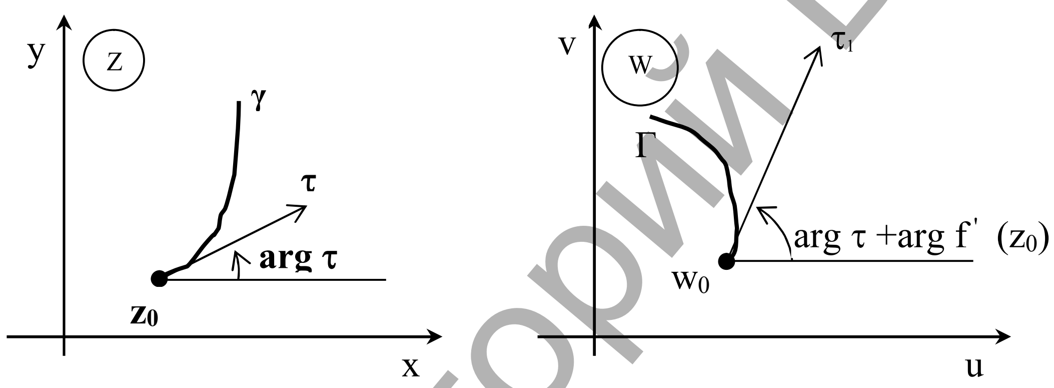


Рис.2.3.1.

Определение. Непрерывное отображение, обладающее (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) свойством сохранения углов (с сохранением направления отсчета) и свойством постоянства растяжений, называется **конформным отображением**.

Справедливо утверждение: отображение с помощью аналитической функции $w = f(z)$ является конформным во всех точках, где $f'(z) \neq 0$.

Пример. Найти коэффициент растяжения k и угол поворота φ при отображении $w = z^3$ в точке $z_0 = 2 - i$.

Имеем

$$w' = 3z^2 = 3(x + iy)^2 = 3\left(x^2 - y^2\right) + i\,6xy.$$

Для точки z_0

$$k = \left|w'(z_0)\right| = |9 - 12i| = \sqrt{81 + 144} = 15,$$

$$\varphi = \arg w(z_0) = -\operatorname{arctg}\frac{4}{3} = -53^0.$$

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО.

3.1. ИНТЕГРАЛ ОТ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ $f(z)$.

Пусть $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ – непрерывная для $\forall z\in D\subset C$, γ – гладкая ориентированная кривая, $\gamma=\cup AB$.

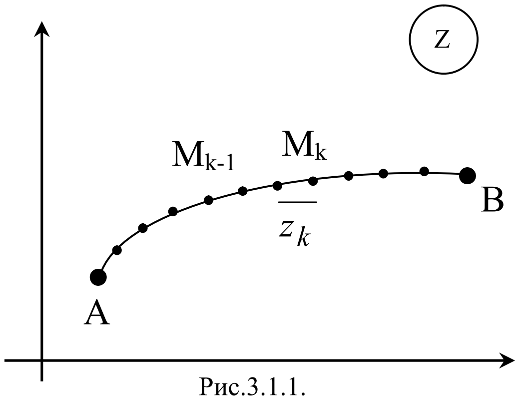


Рис.3.1.1.

Разобьем $\cup AB$ произвольно на n частей таких, что $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ и обозначим

$$\lambda = \max_{1\le k\le n} |z_k|.$$

Выберем произвольную точку $\overline{z_k}\in\cup M_{k-1}M_k$, вычислим значение функции $f\left(\overline{z_k}\right)$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\overline{z_k}\right)\Delta z_k .$$

Если существует конечный предел интегральной суммы при $\lambda\to 0$, независящий от выбора точки $\overline{z_k}$, $k=\overline{1,n}$, то он называется **интегралом функции** $f(z)$ по дуге γ.

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(\overline{z_k}\right)\Delta z_k = \int_{\gamma} f(z)dz \qquad (3.1.1)$$

Вычисление интеграла (3.1.1) сводится к вычислению двух криволинейных интегралов от действительных функций.
Если

$$f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)=u+i\,v,$$

$$d\,z=d(x+i\,y)=dx+i\,dy,$$

то

$$\int_{\gamma} f(z)dz=\int_{\gamma}(u+i\,v)(dx+i\,dy)=\int_{\gamma} u\,dx - v\,dy + i\int_{\gamma} v\,dx + u\,dy .$$

Интеграл (3.1.1) от функции комплексного переменного обладает свойствами криволинейного интеграла функции действительного переменного.

1. $\int\limits_{\gamma}\left(\alpha f_1(z) \pm \beta f_2(z)\right)dz = \alpha\int\limits_{\gamma} f_1(z)dz \pm \beta\int\limits_{\gamma} f_2(z)dz;$

где α, β - const.

2. $\int\limits_{AB} f(z)dz = -\int\limits_{BA} f(z)dz.$

3. Если

$$|f(z)| \le M, \qquad z \in \gamma, \qquad |dz| = d\gamma,$$

то

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)dz\right| \le \int\limits_{\gamma} |f(z)||dz| \le M \cdot \Gamma,$$

где $\Gamma =$ длина γ.

Для вычисления интеграла (3.1.1) необходимо знать подынтегральную функцию и уравнение линии γ.

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad \alpha \le t \le \beta,$$

$$z = z(t)$$

$$z = x(t) + i\,y(t)$$

$$\int\limits_{l} f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))\, z'(t)dt.$$

Пример. Вычислить $\int\limits_{\gamma} \bar{z}\,dz$ по отрезку, соединяющему точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 2 + 2i$.

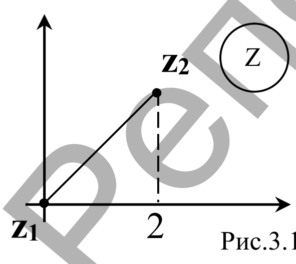


Рис.3.1.2.

$$y = x$$

$$z = x + i\,x \quad \Leftrightarrow \quad z = (1+i)x$$

$$0 \le x \le 2$$

$$\bar{z} = x - i\,y = x - i\,x = (1-i)x$$

$$dz = (1+i)dx.$$

$$\int\limits_{\gamma} \bar{z}\,dz = \int\limits_{0}^{2}(1-i)x(1+i)dx = 2\int\limits_{0}^{2} x\,dx = 2\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 4.$$

Пример. Вычислить $\int\limits_{\gamma} \overline{z+1-i}\,\operatorname{Re} z\,dz$, где γ – дуга параболы $y = 1 - x^2$ от $z_1 = -1$ до $z_2 = i$.

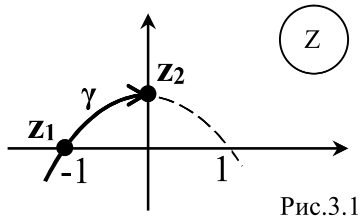


Рис.3.1.3.

$$\gamma : y = 1 - x^2$$

$$z = x + iy$$

$$z = x + i\left(1 - x^2\right)$$

$$-1 \le x \le 0$$

$$\operatorname{Re} z = x,$$

$$\overline{z+1-i} = \overline{x + i\left(1 - x^2\right) + 1 - i} = \overline{(x+1) + i\left(1 - x^2 - 1\right)} = (x+1) + i x^2,$$

$$dz = (1 - 2ix)\,dx.$$

$$I = \int\limits_{\gamma} \overline{z+1-i}\,\operatorname{Re} z\,dz = \int\limits_{-1}^{0} \left(x + 1 + i x^2\right) x\,(1 - 2ix)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} \left(x^2 + x + i x^3 - 2i x^3 - 2i x^2 - 2i^2 x^4\right) dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} \left(x^2 + x + 2x^4\right) dx + i \int\limits_{-1}^{0} \left(-x^3 - 2x^2\right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{5}x^5\right)\Bigg|_{-1}^{0} + i\left(-\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_{-1}^{0} =$$

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5}\right) + i\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5}\right) = \frac{7}{30} - \frac{5}{12} i.$$

3.2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА КОШИ ДЛЯ ОДНОСВЯЗНОЙ И МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Докажем теорему, играющую фундаментальную роль в теории функций комплексного переменного.

Теорема Коши. Если $f(z)$ – аналитическая в некоторой односвязной области D функция, то интеграл $\int f(z)\,dz$ по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру C, целиком лежащему в D, равен 0.

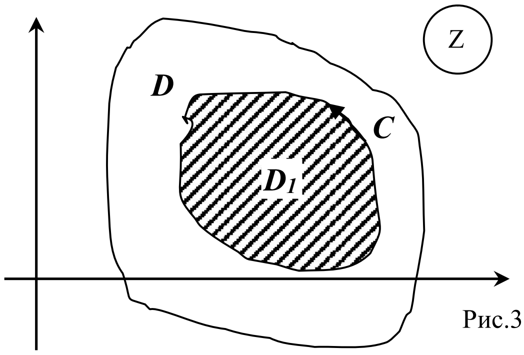


Рис.3.2.1.

$f(z)$ – аналитическая $\forall z \in D$,
$C \subset D$.

$$\oint_C f(z)\,dz = 0 \qquad (3.2.1)$$

Т. к. $f(z)$ – аналитическая в области D функция, то отсюда следует, что $f(z)$ и $f'(z)$ – непрерывны в D.

$$f(z) = u + i\,v \qquad и \qquad u'_x = v'_y \qquad и \qquad u'_y = -v'_x\,.$$

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C u\;dx - v\;dy + i\oint_C v\;dx + u\;dy$$

Применим формулу Грина, получим

$$\oiint_{D_1}\left(-v'_x - u'_y\right)dx\,dy + i\cdot\oiint_{D_1}\left(u'_x - v'_y\right)dx\,dy = 0 + i\,0 = 0.$$

Следствие 1. Если $f(z)$ – аналитическая в односвязной области D функция, то $\int_{AB} f(z)\,dz$ не зависит от пути, целиком лежащем в D и соединяющем т. A и т. B.

Пример. Вычислить $\int_\gamma z^2\,dz$, где γ – кривая, соединяющая точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + 3i$.

$f(z) = z^2$ – аналитическая для $\forall z \in C$. γ :отрезок прямой:

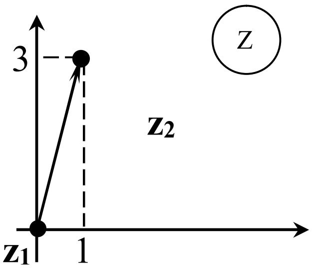


Рис.3.2.2.

$$\begin{cases} y = 3x, \\ z = x + i3x, \\ 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

$$\int\limits_{\gamma} z^2\, dz = \int\limits_0^1 (x + 3ix)^2 (1+3i)\, dx = (1+3i)^3 \int\limits_0^1 x^2\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}(1+3i)^3 = \frac{1 + 3\cdot 1\cdot 3i + 3\cdot 1\cdot (3i)^2 + (3i)^3}{3} = -\frac{26}{3} - 6i$$

Пусть область D – двусвязная и $f(z)$ – аналитична в D.

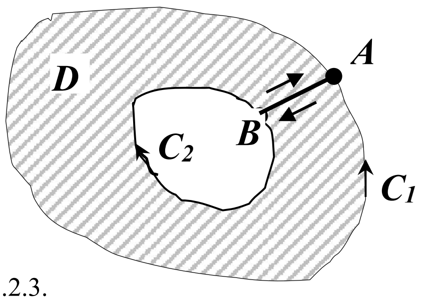


Рис.3.2.3.

Выберем $\forall$ т. A и B на границе D и проведем разрез AB. Область D превратится в односвязную.

$$C = C_1 \cup C_2$$

C – контур области D,

$$C = AB \cup BC_2B \cup BA \cup AC_1A$$

По теореме Коши:

$$\oint\limits_C f(z)\, dz = 0$$

$$\int\limits_{AB} f(z)\, dz + \int\limits_{BC_2B} f(z)\, dz + \int\limits_{BA} f(z)\, dz + \int\limits_{AC_1A} f(z)\, dz = 0.$$

$$\int\limits_{AB} f(z)\, dz = -\int\limits_{BA} f(z)\, dz$$

$$\oint\limits_{C_2} f(z)\, dz + \oint\limits_{C_1} f(z)\, dz = 0. \qquad (3.2.2)$$

(при обходе по контурам C_1 и C_2 область D находится слева).
Равенство (3.2.2) представляет теорему Коши для двусвязной области D.

Следствие 2. $\oint\limits_{C_1} f(z)\, dz = \oint\limits_{C_2} f(z)\, dz.$

(обход C_1 и C_2 положительный, т.е. против часовой стрелки)

Но, вообще говоря, эти интегралы $\neq 0$, т. к. внутри контура C_2 $f(z)$ может быть не аналитической.

Воспользуемся следствием 2 для вычисления интеграла $\oint\limits_C \frac{dz}{z-a}$, контур C – любая кривая, содержащая внутри т. $z = a$.

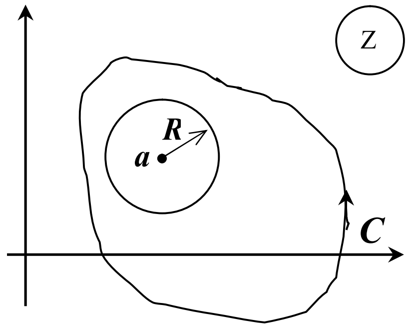


Рис.3.2.4.

Вместо контура C возьмем любой более простой контур, охватывающий т. $z = a$, например, окружность $|z-a| = R$.

$$\oint\limits_C \frac{dz}{z-a} = \oint\limits_{|z-a|=R} \frac{dz}{z-a} = \left| \begin{array}{l} |z-a| = R \\ z-a = R\,e^{i\varphi} \\ dz = R\,i\,e^{i\varphi}\,d\varphi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right| = \int\limits_0^{2\pi} \frac{R\,i\,e^{i\varphi}\,d\varphi}{R\,e^{i\varphi}} = 2\pi i.$$

Пусть D – $(n+1)$ – связная область с внешним контуром C и внутренними простыми контурами $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Теорема Коши для многосвязной области.
Если $f(z)$ аналитическая функция внутри $(n+1)$ – связной области D, то

$$\oint\limits_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{C_k} f(z)\,dz. \qquad (3.2.3)$$

Направление обхода всех контуров одно и то же (положительное).

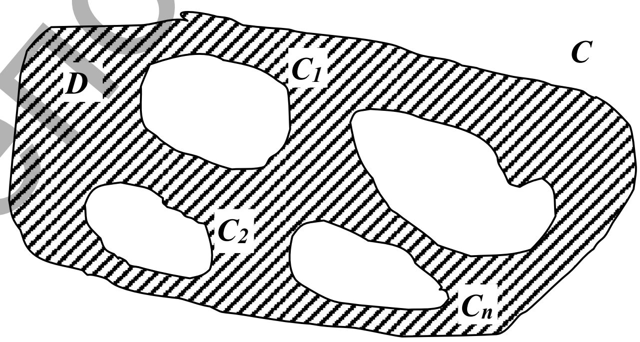


Рис.3.2.5.

3.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ОТ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Пусть $f(z)$ – аналитическая в односвязной области D функция, т. z_1 и $z_2 \in D$.

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz \quad \text{- не зависит от пути, соединяющего } z_1 \text{ и } z_2.$$

Обозначим

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = F(z).$$

$F(z)$ аналитическая в D функция и $F'(z) = f(z)$. Функцию $F(z)$ называют первообразной для $f(z)$. Совокупность всех первообразных для $f(z)$ называют **неопределенным интегралом**

$$\Phi(z) = F(z) + C = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz + C.$$

Для аналитических функций $f(z)$ справедлива формула

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0)$$

Отсюда следует, что интегралы от элементарных функций комплексного переменного вычисляются по тем же формулам, что и в обычном анализе.

$$\int \sin z\,dz = -\cos z + C,$$

$$\int e^z dz = e^z + C,$$

$$\int \frac{dz}{z} = \mathrm{Ln}z + C,$$

$$\int_0^{1+3i} z^2\,dz = \frac{1}{3}(1+3i)^3 = -\frac{26}{3} - 6i.$$

3.4. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ.

Пусть функция $f(z)$ аналитическая в замкнутой области $\overline{D} = D \cup C$. Тогда $\dfrac{f(z)}{z-a}$ – аналитическая всюду в D, кроме $z = a$.

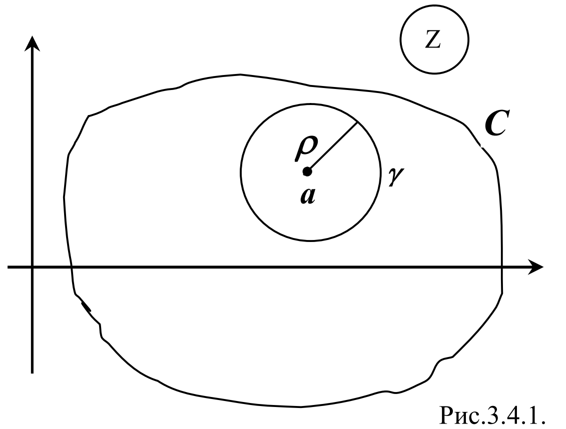


Рис.3.4.1.

Рассмотрим

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

Проведем окружность

$$\gamma : |z-a| = \rho.$$

Функция $\dfrac{f(z)}{z-a}$ будет аналитической в двусвязной области.

По следствию 2 имеем

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \oint_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz + f(a)\oint_\gamma \frac{dz}{z-a} =$$

$$= \oint_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz + 2\pi i \cdot f(a). \qquad (3.4.1)$$

Оценим первый интеграл. $f(z)$ – аналитическая и, следовательно, непрерывная в D функция.

Значит, если $z - a \to 0$, то $f(z) - f(a) \to 0$.

$$\gamma : |z-a| = \rho, \qquad \rho \to 0.$$

$$\left| \oint_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz \right| = \left| \begin{array}{c} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f(z)-f(a)}{\rho\, e^{i\varphi}}\, \rho\, i e^{i\varphi}\, d\varphi \\ z = a + \rho\, e^{i\varphi} \end{array} \right| \le$$

$$\le \int_0^{2\pi} \left| f(a+\rho\, e^{i\varphi}) - f(a) \right| \cdot d\varphi \le \left| f(a+\rho\, e^{i\varphi_1}) - f(a) \right| \cdot 2\pi \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0,$$

$$\varphi_1 \in (0,\ 2\pi)$$

Переходя к пределу при $\rho \to 0$ в равенстве (3.4.1), получим

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

Формула (3.4.2) называется **интегральной формулой Коши.** Обычно её записывают так: заменим z на t, а на z:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(t)}{t-z}\, dt = \begin{cases} f(z), & z \in D \\ 0, & z \overline{\in} D \end{cases}$$

$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(t)}{t-z}\, dt$ – интеграл Коши, $\frac{1}{t-z}$ – его ядро, $f(t)$ – плотность интеграла Коши.

Пример. Вычислить интеграл Коши

$$\oint\limits_C \frac{e^z}{z(z-i)}\, dz,$$

где C: $|z| = 0{,}5$.

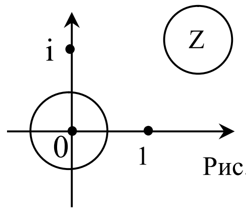


Рис.3.4.2.

Функция $f_1(z) = \frac{e^z}{z(z-i)}$ является аналитической внутри круга всюду, кроме $z = 0$. Представим её в виде $f_1(z) = \frac{f(z)}{z-0}$, где $f(z) = \frac{e^z}{z-i}$ – аналитическая для $\forall z : |z| \le 0{,}5$.

К функции $f_1(z)$ применим интегральную формулу Коши (3.4.2).

$$\oint\limits_C \frac{f(z)}{z}\, dz = 2\pi i \cdot f(0) = 2\pi i \cdot \frac{e^0}{0-i} = 2\pi i \cdot \frac{1}{-i} = -2\pi.$$

Доказано, что аналитическая в $\overline{D}$ функция $f(z)$, имеет в этой области производные всех порядков

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(t)}{t-z}\, dt}$$

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}\, dt}, \qquad n \ge 1. \qquad (3.4.3)$$

Из существования в некоторой области $f'(z)$ следует существование и аналитичность всех её производных $f^{(n)}(z)$. В этом существенное отличие между дифференцируемыми функциями $f(x),\ \ x \in R$ и $f(z),\ \ z \in \overline{C}$.

*Пример***.** Вычислить

$$\oint_C \frac{\sin z}{(z-i)^4}\, dz,$$

где $C: \left| z-i \right| = 1.$

Функция $\sin z$ аналитическая для z в круге $\left| z-i \right| \le 1.$

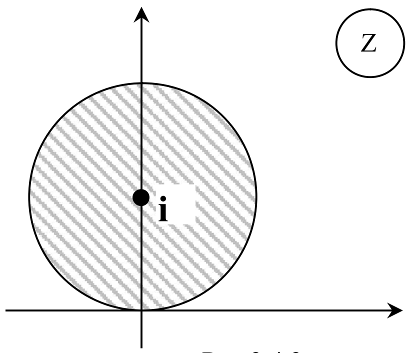


Рис.3.4.3.

$$\oint_C \frac{\sin z}{(z-i)^4} dz = \frac{2\pi i}{3!}(\sin z)'''_{z=i} =$$

$$= \frac{2\pi i}{3!}(\cos z)''_{z=i} = \frac{2\pi i}{3!}(-\sin z)'_{z=i} =$$

$$= -\frac{2\pi i}{3!}\cos i = -\frac{2\pi i}{3!} \cdot \frac{e^{i \cdot i} + e^{-i \cdot i}}{2} =$$

$$= -\frac{\pi i}{3}\frac{e^{-1} + e^{1}}{2} = -\frac{\pi i}{3}\operatorname{ch} 1.$$

3.5. ИНТЕГРАЛ ТИПА КОШИ.

Интегралом типа Коши называется интеграл вида:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(t)\, dt}{t-z} = F(z),$$

где γ – разомкнутый или замкнутый контур, $\varphi(t)$ – непрерывная функция, $t \in \gamma$, заданная только на контуре, $z \notin \gamma$.

Доказано, что $F(z)$

1. однозначная, аналитическая функция во всякой области D, не содержащей точек кривой γ.

2. производные $F(z)$ определяются по формуле

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(t)}{(t-z)^{n+1}} dt,\ n \ge 1.$$

4. РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Основные понятия для числовых рядов $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, где $c_n \in C$, и функциональных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z), z \in C$ (сходимости абсолютная и условная, равномерная сходимость, свойства равномерно сходящихся в некоторой области $D \in C$ рядов) вводятся аналогично соответствующим понятиям для рядов в действительной области.

4.1. РЯД ТЕЙЛОРА В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ.

Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (4.1.1)$$

является функцией аналитической в области $|z-a| < R$, где R – радиус сходимости. Чтобы найти эту область, составляем ряд из абсолютных величин членов ряда (4.1.1), к которому применяем признак Даламбера.

Пусть дана функция $f(z)$, аналитическая в области D, содержащей точку $z = a$. Пусть область D целиком содержится в $D_{1,}$ C – её граница,

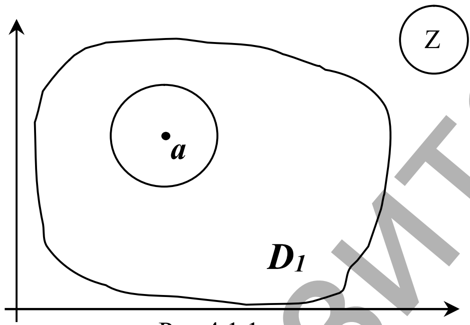


Рис.4.1.1.

$$C: |z-a| = r, \qquad D \cup C = \overline{D}.$$

Представим функцию $f(z)$ в виде степенного ряда в области $\overline{D}$. В этой области для аналитической функции $f(z)$ справедлива интегральная формула Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{t-z}\, dt, \qquad z \in \overline{D} \quad (4.1.2)$$

Преобразуем ядро интеграла Коши

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{(t-a)-(z-a)} = \frac{1}{(t-a)\left(1-\dfrac{z-a}{t-a}\right)} = \left| \begin{array}{l} \text{т.к. } t \in C, z \in D, \\ \text{то} \\ \left|\dfrac{z-a}{t-a}\right| = q < 1 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{t-a} \cdot \left(1 + \frac{z-a}{t-a} + \left(\frac{z-a}{t-a}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{z-a}{t-a}\right)^n + \ldots\right) \qquad (4.1.3)$$

Ряд (4.1.3) по переменной t сходится равномерно на окружности C, т.к. для него при фиксированном $z \in D$ существует мажорантный ряд

$$1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots=\frac{1}{1-q}.$$

Подставим разложение (4.1.3) в формулу (4.1.2)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{t-a}\left(1+\frac{z-a}{t-a}+\left(\frac{z-a}{t-a}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z-a}{t-a}\right)^n+\ldots\right)dt.$$

Равномерно сходящийся по t функциональный ряд можно почленно интегрировать.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{t-a}dt+\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t-a)^2}dt\cdot(z-a)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t-a)^3}dt\cdot(z-a)^2+\ldots+\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt\cdot(z-a)^n+\ldots \qquad (4.1.4)$$

Обозначим коэффициенты полученного ряда

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}\,dt, \qquad n=0,1,2,\ldots,$$

Из формул (3.4.3) следует, что $c_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Подставим выражения для коэффициентов в разложение (4.1.4), получим ряд Тейлора для функции $f(z)$ в окрестности точки $z=a$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{(n)} \qquad (4.1.5)$$

Функция $f(z)$ называется *аналитической*, если её можно представить рядом Тейлора.

4.2. РЯД ЛОРАНА В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ.

Обобщением ряда Тейлора является ряд Лорана. Если функция $f(z)$ аналитическая в кольце $r<|z-a|<R,\ 0<r<R,$ то она раскладывается в сходящийся ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n, \tag{4.2.1}$$

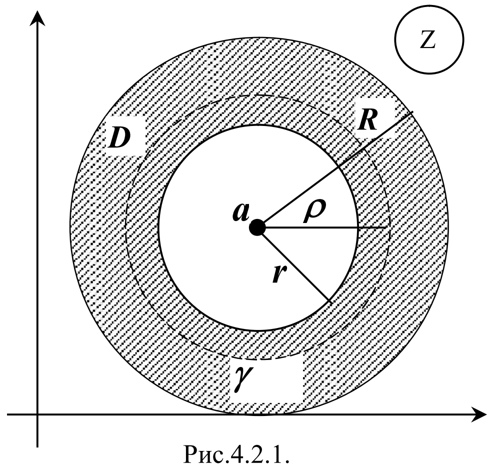


Рис.4.2.1.

где

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt,\qquad n=0,1,2,...$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}f(t)\cdot(t-a)^{n-1}\,dt,\qquad n=1,2,3,...$$

где $\gamma:\ |z-a|=\rho,\quad r<\rho<R.$

Ряд (4.2.1) называется *рядом Лорана* для функции $f(z)$ в кольце.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ – его *правильная* (регулярная) часть, сходящаяся при

$$|z-a|<R.$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ – *главная* часть ряда Лорана, сходящаяся при z, у которых

$$|z-a|>r.$$

Практически разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана иногда можно получать проще, используя так называемые основные разложения.

Примеры.

1. Функция

$$f(z)=\frac{1+z}{z^2+3z-4}=\frac{1+z}{(z+4)(z-1)}$$

аналитическая всюду, где $z\neq-4$ и $z\neq1$.

Составим различные её лорановские разложения.

а) Составим разложение этой функции в ряд Лорана в кольце $1<|z|<4$. Представим $f(z)$ в виде суммы двух функций, одна из которых аналитична в области $|z|<4$, а другая – в области $|z|>1$. Легко проверить, что справедливо разложение

$$\frac{1+z}{(z+4)(z-1)}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{z+4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{z-1}$$

Функцию $\frac{1}{z+4}$ раскладываем по положительным степеням z в ряд

$$\frac{1}{z+4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{4}}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{4^2}-\frac{z^3}{4^3}+...\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{4^{n+1}},$$

который сходится при $\left|\frac{z}{4}\right|<1$ или $|z|<4$.

Функцию $\frac{1}{z-1}$ раскладываем в ряд по отрицательным степеням z

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+...+\frac{1}{z^{n-1}}+...\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

сходящийся при $\left|\frac{1}{z}\right|<1$ или $|z|>1$.

Итак,

$$\frac{1+z}{(z+4)(z-1)}=\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{4^{n+1}}+\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}},\quad 1<|z|<4.$$

б) Разложим $f(z)$ в ряд, сходящийся в области $|z|<1$, для этого функции $\frac{1}{z+4}$ и $\frac{1}{z-1}$ раскладываем в ряд по положительным степеням z

$$f(z)=\frac{z+1}{z^2+3z-4}=\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{4^{n+1}}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1-z}=$$

$$=\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{4^{n+1}}-\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3\cdot(-1)^n}{4^{n+1}}-2\right)z^n,\quad |z|<1.$$

в) Разложение $f(z)$ в области $|z|>4$.

Функции $\frac{1}{z+4}$ и $\frac{1}{z-1}$ раскладываем в ряд по отрицательным степеням z

$$f(z)=\frac{z+1}{z^2+3z-4}=\frac{3}{5z}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{z}}+\frac{2}{5z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{3}{5z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{z^n}+\frac{2}{5z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=$$

$$=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(3\cdot(-1)^n\cdot 4^n+2\right)\cdot\frac{1}{z^{n+1}},\qquad |z|>4.$$

г) Разложение $f(z)$ в окрестности точки $z=1$.

$$f(z)=\frac{z+1}{(z+4)(z-1)}=\frac{(z-1)+2}{(z-1)(z-1+5)}=\frac{1}{5\left(1+\frac{z-1}{5}\right)}+\frac{2}{5(z-1)}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{5}}=$$

$$=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{5}\right)^n+\frac{2}{5(z-1)}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{5}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{5^n}+\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{n-1}}{5^n}.$$

Полученный ряд сходится, если $\left|\frac{z-1}{5}\right|<1$ или $|z-1|<5$, $z\neq 1$.

Аналогично можно получить разложение $f(z)$ в ряд в области $|z+4|<5$.

Пример 2.

Функция $f(z)=e^{1/z}$ аналитическая всюду, где $z\neq 0$. Её разложение в ряд имеет вид

$$e^{1/z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\ldots+\frac{1}{n!\,z^n}+\ldots,\qquad |z|>0.$$

Ряд Лорана функции $f(z)$, аналитической в области $0<|z|<R$, имеет вид

$$f(z)=\ldots+\frac{c_{-n}}{z^n}+\frac{c_{-n+1}}{z^{n-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z}+c_0+c_1z+\ldots+c_nz^n+\ldots \qquad (4.2.2)$$

Ряд Лорана для функции $f(z)$, аналитической в окрестности $z=\infty$ или $R<|z|<\infty$,

$$f(z)=c_0+c_1z+\ldots+c_nz^n+\ldots+\frac{c_{-1}}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\ldots+\frac{c_{-n}}{z^n}+\ldots \qquad (4.2.3)$$

В ряду (4.2.3) $c_0+c_1z+\ldots+c_nz^n+\ldots$ – является *главной* частью, а правильная часть – это сумма

$$\frac{c_{-1}}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\ldots+\frac{c_{-n}}{z^n}+\ldots$$

Точка, в которой функция $f(z)$ аналитична, называется *правильной точкой* функции. Если же функция $f(z)$ аналитична в некоторой проколотой окрестности точки $z=a$ и не определена или неаналитична в самой точке $z=a$, то $z=a$ называется *особой точкой* функции $f(z)$.

4.3. НУЛИ И ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ.

Нулём аналитической функции $f(z)$ называется такая точка $z=a$, в которой $f(a)=0$.

Если

$$f(a)=f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(k-1)}(a)=0, \qquad f^{(k)}(a)\neq 0,$$

то точка $z=a$ – нуль k-ого порядка функции $f(z)$.

Разложение функции $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности такой точки $z=a$ имеет вид

$$f(z)=c_k(z-a)^k+c_{k+1}(z-a)^{k+1}+\ldots=(z-a)^k\varphi(z),$$

причём $\varphi(a)\neq 0$.

Точка $z=a$, в которой нарушается аналитичность $f(z)$ называется особой; если в окрестности $z=a$ нет других особых точек функции $f(z)$, то $z=a$ – изолированная особая точка функции.

Особая точка $z=a$ является *устранимой особой точкой* функции $f(z)$, если

$$\lim_{z\to a} f(z)=c_0.$$

В ряду Лорана для функции $f(z)$ нет главной части, т.е. членов с отрицательными степенями $(z-a)$.

Например, для $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ точка $z=0$ – устранимая особая; так как

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1, \qquad \frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\ldots.$$

Особая точка $z=a$ является *полюсом* функции $f(z)$, если

$$\lim_{z\to a} f(z)=\infty.$$

Это значит, что в достаточно малой окрестности полюса $f(z)$ - бесконечно большая величина.

Точка $z=a$ называется полюсом порядка m или кратности m функции $f(z)$, если эта точка является нулем порядка m для функции $\phi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.

В случае m=1 полюс называется простым.

В окрестности полюса $z=a$ кратности m главная часть ряда Лорана для функции $f(z)$ имеет конечное число членов с отрицательными степенями $(z-a)$, старшая из которых равна m.

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{(z-a)}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\ c_{-m}\neq 0.$$

Для того, чтобы точка $z=a$ являлась полюсом порядка m функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было представить в виде $f(z)=\dfrac{\phi(z)}{(z-a)^m}$, где $\phi(z)$ - аналитическая функция в точке $z=a$, причем $\phi(a)\neq 0$.

Например, функция

$$f(z)=\frac{2}{z^2\,(1-z)}$$

имеет две особые точки $z=0$ и $z=1$, при этом точка $z=0$ есть полюс второго порядка, так как

$$\lim_{z\to 0}\frac{2}{z^2(1-z)}=\infty$$

$$\frac{2}{z^2(1-z)}=\frac{2}{z^2}(1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots)=\frac{2}{z^2}+\frac{2}{z}+2+2z+\ldots+2z^{n-2}+\ldots.$$

Главная часть содержит две отрицательные степени z, т.е. $m=2$.

Можно рассуждать так: представим $f(z)$ в виде

$$f(z)=\frac{2/(1-z)}{z^2},\ \text{где}\ \phi(z)=\frac{2}{1-z}.$$

Функция $\phi(z)$ аналитична в окрестности точки $z=0$, $\phi(0)=2\neq 0$. Точка $z=1$ - простой полюс функции $f(z)$.

Особая точка $z = a$ называется *существенно особой точкой* $f(z)$, если

$$\lim_{z\to a} f(z) \text{ - не существует,}$$

а главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями $(z-a)$.

Для функции $f(z) = e^{1/z}$ точка $z = 0$ является существенно особой (см. пример 2, § 4.2).

4.4. ПОВЕДЕНИЕ $f(z)$ *В БЕСКОНЕЧНО УДАЛЁННОЙ ТОЧКЕ*

На расширенной комплексной плоскости $\overline{C}$ одна бесконечно удалённая точка. Её окрестностью является внешность круга $|z| > R$ достаточно большого радиуса. При подстановке $w = \dfrac{1}{z}$ область $|z| > R$ переходит в область $|w| < \dfrac{1}{R}$, т.е. внутренность круга, содержащую точку $w = 0$, достаточно малого радиуса: таким образом окрестность бесконечно удалённой точки плоскости z переходит в окрестность нуля плоскости w. Пусть $f(z)$ аналитическая в окрестности $z = \infty$, тогда $f(1/z)$ будет аналитической в окрестности $z = 0$, представим её рядом Лорана

$$f(1/z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n}_{\substack{\text{правильная}\\ \text{часть}}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}}_{\substack{\text{главная}\\ \text{часть}}}, \qquad z \in U(0). \tag{4.4.1}$$

Заменим в равенстве (4.4.1) z на $1/z$

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}}_{\substack{\text{правильная}\\ \text{часть}}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n}_{\substack{\text{главная}\\ \text{часть}}}, \qquad z \in U(\infty) \tag{4.4.2}$$

Особая точка $z=\infty$ является для $f(z)$:

1. Устранимой, если

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=c_0$$

и в ряду (4.4.2) нет главной части.

2. Полюсом порядка m, если

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty,$$

в ряду (4.4.2) есть конечная главная часть, старшая степень в ней z^m.

3. Существенно особой точкой, если

$$\lim_{z\to\infty} f(z) \text{ не существует,}$$

в ряду (4.4.2) главная часть содержит бесконечное число положительных степеней.

Примеры.

a. $$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots,$$

$z=\infty$ – существенно особая точка

$$\lim_{z\to\infty} e^z \text{ - не существует.}$$

b. $$z^2e^{1/z}=z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!\,z}+\frac{1}{4!z^2}+\ldots+\frac{1}{n!\,z^{n-2}}+\ldots,$$

$z=\infty$ – полюс второго порядка

$$\lim_{z\to\infty} z^2e^{1/z}=\infty.$$

c. $$e^{1/z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots+\frac{1}{n!z^n}+\ldots,$$

$z=\infty$ – устранимая особая точка

$$\lim_{z\to\infty} e^{1/z}=1.$$

5. ВЫЧЕТЫ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫЧЕТА И ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЕ

Пусть дана функция $f(z)$ аналитическая в окрестности изолированной собой точки $z=a$. Она представима рядом Лорана.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}. \qquad (5.1.1)$$

<u>Определение</u>. Вычетом функции $f(z)$ при $z=a$ называется коэффициент при $(z-a)^{-1}$.

$$\textit{выч}\,\left[f(z),a\right]=\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=c_{-1}.$$

Запишем формулу для коэффициента c_{-1} ряда Лорана

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz, \qquad (5.1.2)$$

где $\gamma:\left|z-a\right|=\rho$, при этом внутри круга $\left|z-a\right|<\rho$ нет других особых точек $f(z)$. Из формулы (5.1.2) и определения вычета имеем

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz=2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=a} f(z). \qquad (5.1.3)$$

Установим *формулы для вычисления вычета* $f(z)$ в точке $z=a$.

1. Пусть $z=a$ – нуль k-го порядка для $f(z)$, тогда

$$f(z)=(z-a)^k\varphi(z), \qquad \oint_{\gamma} f(z)\,dz=\oint_{\gamma}(z-a)^k\,\varphi(z)\,dz=0$$

по основной теореме Коши. Значит, в этом случае

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=0.$$

2. $z=a$ – существенно особая точка. Вычет в ней определяется после разложения в ряд Лорана функции $f(z)$. Например, используя разложение примера 2, (§ 4.2.) можно написать

$$\operatorname*{Res}_{z=0} e^{1/z}=1.$$

3. $z = a$ – полюс первого порядка

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n ,$$

$$(z-a) f(z) = c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+1} ,$$

$$\boxed{c_{-1} = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)} \qquad (5.1.4)$$

Если

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \qquad \varphi(a) \neq 0, \qquad \psi(a) = 0, \qquad \psi'(a) \neq 0,$$

то

$$c_{-1} = \lim_{z \to a} \frac{(z-a)\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \to a} \frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z) - \psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} .$$

4. $z = a$ – *полюс* k*-ого порядка*

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n ,4$$

$$(z-a)^k f(z) = c_{-k} + c_{-k+1} \cdot (z-a) + \ldots + c_{-1} \cdot (z-a)^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+k} .$$

Продифференцируем $(k-1)$ раз и перейдём к пределу при $z \to a$

$$(k-1)!\, c_{-1} = \lim_{z \to a} \left((z-a)^k f(z) \right)^{(k-1)},$$

$$\boxed{c_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left((z-a)^k f(z) \right)} \qquad (5.1.5)$$

Пример. Найти вычеты функции

$$f(z)=\frac{1-z}{(z-i)(z+1)^3}.$$

Особые точки: $z=i$ (полюс первого порядка) и $z=-1$ (полюс третьего порядка).

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)(1-z)}{(z-i)(z+1)^3}=\frac{1-i}{(1+i)^3}=\frac{(1-i)(1-i)^3}{(1+i)^3(1-i)^3}=\frac{(1-i)^4}{2^3}=$$

$$=\frac{(1-2i-1)^2}{8}=\frac{(-2i)^2}{8}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\left(\frac{(z+1)^3(1-z)}{(z-i)(z+1)^3}\right)''=\frac{1}{2}\lim_{z\to -1}\left(\frac{1-z}{z-i}\right)''=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to -1}\left(\frac{-z+i-1+z}{(z-i)^2}\right)'=\frac{i-1}{2}\lim_{z\to -1}\left((z-i)^{-2}\right)'=\frac{i-1}{2}(-2)\lim_{z\to -1}(z-i)^{-3}=$$

$$=(1-i)\cdot\frac{1}{(-1-i)^3}=-\frac{1-i}{(1+i)^3}=\frac{(1-i)(1-i)^3}{(1+i)^3(1-i)^3}=-\frac{(1-2i-1)^2}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Определение. *Вычетом* аналитической функции $f(z)$ в окрестности $\underline{z=\infty}$ называется коэффициент при $1/z$, взятый с обратным знаком.

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-c_{-1}. \qquad (5.1.6)$$

По формулам для коэффициента Лорана получим

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+} f(z)\,dz, \quad C^+ : |z|=R,$$

где R – достаточно большое число. C^+: обход контура C в направлении против часовой стрелки.

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+} f(z)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\,dz. \qquad (5.1.7)$$

Отметим, что слагаемое $\frac{c_{-1}}{z}$ принадлежит правильной части ряда Лорана (4.4.2).

5.2. ТЕОРЕМЫ О ВЫЧЕТАХ

Основная теорема о вычетах: Пусть $f(z)$ – аналитическая в односвязной области D, ограниченной контуром C, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$. Тогда

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)\,dz, \qquad (5.2.1)$$

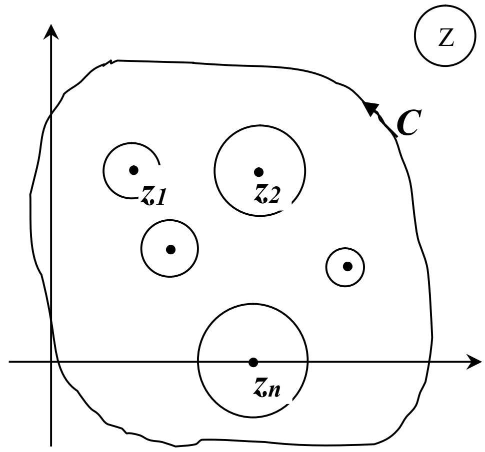


Рис.5.2.1.

Ⓩ Каждую особую точку z_k охватим окружностью

$$\gamma_k : \left| z - z_k \right| = \rho_k,$$

так, чтобы эти окружности не пересекались.
По теореме Коши для многосвязной области

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)\,dz,$$

на контурах C и γ_k одно и тоже направление обхода. Из формул (5.1.3)

$$\oint_{\gamma_k} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z), \qquad k = 1,2,...,n.$$

Значит

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \qquad (5.2.1)$$

Следствие (*вторая теорема о вычетах*): Если $f(z)$ аналитическая в $\overline{C}$, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0. \qquad (5.2.2)$$

Пусть контур $C: \left| z \right| = R$ такого радиуса, что все особые точки $z_1, z_2, ..., z_n$ внутри круга. По основной теореме о вычетах

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

По определению вычета в бесконечно удалённой точке (5.1.7)

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_C f(z)\,dz = c_{-1} = -\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z).$$

Объединим эти формулы и получим равенство (5.2.2).

Пример. Вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)(z+3)} = I,$$

особые точки: $z=-i,\quad z=i,\quad z=-3$.

Внутри круга $|z|<2$ только $z=\pm i$ (полюсы первого порядка).

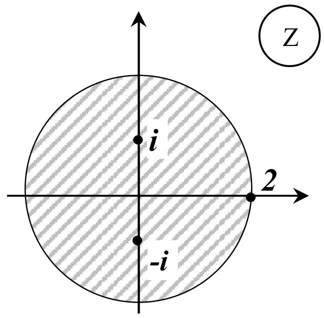


Рис.5.2.2.

$$I = 2\pi i\cdot\left(\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-i} f(z)\right)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i}\frac{z^2(z-i)}{(z^2+1)(z+3)} =$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z+i)(z+3)} = \frac{i^2}{2i\cdot(i+3)} = \frac{i}{2(3+i)},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-i} 0f(z) = \lim_{z\to -i}\frac{z^2(z-i)}{(z^2+1)(z+3)} = \lim_{z\to -i}\frac{z^2}{(z-i)(z+3)} =$$

$$= \frac{(-i)^2}{(-2i)\cdot(3-i)} = \frac{1}{2i\,(3-i)} = \frac{i}{2(3-i)}.$$

Следовательно,

$$I = 2\pi i\cdot\left(\frac{i}{2(3+i)} - \frac{i}{2(3-i)}\right) = \pi i^2\left(\frac{1}{3+i} - \frac{1}{3-i}\right) = -\frac{\pi}{10}(3-i-3-i) = \frac{\pi}{5}i.$$

5.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЁННЫХ СОБСТВЕННЫХ И НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧЕТОВ

Основная теорема о вычетах позволяет свести вычисление $\oint\limits_C f(z)\,dz$ к вычислению вычетов подынтегральной функции $f(z)$ относительно её изолированных особых точек, расположенных внутри данного контура C. Иногда этим методом удаётся вычислить некоторые определённые интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, для чего эти интегралы преобразуются в интегралы по замкнутому контуру от $f(z)$.

1. Рассмотрим интегралы вида

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\,dt, \qquad (5.3.1)$$

где R – рациональная функция от $\sin t$ и $\cos t$.

Сделаем замену $z = e^{it}$. Тогда $|z| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$ и при изменении t от 0 до 2π точка z опишет окружность $|z| = 1$.

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z},$$

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}. \qquad (5.3.2)$$

таким образом $\cos t$ и $\sin t$ – рациональные функции от z.

$$dz = ie^{it}\,dt, \qquad dz = iz\,dz, \qquad dt = \frac{dz}{iz}. \qquad (5.3.3)$$

Подставим выражения (5.3.2) и (5.3.3) в интеграл (5.3.1)

$$I = \int\limits_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\,dt = \oint\limits_{|z|=1} R\left(\frac{z^2-1}{2iz},\ \frac{z^2+1}{2z}\right)\cdot\frac{dz}{iz} = \oint\limits_{|z|=1} f(z)\,dz,$$

где $f(z)$ – рациональная функция от z.

Теперь к интегралу I можно применить теорему о вычетах:

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z),$$

где $(z = z_k) \in (|z| < 1)$, $k = 1, 2, ..., n$.

Примеры. Вычислить интегралы:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 4\cos x}, \qquad I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 + \sin t}.$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 4\cos x} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz \cdot \left(5 - 4 \cdot \dfrac{z^2+1}{2z}\right)} = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{5z - 2z^2 - 2} =$$

$$= i \cdot \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2(z-2)\left(z - \dfrac{1}{2}\right)} = \frac{i}{2} \cdot 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}} f(z) = -\pi \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{2} - 2} = \frac{2\pi}{3}$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 + \cos t} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz \cdot \left(3 + \dfrac{z^2-1}{2iz}\right)} = 2 \oint_{|z|=1} \frac{dz}{6iz + z^2 - 1} =$$

$$= 2 \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 6iz - 1} = 2 \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2)}.$$

$$z^2 + 6iz - 1 = 0 \qquad z_{1,2} = -3i \pm \sqrt{-9+1} = -3i \pm \sqrt{8}\, i = (-3 \pm 2\sqrt{2})\, i.$$

$$z_1 = -(3 - 2\sqrt{2})\, i, \qquad z_1 \in (|z| < 1),$$

$$z_2 = -(3 + 2\sqrt{2})\, i, \qquad z_2 \overline{\in} (|z| < 1).$$

$$I_2 = 2 \cdot 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = 4\pi i \cdot \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{4\pi i}{4\sqrt{2}\, i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

2. Вычисление несобственных интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx .$$

Пусть $f(z)$ – аналитическая на действительной оси функция, а в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ имеет конечное число изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Проведём полуокружность $|z| = R$ достаточно большого радиуса R, чтобы все особые точки попали внутрь полукруга

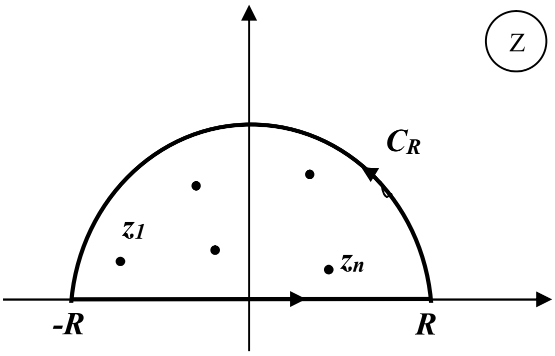


Рис.5.3.1.

$$C_R : |z| = R, \qquad \operatorname{Im} z \ge 0$$

$$C = C_R \cup [-R;\ R].$$

Рассмотрим интеграл по замкнутому контуру

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_R} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} f(x)\,dx ,$$

к которому можно применить основную теорему о вычетах

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Затем в равенстве

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \oint_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z), \qquad (5.3.4)$$

перейдём к пределу при $R \to \infty$. Если окажется, что

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0, \qquad (5.3.5)$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z), \quad z_k \in (\operatorname{Im} z > 0), \quad k = \overline{1, n} \qquad (5.3.6)$$

Условие (5.3.5) выполняется, если:

а) для функции $f(z)$ $z{=}\infty$ является нулём второго или более высокого порядка.

$$f(z)=\frac{c_{-2}}{z^2}+\frac{c_{-3}}{z^3}+\frac{c_{-4}}{z^4}+\ldots=\frac{1}{z^2}\varphi(z),$$

$$\lim_{z\to\infty}\varphi(z)=c_{-2},$$

отсюда следует, что в окрестности $z=\infty$ функция $\varphi(z)$ ограничена,

$$|\varphi(z)|\le M, \qquad |z|\ge R, \qquad z\in C_R .$$

Оценим интеграл

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right|=\left|\int_{C_R}\frac{1}{z^2}\varphi(z)\,dz\right|\le M\cdot\left|\int_{|z|=R}\frac{1}{z^2}dz\right|=M\cdot\left|\int_0^{\pi}\frac{R\,i\,e^{i\varphi}d\varphi}{R^2e^{2i\varphi}}\right|\le$$

$$\le\frac{M}{R}\int_0^{\pi}d\varphi=\frac{M\pi}{R}\xrightarrow[R\to\infty]{}0.$$

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

$$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^3}=\frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}$$

1. Функция $f(z)$ аналитическая на действительной оси, $z=x$, $-\infty\le x\le\infty$
2. В верхней полуплоскости $z=i$ – особая точка (полюс третьего порядка функции $f(z)$).
3. На бесконечности $f(z)$ имеет нуль 6-го порядка. Значит, можно применить формулу (5.3.6)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}=2\pi i\,\underset{z=i}{\mathrm{Res}}\frac{1}{(z^2+1)^3}=2\pi i\cdot\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right)''=$$

$$=\pi i\lim_{z\to i}\left(\frac{-3}{(z+i)^4}\right)'=\pi i\,\frac{(-3)\cdot(-4)}{(i+1)^5}=\frac{12\pi i}{32i}=\frac{3}{8}\pi .$$

б) Второй случай, когда выполняется условие (5.3.5).

Лемма Жордана. Если подынтегральная функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z)=e^{itz}F(z), \quad (t>0),$$

где $F(z)$ - аналитическая на действительной оси функция, имеет в верхней полуплоскости конечное число особых точек и

$$\lim_{z\to\infty} F(z)=0, \text{ тогда } \qquad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz=0.$$

В этом случае

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}F(x)\,dx=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Примеры. Вычислить интегралы:

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x\,dx}{x^2-6x+10}, \qquad I_2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x\,dx}{x^2-6x+10}$$

Рассмотрим функцию:

$$f(x)=\frac{xe^{ix}}{x^2-6x+10}, \qquad t=1>0,$$

$$f(z)=\frac{ze^{iz}}{z^2-6z+10}=\frac{ze^{iz}}{(z-3-i)(z-3+i)},$$

В этом случае:

$$F(z)=\frac{z}{z^2-6z+10}.$$

1. $F(z)$ – аналитическая функция при $z = x$, $-\infty < x < \infty$.
2. При $z_1 = 3 + i$ у $F(z)$ – полюс первого порядка в верхней полуплоскости.
3. $\lim\limits_{z \to \infty} F(z) = 0$

$$\operatorname*{Res}_{z=3+i} f(z) = \lim_{z \to 3+i} \frac{z e^{iz}}{z - 3 + i} = \frac{(3+i) e^{i(3+i)}}{3 + i - 3 + i} = \frac{3+i}{2i} \cdot e^{-1+3i} =$$

$$= \frac{e^{-1}}{2i} (3+i)(\cos 3 + i \sin 3) = \frac{e^{-1}}{2i} \big(3\cos 3 - \sin 3 + i\,(\cos 3 + 3\sin 3)\big),$$

Тогда

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix} dx}{x^2 - 6x + 10} = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} (3\cos 3 - \sin 3 + i\,(\cos 3 + 3\sin 3)),$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix} dx}{x^2 - 6x + 10} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 6x + 10} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 6x + 10} dx =$$

$$= I_1 + i I_2 = \pi e^{-1} (\cos 3 - 3\sin 3 + i(\cos 3 + 3\sin 3)),$$

Отсюда следует

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 6x + 10} dx = \pi e^{-1} (3\cos 3 - \sin 3) = -3{,}596$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 6x + 10} dx = \pi e^{-1} (\cos 3 + 3\sin 3) = 0{,}566.$$

6. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Операционное исчисление в настоящее время называют азбукой автоматики и телемеханики. Основателями его являются русские учёные Вощенко-Захарченко и Летников. Операционное исчисление обратило на себя внимание после того, как английский инженер Хевисайд получил ряд важных результатов.

6.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА. ОРИГИНАЛ И ИЗОБРАЖЕНИЕ

Определение. *Преобразованием Лапласа* функции $f(t)$ действительного аргумента называется функция комплексного переменного $F(p)$, определяемая формулой

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \qquad (6.1.1)$$

Интеграл (6.1.1) несобственный. Выпишем условия на функцию $f(t)$, при которых этот интеграл будет сходится.

При изучении физических процессов переменная t – время, процесс начинается с некоторого момента $t=0$.

1. $f(t)=0$ при $t<0$.
2. При $t>0$, $f(t)$ – непрерывна на всей оси t, $0\le t<\infty$, за исключением, может быть, конечного числа точек разрыва первого рода.
3. При возрастании t, $|f(t)|$ может возрастать не быстрее некоторой показательной функции

$$|f(t)|\le Me^{\alpha t},\ M \text{ и } \alpha=\text{const},$$

α – показатель роста функции $f(t)$.

Эти три условия обеспечивают сходимость интеграла (6.1.1).

Функция $f(t)$, удовлетворяющая трём условиям, называется *оригиналом*, а функция $F(p)$, соответствующая ей по формуле (6.1.1), называется *изображением*.

Оригиналами являются все ограниченные функции (y=$\cos t$ и $\sin t$, $\alpha=0$), степенные функции t^k $(k>0)$, т.к. любая степенная функция растёт медленнее показательной.

Функция $f(t)=\dfrac{1}{t-4}$ не является оригиналом, при $t=4$ у неё разрыв второго рода.

$f(t)=e^{t^2}$ – не является оригиналом, т.к. не удовлетворяет условию (3).
Соответствие между оригиналом и изображением записывают так:

$$F(p)=L(f(t)), \qquad f(t)=L^{-1}(F(p))$$

$$F(p) \risingdotseq f(t), \qquad f(t) \risingdotseq F(p)$$

Примеры. Найти изображение следующих функций:

1. Единичной функции Хевисайда

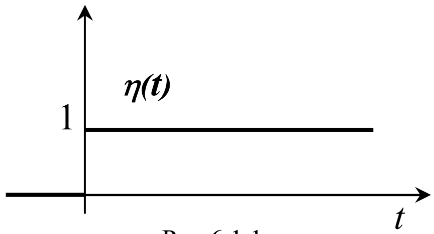


Рис.6.1.1.

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

$$F(p)=\int_0^{\infty}1\cdot e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\cdot\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{p}.$$

$$\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}, \qquad 1 \risingdotseq \frac{1}{p}, \qquad L(1)=\frac{1}{p}$$

2.

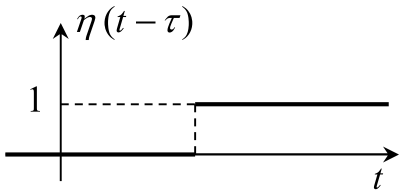


Рис.6.1.2.

$$\eta(t-\tau)=\begin{cases}1, & t>\tau\\ 0, & t<\tau\end{cases}$$

$$F(p)=\int_0^{\infty}\eta(t-\tau)e^{-pt}=\int_{\tau}^{\infty}1\cdot e^{pt}dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_{\tau}^{\infty}=\frac{1}{p}e^{-pt}$$

$$\eta(t-\tau) \risingdotseq \frac{1}{p}e^{-p\tau}, \quad \tau>0; \qquad \boxed{L(\eta(t-\tau))=\frac{1}{p}e^{-p\tau}, \quad \tau>0}$$

Если $f(t)$ является оригиналом, то $F(p)$ сходится абсолютно для всех значений комплексного переменного p, удовлетворяющих неравенству $\operatorname{Re} p>\alpha$, α – показатель роста $f(t)$. В полуплоскости $\operatorname{Re} p>\alpha$ $F(p)$ – является функцией аналитической.

3. $f(t)=e^{at}$, $\qquad a=\alpha_1+i\alpha_2$

Чтобы эта функция была оригиналом, её надо понимать так:

$$f(t)\equiv f(t)\cdot\eta(t)=\begin{cases}e^{at}, & t>0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

$$F(p)=\int_0^\infty e^{at}\cdot e^{-pt}=\int_0^\infty e^{-(p-a)t}dt=-\frac{1}{p-a}e^{-(p-a)t}\Big|_0^\infty=\frac{1}{p-a}$$

$$\boxed{L(e^{at})=\frac{1}{p-a}} \qquad e^{at} \risingdotseq \frac{1}{p-a}, \qquad \operatorname{Re}p>\operatorname{Re}a=a_1.$$

4. $f(t)=t^n, \quad n\in N,$

$$f(t)\equiv f(t)\cdot\eta(t)=\begin{cases} t^n, & t>0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

$$F(p)=\int_0^\infty t^n e^{-pt}dt=\frac{n!}{p^{n+1}}, \qquad \operatorname{Re}p>0.$$

$$\boxed{L(t^n)=\frac{n!}{p^{n+1}}} \qquad t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}, \qquad \operatorname{Re}p>0.$$

6.2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Принято оригиналы обозначать малыми буквами $f(t), g(t)$, а их изображения заглавными буквами $F(p), G(p)$.

Теорема линейности

Для любых постоянных A и B (действительных или комплексных) справедливо равенство

$$L(A\cdot f(t)+B\cdot g(t))=A\cdot F(p)+B\cdot G(p).$$

Справедливость теоремы следует из справедливости свойства линейности для несобственного интеграла.
Найдём изображения для $\cos t, \quad \sin t, \quad \operatorname{ch} t, \quad \operatorname{sh} t.$

$$\cos t=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i}+\frac{1}{p+i}\right)=\frac{p}{p^2+1}$$

$$\sin t=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i}-\frac{1}{p+i}\right)=\frac{p+i-p+i}{2i(p^2+1)}=\frac{1}{p^2+1}$$

$\cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}$
$\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^{t} + e^{-t}}{2} \;\dot{=}\; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+1}\right) = \frac{p}{p^{2}-1}$$

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2} \;\dot{=}\; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{p^{2}-1}$$

$\operatorname{ch} t \;\dot{=}\; \frac{p}{p^{2}-1}$
$\operatorname{sh} t \;\dot{=}\; \frac{1}{p^{2}-1}$

Теорема подобия.

Для любой положительной константы λ

$$f(\lambda t) \;\dot{=}\; \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$$

$$L(f(\lambda t)) = \int_{0}^{\infty} f(\lambda t) e^{-pt} dt = \left| \begin{array}{l} \lambda t = u \\ t = \dfrac{u}{\lambda} \\ \lambda > 0 \end{array} \right| =$$

$$= \int_{0}^{\infty} f(u) e^{-\frac{p}{\lambda} u} \frac{du}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \int_{0}^{\infty} f(u) e^{-\frac{p}{\lambda} u} du = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$$

Отсюда следуют формулы

$\sin \omega t \;\dot{=}\; \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\frac{p^{2}}{\omega^{2}}+1} = \frac{\omega}{p^{2}+\omega^{2}}$;	$\cos \omega t \;\dot{=}\; \frac{p}{p^{2}+\omega^{2}}$
$\operatorname{sh} \omega t \;\dot{=}\; \frac{\omega}{p^{2}-\omega^{2}}$;	$\operatorname{ch} \omega t \;\dot{=}\; \frac{p}{p^{2}-\omega^{2}}$.

Теорема запаздывания.

Если $L(f(t)) = F(p)$ и τ – $\forall$ положительное число, то

$$f(t-\tau) \;\dot{=}\; e^{-p\tau} F(p) \text{ или } L(f(t-\tau)) = e^{-p\tau} F(p)$$

(включение оригинала с запаздыванием на τ соответствует умножению изображения на $e^{-p\tau}$)

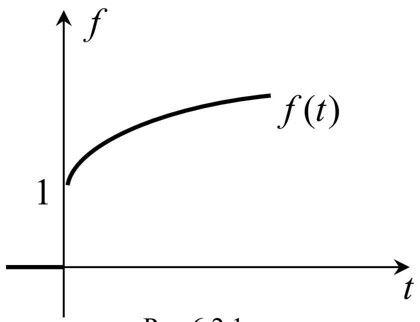


Рис.6.2.1.

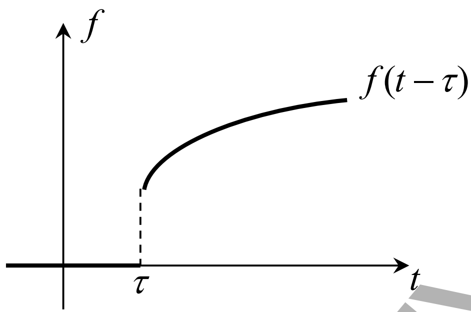


Рис.6.2.2.

$$f(t)=0,\quad t<0 \qquad\qquad f(t-\tau)=0,\quad t<\tau$$

$$f(t-\tau)=f(t-\tau)\cdot\eta(t-\tau)$$

$$L(f(t-\tau))=\int_0^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt=\int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt=\int_0^\infty f(u)e^{-p(u+\tau)}du=$$

$$=e^{-p\tau}\int_0^\infty f(u)e^{-pu}du=e^{-p\tau}\cdot F(p)$$

На этой теореме основано нахождение изображений импульсных функций.

Пример 1. Найти изображение функции

$$f(t)=(t-2)^3\,\eta(t-2)$$

Функция t^3 включается с запаздыванием $\tau=2$

$$L\,(f(t))=e^{-2p}L\,(t^3)=e^{-2p}\cdot\frac{3!}{p^4}=\frac{6e^{-2p}}{p^4}$$

Пример 2. Построить график

$$f(t)=(t^2-6t+9)\cdot\eta(t-3)$$

и найти её изображение.

Эта функция описывает процесс, включённый с запаздыванием $\tau=3$.

Запишем

$$f(t)=\varphi(t-3)\cdot\eta(t-3),$$

$$\varphi(t-3)=(t-3)^2,$$

$\varphi(t) = t^2$ включена с запаздыванием $\tau = 3$.

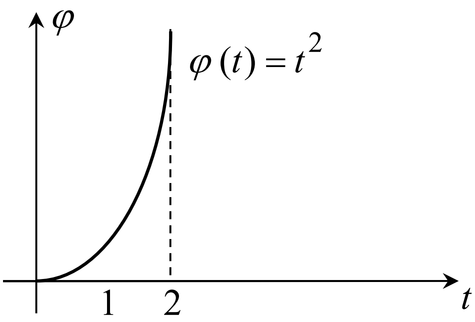


Рис.6.2.3.

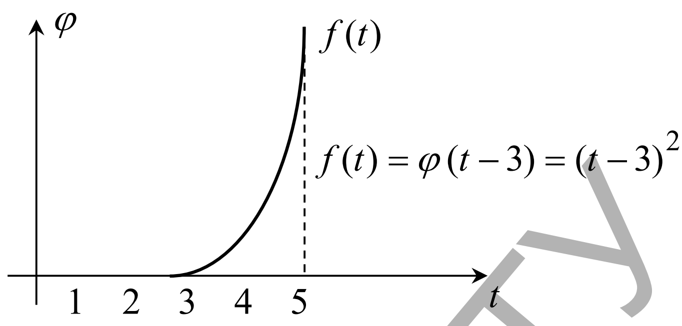
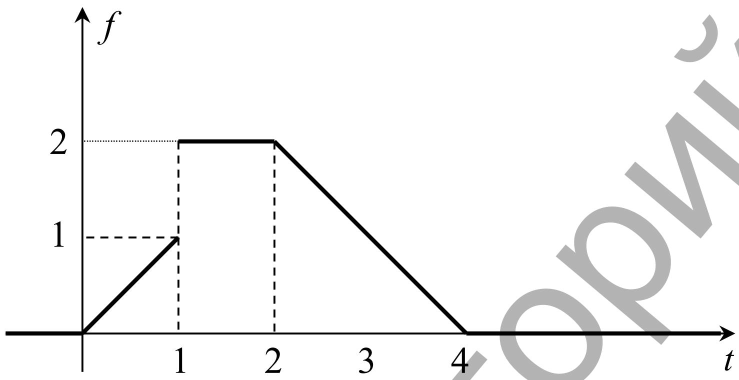


Рис.6.2.4.

$$L(f(t)) = L(\varphi(t)) \cdot e^{-3p} = L(t^2) \cdot e^{-3p} = \frac{2}{p^3} e^{-3p} = \frac{2e^{-3p}}{p^3}$$

Пример 3. Записать одним аналитическим выражением и найти изображение.



$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t < 0 \\ t, & \text{если} \quad 0 \le t < 1 \\ 2, & \text{если} \quad 1 < t \le 2 \\ 4 - t, & \text{если} \quad 2 < t \le 4 \\ 0, & \text{если} \quad t > 4 \end{cases}$$

Рис.6.2.5.

(В момент времени $t = 0$ “включается” функция $f(t) = t$, которая при $t = 1$ снимается и включается $f(t) = 2$, которая снимается при $t = 2$ и включается $f(t) = 4 - t$; её снимают при $t = 4$).

Запишем это с помощью функции сдвига $\eta(t - \tau)$.

$$f(t) = t \cdot \eta(t) - t \cdot \eta(t-1) + 2\eta(t-1) - 2\eta(t-2) + (-t+4)\eta(t-2) -$$

$$-(4-t)\eta(t-4) = \varphi_1(t) \cdot \eta(t) + \varphi_2(t-1) \cdot \eta(t-1) + \varphi_3(t-2) \cdot \eta(t-2) +$$

$$+\varphi_4(t-4) \cdot \eta(t-4) = t \cdot \eta(t) + (-t+1+1) \cdot \eta(t-1) + (-2-t+4) \cdot \eta(t-2) +$$

$$+(t-4) \cdot \eta(t-4) = t \cdot \eta(t) - (t-1-1) \cdot \eta(t-1) - (t-2) \cdot \eta(t-2) + (t-4) \cdot \eta(t-4)$$

$$\varphi_1(t) = t, \qquad \varphi_2(t) = -(t-1), \qquad \varphi_3(t) = -t, \qquad \varphi_4(t) = t$$

$$F(p) = \frac{1}{p^2} - \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}\right) \cdot e^{-p} - \frac{1}{p^2} \cdot e^{-4p}.$$

Изображение периодических импульсов

Применим теорему запаздывания к построению изображения единичного импульса $\varphi(t)$, действующего в течении промежутка времени τ.

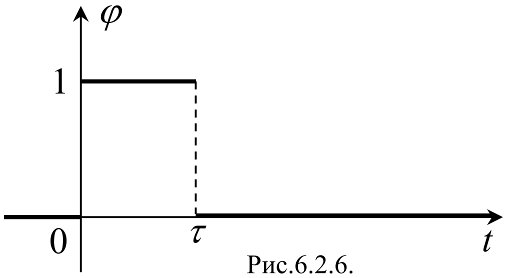


Рис.6.2.6.

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & 0 < t < \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$$

$$\varphi(t) = 1 \cdot \eta(t) - 1 \cdot \eta(t - \tau),$$

$$\Phi(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p\tau} = \frac{1}{p}(1 - e^{-p\tau}).$$

Пусть единичный импульс действует в течении времени τ, начиная с $t = T$ (см. рис.6.2.7.).

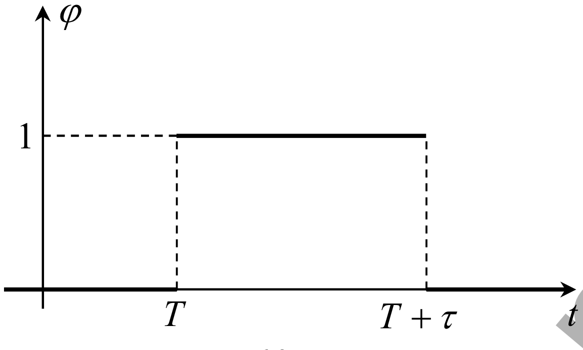


Рис.6.2.7.

По теореме запаздывания получим

$$\Phi_1(p) = \Phi(p) \cdot e^{-pT} = \frac{1}{p}(1 - e^{-p\tau})e^{-pT}.$$

Пусть имеется периодическая система импульсов

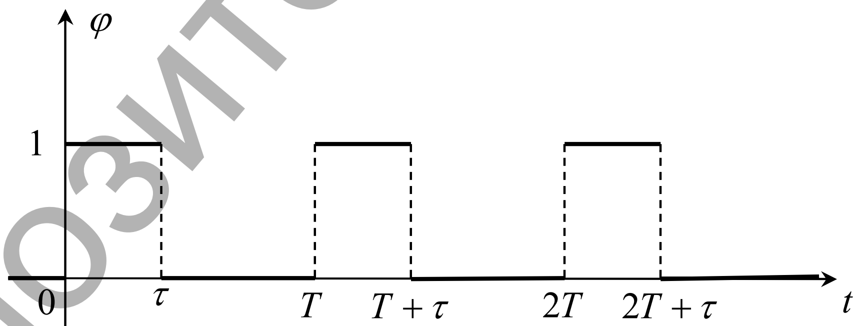


Рис.6.2.8.

Применим свойство линейности и теорему запаздывания; получим

$$F(p) = \frac{1}{p}\left(1 - e^{-p\tau}\right) + \frac{1}{p}\left(1 - e^{-p\tau}\right)e^{-pT} + \frac{1}{p}\left(1 - e^{-p\tau}\right)e^{-2pT} +$$

$$+ \frac{1}{p}\left(1 - e^{-p\tau}\right)e^{-3pT} + \ldots = \frac{1}{p}\left(1 - e^{-p\tau}\right)\left(1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + e^{-3pT} + \ldots\right) =$$

$$=\frac{1}{p}\left(1-e^{-p\tau}\right)\frac{1}{1-e^{-pT}},$$

$$\left|e^{-pT}\right|<1.$$

Если $T=2\tau$, то

$$F(p)=\frac{1}{p}(1-e^{-p\tau})\cdot\frac{1}{1-e^{-2p\tau}}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1-e^{-p\tau}}=$$

$$\frac{e^{\frac{p\tau}{2}}}{p\left(e^{\frac{p\tau}{2}}+e^{-\frac{p\tau}{2}}\right)}=\frac{1}{2p}\cdot\frac{e^{\frac{p\tau}{2}}}{\operatorname{ch}\frac{p\tau}{2}}.$$

Если $f(t)$ – оригинал периода T, то

$$F(p)=\frac{\int\limits_0^T f(t)e^{-pt}dt}{1-e^{-pT}}.$$

Теорема смещения в изображении

Если $f(t)\risingdotseq F(p)$ и λ – любая константа, то

$$e^{\lambda t}f(t)\risingdotseq F(p-\lambda)$$

$$L(e^{\lambda t}f(t))=\int\limits_0^\infty e^{\lambda t}f(t)\,e^{-pt}dt=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-(p-\lambda)t}dt=F(p-\lambda).$$

Отсюда следуют формулы:

$$e^{\lambda t}\cos\omega t\risingdotseq\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2};\qquad e^{\lambda t}\sin\omega t\risingdotseq\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2};$$

$$e^{\lambda t}\operatorname{ch}\omega t\risingdotseq\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2-\omega^2};\qquad e^{\lambda t}\operatorname{sh}\omega t\risingdotseq\frac{\omega}{(p-\lambda)^2-\omega^2};$$

$$e^{\lambda t}t^n\risingdotseq\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}},\qquad n\ge 1$$

Теорема о дифференцировании оригинала

Пусть функция $f(t)$ - n раз непрерывно дифференцируема на $(0,+\infty)$ и $f^{(n)}(t)$ является оригиналом. Тогда:

а) Функции

$$f(t), f'(t), ..., f^{(n-1)}(t)$$

также являются оригиналами;

б) Существуют

$$f(+0) = \lim_{t \to +0} f(t),$$

$$f'(+0) = \lim_{t \to +0} f'(t),$$

$$\ldots,$$

$$f^{(n-1)}(+0) = \lim_{t \to +0} f^{(n-1)}(t);$$

в) Если

$$L(f(t)) = F(p),$$

то

$$L(f^{(n)}(t)) = p^n F(p) - f(+0)p^{n-1} - f'(+0)p^{n-2} - ... - f^{n-1}(+0)$$

В частности при $n = 1$ получим

$$L(f'(t)) = pF(p) - f(+0),$$

при $n = 2$

$$L(f''(t)) = p^2 F(p) - pf(+0) - f'(0).$$

Если функция $f(t)$ и её производные любых порядков непрерывны в 0, то

$$f(+0) = f(-0) = 0,$$

$$f'(+0) = f''(+0) = ... = f^{(n-1)}(+0) = 0,$$

тогда

$$\boxed{L(f^{(n)}(t)) = p^n F(p)} \quad \text{или} \quad f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p).$$

Операция дифференцирования оригинала заменяется операцией умножения изображения на p.

Пример. Найти изображение дифференциального выражения

$$x''-2x'+5$$

при

$$x(+0)=x(0)=2,\ x'(+0)=x'(0)=-1.$$

Пусть

$$L(x(t))=X(p),$$

тогда

$$L(x''-2x'+5)=L(x'')-2L(x'')+5L(x)=$$

$$=p^2X(p)-2p+3-2(pX(p)-2)+5X(p)=$$

$$=(p^2-2p+5)X(p)-2p+7.$$

<u>**Теорема о дифференцировании изображения**</u>

Если

$$L(f(t))=F(p),$$

то

$$L(-t\,f(t))=F'(p),$$

т.е. умножению оригинала на $-\ t$ соответствует производная от изображения.

Известно, что $F(p)$ в области существования функция аналитическая

$$\boxed{F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt}$$

$$\boxed{F'(p)=\int_0^{+\infty} f(t)\cdot(-t)e^{-pt}dt=L(-t\,f(t))}$$

$$(-t)f(t)\risingdotseq F(p),\quad \text{или}\quad L(-t\,f(t))=F'(p),$$

$$(-t)^n f(t)\risingdotseq F^{(n)}(p),\quad \text{или}\quad L((-t)^n f(t))=F^{(n)}(p).$$

Пример. Найти изображение для

$$f(t) = t\cos 3t\,.$$

Известно, что

$$\cos 3t \risingdotseq \frac{p}{p^2+9},$$

тогда

$$(-t)\cos 3t \risingdotseq \left(\frac{p}{p^2+9}\right)' = \frac{p^2+9-2p^2}{(p^2+9)^2} = \frac{9-p^2}{(p^2+9)^2}$$

$$t\cos 3t \risingdotseq \frac{p^2-9}{(p^2+9)^2}.$$

Теорема об интегрировании оригинала

Если

$$L(f(t)) = F(p),$$

то

$$L\left(\int\limits_0^t f(u)\,du\right) = \frac{F(p)}{p},$$

т.е. интегрированию интеграла в пределах от 0 до t соответствует деление изображения на p.

Теорема об умножении изображений

Свёрткой двух функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ называется

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\cdot\varphi(t-u)\,du = f*\varphi.$$

Так как $f(t)$ и $\varphi(t)$ $\in$ множеству оригиналов и равны 0 при $t<0$, то их свёрткой называется интеграл вида

$$\int\limits_0^t f(u)\cdot\varphi(t-u)\,du = f*\varphi.$$

Свёртка оригинала обладает свойствами:

1. $f * \varphi = \varphi * f$ - переместительность
2. $(f * g) * \varphi = f * (g * \varphi)$ - ассоциативность
3. $(\alpha f + \beta g) * \varphi = \alpha (f * \varphi) + \beta (g * \varphi)$ - линейность

<u>ТЕОРЕМА БОРЕЛЯ</u>

Если

$$f(t) \risingdotseq F(p)$$

и

$$\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p),$$

то

$$f(t) * \varphi(t) \risingdotseq F(p) \cdot \Phi(p),$$

т. е. свёртке оригиналов соответствует произведение изображений.

$$L(f * \varphi) = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(t)\varphi(t-u)\,du \right) e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(t)\ \varphi(t-u)\ du$$

Поменяем порядок интегрирования в этом двойном интеграле по бесконечной области D.

$$L(f * \varphi) = \int_0^\infty f(u)\,du \int_u^\infty \varphi(t-u)e^{-pt} dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} t-u=z \\ dt=dz \end{matrix} \right| = \int_0^\infty f(u)\,du \cdot \int_0^\infty \varphi(z)e^{-pz-pu} dz =$$

$$= \int_0^\infty f(u)e^{-pu} du \int_0^\infty \varphi(z)\ e^{-pu} dz = F(p)\cdot\Phi(p).$$

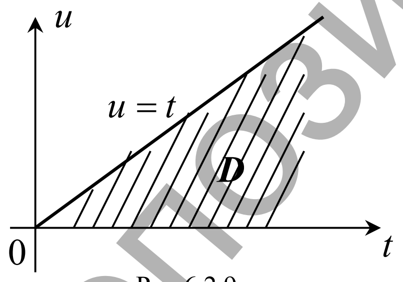


Рис.6.2.9.

Пример. `Найти оригинал для изображения.

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p-1)} = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p-1}.$$

Известно, что

$$L^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right)=t,$$

и

$$L^{-1}\left(\frac{1}{p-1}\right)=e^t.$$

Тогда

$$L^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p-1}\right)=t*e^t=e^t*t=\int_0^t e^u(t-u)\,du=t\int_0^t e^u du-\int_0^t u\,e^u du=$$

$$=t\,e^u\Big|_0^t-(u\,e^u-e^u)\Big|_0^t=t\,e^t-t-t\,e^t+e^t-1=e^t-t-1$$

$$f(t)=e^t-t-1.$$

7. НАХОЖДЕНИЕ ОРИГИНАЛА ПО ИЗОБРАЖЕНИЮ.

В простых случаях оригинал по заданному изображению $F(p)$ находят по таблице соответствия между оригиналом и изображениями.

Примеры. Найти $f(t)$ по заданной функции $F(p)$.

$F_1(p)=\dfrac{1}{p^5}$, $\qquad f_1(t)=L^{-1}\left(\dfrac{1}{p^5}\right)=\dfrac{1}{4!}t^4=\dfrac{1}{24}t^4$

$F_2(p)=\dfrac{3}{p^2+9}$ $\qquad f_2(t)=L^{-1}\left(\dfrac{3}{p^2+9}\right)=\sin 3t$

$F_3(p)=\dfrac{4}{(p-3)^2-4}=2\cdot\dfrac{2}{(p-3)^2-2^2}$ $\qquad f_3(t)=2e^{3t}\operatorname{sh}2t$

Рассмотрим общие способы нахождение оригинала.

7.1. ТЕОРЕМА РАЗЛОЖЕНИЯ

Если $F(p)$ –

- аналитическая функция в окрестности $z = \infty$,
- $\lim\limits_{\operatorname{Re} p \to \infty} F(p) = 0$,
- имеет разложение в ряд $F(p) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}$,

то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1},$$

причём этот ряд сходится при всех t.

Пример. $F(p) = \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)$.

- Функция аналитическая в окрестности $z = \infty$.
- $\lim\limits_{p \to \infty} F(p) = 0$.
- $F(p) = \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{3p^3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{1}{p^n} + \ldots.$

Тогда

$$f(t) = 1 - \frac{1}{2} t + \frac{1}{3 \cdot 2!} t^2 - \frac{1}{4 \cdot 3!} t^3 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n(n-1)!} t^{n-1} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} - \frac{t^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{n(n-1)!} + \ldots$$

$$f(t) \cdot (-t) + 1 = e^{-t}, \qquad f(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$$

7.2. ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА. ПРИМЕНЕНИЕ ВЫЧЕТОВ

Прямое преобразование Лапласа обозначается

$$F(p) = L(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt \qquad (7.2.1)$$

Функция $F(p)$ – аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$.
Обратное преобразование Лапласа обозначается так:

$$f(t) = L^{-1}(F(p)).$$

Доказано, что

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} F(p)\, e^{pt}\, dp. \qquad (7.2.2)$$

Формулу (7.2.2) называют формулу Меллина. Т.к. $F(p)$ аналитическая, если $\operatorname{Re} p > \alpha$, то все её особые точки находятся левее прямой $\operatorname{Re} p = \alpha$. Используем для вычисления несобственного интеграла (7.2.2) теорию вычетов (см. раздел 5.3 (II)).

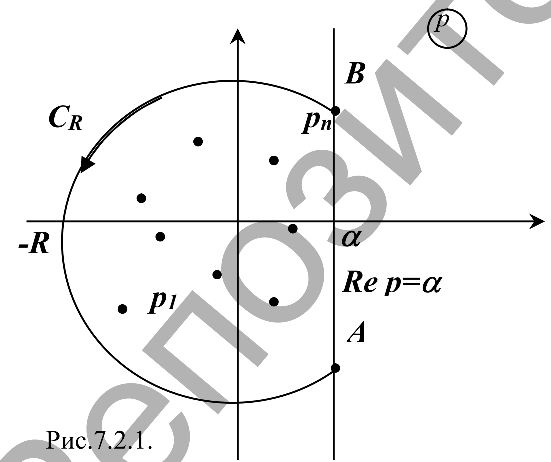


Рис.7.2.1.

Проводим окружность $C_R : |z| = R$ достаточно большого радиуса, охватывающую все особые точки функции $F(p)$.

$$\Gamma : C_R \cup [AB]$$

Γ – замкнутый контур.

$$\oint_{\Gamma} F(p)\, e^{pt} dp = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p=p_k} F(p)\, e^{pt}. \qquad (7.2.3)$$

С другой стороны,

$$\oint_{\Gamma} F(p)\, e^{pt} dp = \int_{AB} F(p)\, e^{pt} dp + \int_{C_R} F(p)\, e^{pt} dp$$

Переходим в этом равенстве к пределу при $R \to \infty$. По Лемме Жордана

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} F(p)e^{pt}dp = 0$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{AB} F(p)e^{pt}dp = \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} F(p)e^{pt}dp$$

Итак получим, объединяя все результаты, что

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p=p_k} F(p)e^{pt}.} \qquad (7.2.4)$$

Если $F(p)$ – рациональная функция, т.е. $F(p) = \dfrac{\Phi(p)}{\Psi(p)}$, где $\Phi(p)$ и $\Psi(p)$ - известные многочлены, и $p = p_k$ - простые полюсы, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi(p_k)}{\Psi'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Пример. Найти $f(t)$, если

$$F(p) = \frac{p^2 + 3}{p^3 - 2p^2 - 5p + 6}.$$

Находим корни знаменателя

$$p^3 - 2p^2 - 5p + 6 = 0, \qquad \Psi(p) = 0.$$

Известно, что целые корни такого многочлена являются делителями свободного члена

$$p_1 = 1, \qquad p_2 = -2, \qquad p_3 = 3,$$

$$\Phi(p) = p^2 + 3$$

$$\Psi(p) = p^3 - 2p^2 - 5p + 6$$

$$\Psi'(p) = 3p^2 - 4p - 5$$

$$f(t) = \frac{1+3}{3-4-5}e^{t} + \frac{4+3}{12+8-5}e^{-2t} + \frac{9+3}{21+12-5}e^{3t} = -\frac{2}{3}e^{t} + \frac{7}{15}e^{-2t} + \frac{6}{5}e^{3t}.$$

7.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ.

Преобразование Лапласа, когда каждому оригиналу $f(t)$ ставится в соответствие изображение

$$F(p)=\int_{0}^{\infty} f(t)\,e^{-pt}dt \qquad (7.3.1)$$

и каждому изображению $F(p)$ – оригинал $f(t)$ по формуле

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(p)\,e^{pt}dp, \qquad (7.3.2)$$

является частным случаем интегральных преобразований

$$F(p)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,K(t,p)\,dt,$$

где $K(t,p)$ – ядро интегральных преобразований.

Преобразование Фурье определяется так:

<u>*прямое*</u>

$$\Phi(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,e^{-i\omega t}\,dt=F(\varphi(t)), \qquad (7.3.3)$$

<u>*обратное*</u>

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega=F^{-1}(\Phi(\omega)). \qquad (7.3.4)$$

Если $p=a+i\omega$, то в формуле (7.3.1) имеем

$$F(p)=F(a+i\omega)=\int_{0}^{\infty} f(t)\,e^{-at}\cdot e^{-i\omega t}dt=\int_{0}^{\infty} \varphi(t)\,e^{-i\omega t}dt.$$

$$F(p)=L(f(t))=F(f(t)\,e^{-at}),$$

если $f(t)=0$ при $t<0$.

Область применения преобразования Фурье значительно уже области применения преобразования Лапласа.
Это связано с тем, что для сходимости интеграла (7.3.3) функция $\varphi(t)$ должна удовлетворять условию абсолютной интегрируемости, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt < M$$

Наличие в интеграле (7.3.1) дополнительного множителя e^{-at}, гасящего значение $f(t)$ на бесконечности, расширяет класс оригиналов до функций, растущих на бесконечности не быстрее некоторой показательной функции.
Однако с точки зрения физики преобразование Фурье более естественно, чем преобразование Лапласа. Это объясняется тем, что формулы (7.3.3) и (7.3.4) связаны с разложением $\varphi(t)$ в ряд Фурье

$$\varphi(t) = \sum C_n e^{in\omega t},$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t) e^{-in\omega t} dt$$

Формулу (7.3.4) можно рассматривать как разложение $\varphi(t)$ в непрерывный спектр простых гармонических колебаний $\Phi(\omega)e^{i\omega t}$, частоты ω которых меняются не скачками, как в ряду Фурье, а непрерывно. Функцию $\Phi(\omega)$ (7.3.3) можно рассматривать как аналог коэффициентов Фурье, т.е. как комплексную амплитуду колебания с частотой ω.
Величина $|\Phi(\omega)|$ показывает, какова доля этого колебания в спектре колебания функции $\varphi(t)$; поэтому функцию $\Phi(\omega)$ называют спектральной функцией.

8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ОПЕРАЦИОННЫМ СПОСОБОМ

8.1. РЕШЕНИЕ ЛДУ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Дано линейно дифференциальное уравнение n порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = f(t), \qquad (8.1.1)$$

где $y = y(t)$, $t > 0$.

Требуется найти решение уравнения (8.1.1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \ldots, \; y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (8.1.2)$$

Будем считать, что правая часть $f(t)$ – оригинал, тогда и решение $y = y(t)$ будет оригиналом. Применим к (8.1.1) преобразование Лапласа

$$L(y(t)) = Y(p),$$

$$L(y'(t)) = pY(p) - y_0,$$

$$L(y''(t)) = p^2 Y(p) - p y_0 - y'_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$L\left(y^{(n)}(t)\right) = p'' Y(p) - p^{n-1} y_0 - p^{n-2} y'_0 - \ldots - y_0^{(n-1)},$$

$$L(f(t)) = F(p).$$

Получим операторное уравнение

$$(p'' + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n) Y(p) - P_{n-1}(p) = F(p), \qquad (8.1.4)$$

где $P_{n-1}(p)$ – многочлен степени не выше $(n-1)$ с известными коэффициентами.

Решаем алгебраическое уравнение (8.1.4) относительно $Y(p)$.

Затем переходим к оригиналу $y(t)$.

Таким образом *решение задачи Коши для ЛДУ* осуществляется по схеме:

ЛДУ + начальные условия		решение задачи Коши
↓		↑
L – преобразование		L^{-1} – преобразование
↓		↑
операторное уравнение	⟶	решение операторного уравнения

Пример. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка:

$$x''+4x=\sin 2t,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0)=1, \qquad x'(0)=-2.$$

Переходим к преобразованию Лапласа:

$$x(t) \risingdotseq X(p),$$

$$x'(t) \risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)-1,$$

$$x'' \risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-p+2,$$

$$\sin 2t \risingdotseq \frac{2}{p^2+4}.$$

Операторное уравнение имеет вид:

$$p^2X(p)-p+2+4X(p)=\frac{2}{p^2+4},$$

$$(p^2+4)X(p)=p-2+\frac{2}{p^2+4},$$

Операторное решение имеет вид:

$$X(p)=\frac{p}{p^2+4}-\frac{2}{p^2+4}+\frac{2}{p^2+4}\cdot\frac{1}{p^2+4}$$

Переходим к оригиналам:

$$x(t)=L^{-1}\left(\frac{p}{p^2+4}-\frac{2}{p^2+4}+\frac{2}{p^2+4}\cdot\frac{1}{p^2+4}\right)=$$

$$=\cos 2t-\sin 2t+L^{-1}\left(\frac{2}{p^2+4}\cdot\frac{1}{p^2+4}\right).$$

$f(t)=L^{-1}\left(\dfrac{2}{(p^2+4)^2}\right)$. Найдём эту функцию двумя способами:

а) с помощью вычетов, **б)** по теореме Бореля.

а) $$F(p)=\frac{2}{(p^2+4)^2}=\frac{2}{(p+2i)^2(p-2i)^2},$$

$$f(t)=\sum_{k=1}^{2}\operatorname*{Res}_{p=p_k}F(p)e^{pt}.$$

$p=\pm 2i$ – полюсы второго порядка.

$$\operatorname*{Res}_{p=-2i}F(p)e^{pt}=\lim_{p\to -2i}\left(\frac{2e^{pt}}{(p-2i)^2}\right)'_p=2\lim_{p\to -2i}\frac{te^{pt}(p-2i)-2e^{pt}}{(p-2i)^3}=$$

$$=2e^{-2it}\frac{t\cdot(-4i)-2}{(-4i)^3}=2e^{-2it}\frac{-2-4it}{64i^3}=\frac{-2t+i}{16}e^{-2it}.$$

$$\operatorname*{Res}_{p=2i}F(p)e^{pt}=\lim_{p\to 2i}\left(\frac{2e^{pt}}{(p+2i)^2}\right)'_p=2\lim_{p\to 2i}\frac{te^{pt}(p+2i)-2e^{pt}}{(p+2i)^3}=$$

$$=2e^{2it}\frac{4ti-2}{(4i)^3}=2e^{2it}\frac{4it-2}{-64i}=2\cdot\frac{-2t-i}{32}e^{2it}=-2\cdot\frac{2t+i}{32}e^{2it}=-\frac{2t+i}{16}e^{2it}.$$

$$f(t)=\frac{-2t+i}{16}e^{-2it}-\frac{2t+i}{16}e^{2it}=-\frac{t}{8}(e^{-2it}+e^{2it})+\frac{i}{16}(e^{-2it}-e^{2it})=$$

$$=-\frac{t}{8}\cdot 2\cos 2t-\frac{i}{16}\cdot 2i\sin 2t=-\frac{t}{4}\cos 2t+\frac{1}{8}\sin 2t.$$

$$L^{-1}\left(\frac{2}{(p^2+4)^2}\right)=-\frac{t}{4}\cos 2t+\frac{1}{8}\sin 2t.$$

б) $$F(p)=\frac{2}{(p^2+4)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{p^2+4}\cdot\frac{2}{p^2+4}$$

$$f(t)=\frac{1}{2}\sin 2t*\sin 2t=\frac{1}{2}\int_0^t\sin 2u\cdot\sin 2(t-u)\,du=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^t\cos(4u-2t)\,du-\frac{1}{4}\int_0^t\cos 2t\,du=\frac{1}{16}\sin(4u-2t)\Big|_0^t-\frac{1}{4}t\cos 2t=$$

$$= \frac{1}{16}\sin 2t - \frac{1}{16}\sin(-2t) - \frac{1}{4}t\cos 2t = \frac{1}{8}\sin 2t - \frac{1}{4}t\cos 2t.$$

Запишем решение задачи Коши:

$$x(t) = \cos 2t - \sin 2t - \frac{t}{4}\cos 2t + \frac{1}{8}\sin 2t$$

$$x(t) = \left(1 - \frac{t}{4}\right)\cos 2t - \frac{7}{8}\sin 2t.$$

8.2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛДУ

Решение систем ЛДУ проводится по схеме, данной в (8.1.4).
Каждое уравнение системы преобразуем по Лапласу. Получится алгебраическая система относительно изображений. Запишем сначала операторное решение системы, затем переходим к оригиналам.

Пример. Решить задачу Коши для системы ЛДУ:

$$\begin{cases} x' + y = 0, & x(0) = 1 \\ x + y' = 0, & y(0) = -1. \end{cases}$$

$$x(t) \risingdotseq X(p), \quad x'(t) \risingdotseq pX(p) - 1.$$

$$L(y(t)) = Y(p), \quad L(y'(t)) = pY(p) + 1.$$

$$\begin{cases} pX(p) + Y(p) - 1 = 0 \\ X(p) + pY(p) + 1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} pX(p) + Y(p) = 1 \\ X(p) + pY(p) = -1. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & 1 \\ 1 & p \end{vmatrix} = p^2 - 1, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & p \end{vmatrix} = p + 1, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} p & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -p - 1$$

$$\left.\begin{aligned} X(p) &= \frac{p+1}{p^2-1} = \frac{1}{p-1}, & L^{-1}(X(p)) &= x(t) = e^{t} \\ Y(p) &= -\frac{p+1}{p^2-1} = -\frac{1}{p-1}, & L^{-1}(Y(p)) &= Y(t) = e^{-t} \end{aligned}\right\}$$

Пример. Решить уравнение

$$x''+x=f(t),$$

где

$$f(t)=\begin{cases}\cos t, & 0\le t\le\pi\\ 0, & t>\pi\end{cases},$$

$$x(0)=0,\quad x'(0)=0.$$

Запишем правую часть единым аналитическим выражением, используя функцию $\eta(t-\tau)$.

$$f(t)=\cos t\cdot\eta(t)-\cos t\cdot\eta(t-\pi)=\cos t\cdot\eta(t)-\cos(t-\pi)\cdot\eta(t-\pi),$$

$$L(f(t))=X(p),$$

$$L(x'(t))=pX(p),$$

$$L(x''(t))=p^2X(p).$$

$$L(f(t))=\frac{p}{(p^2+1)^2}+\frac{p}{(p^2+1)^2}\cdot e^{-\pi p}$$

Операторное уравнение имеет вид

$$p^2X(p)+X(p)=\frac{p}{p^2+1}+\frac{p}{p^2+1}e^{-\pi p}$$

$$X(p)=\frac{p}{(p^2+1)^2}+\frac{p}{(p^2+1)^2}e^{-\pi p}$$

$$x(t)=L^{-1}(X(p))=\varphi(t)\cdot\eta(t)+\varphi(t-\pi)\cdot\eta(t-\pi)$$

$$\Phi(p)=\frac{p}{(p^2+1)^2}=\frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\ \doteqdot\ \cos t*\sin t=\sin t*\cos t=$$

$$=\int_0^t\sin u\cdot\cos(t-u)\,du=\frac{1}{2}\int_0^t(\sin t+\sin(2u-t))\,du=$$

$$=\frac{1}{2}t\sin t-\frac{1}{4}\cos t+\frac{1}{4}\cos(-t)=\frac{1}{2}t\sin t.$$

Итак, решение задачи Коши для данного ДУ имеет вид

$$x(t)=\frac{t\sin t}{2}\cdot\eta(t)+\frac{(t-\pi)\sin(t-\pi)}{2}\cdot\eta(t-\pi).$$

$$x(t)=\begin{cases}0, & \text{если } t<0;\\ \frac{1}{2}t\sin t, & \text{если } 0\le t\le\pi;\\ \frac{1}{2}t\sin t-\frac{t-\pi}{2}\sin t=\frac{\pi}{2}\sin t, & \text{если } t>\pi.\end{cases}$$

9. УПРАЖНЕНИЯ

9.1. Представить в алгебраической форме следующие комплексные числа

1. $(4-3i)^i$ **2.** $\operatorname{ch}\left(3+\frac{\pi}{4}i\right)$ **3.** $\sin\left(\frac{\pi}{4}+i\right)$

4. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}i$ **5.** $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{-6i}$ **6.** $\operatorname{Arctg}\frac{3+4i}{5}$

7. $\operatorname{Ln}(-1-i)$ **8.** $\cos\left(\frac{\pi}{6}-i\right)$ **9.** $\operatorname{sh}\left(1-\frac{\pi}{2}i\right)$

10. $\operatorname{Arccos} i$ **11.** $(-1-i)^{4i}$ **12.** $\operatorname{Arth}\frac{3+2i\sqrt{3}}{7}$

13. $\sin\pi i$ **14.** $\operatorname{Arch}3i$ **15.** $\operatorname{Ln}\left(1+\sqrt{3}i\right)$

9.2. Построить область, заданную неравенствами

1. $|z-1| \le 1, \quad |z+1| > 2;$

2. $|z-2| + |z+2| \le 5;$

3. $|z-1-i| \le 1, \quad \operatorname{Im} z > 1, \quad \operatorname{Re} z \ge 1;$

4. $|z-2| - |z+2| > 3;$

5. $z \cdot \bar{z} \le 2, \quad \operatorname{Re} z < 1, \quad \operatorname{Im} z > -1;$

6. $|2z| > |1+z^2|;$

7. $|z-i| \le 1, \quad -\dfrac{\pi}{2} < \arg(z-i) < \dfrac{\pi}{4};$

8. $|z| - 3\operatorname{Im} z \le 6;$

9. $|z-2-i| \ge 1, \quad 1 \le \operatorname{Re} z \le 3, \quad 0 < \operatorname{Im} z \le 3;$

10. $3|z| - \operatorname{Re} z > 12;$

11. $1 < z\bar{z} < 2, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad 0 \le \operatorname{Im} z \le 1;$

12. $\operatorname{Re}(1+z) \le |z|;$

13. $|z+i| > 1, \quad -\dfrac{\pi}{4} \le \arg z < 0;$

14. $|z-i| < 1, \quad \arg z \ge \dfrac{\pi}{4};$

15. $|z| < 2, \quad -\dfrac{\pi}{4} \le \arg(z-1) \le \dfrac{\pi}{4};$

16. $\arg(z+1-i) \le \dfrac{\pi}{4}.$

9.3. Определить вид кривой

1. $z = 3e^{it} - \dfrac{1}{2e^{it}};$

2. $z = -2e^{it} + \dfrac{1}{e^{it}};$

3. $z = t^2 + 4t + 20 - i\left(t^2 + 4t + 4\right);$

4. $\operatorname{Re}\left(z^2 - \bar{z}\right) = 0;$

5. $\operatorname{Im}\left(\overline{z^2 - \bar{z}}\right) = 2 - \operatorname{Im} z;$

6. $z^2 + \bar{z}^2 = 1;$

7. $|z-2| = |1-2\bar{z}|;$

8. $z = t - 2 + i\left(t^2 - 4t + 5\right);$

9. $z = 2\operatorname{ch} 3t - 3i \operatorname{sh} 3t;$

10. $z = -4\operatorname{sh} 5t - 5i \operatorname{ch} 5t;$

11. $z = \sec t + i \cdot 2\operatorname{tg} t;$

12. $z = 4\operatorname{cosec} t - i \cdot 2\operatorname{ctg} t;$

13. $z = \dfrac{1+i}{1-t} + \dfrac{t(2-4i)}{1-t};$

14. $z = \dfrac{2+t}{2-t} + i\dfrac{1+t}{1-t};$

15. $z = \dfrac{1+t}{1-t} + i\dfrac{2+t}{2-t}.$

9.4. Найти образ области D *при отображении* $w = f(z)$

1. $D:(|z|<1, \quad \operatorname{Im} z>0)$, $\quad w=\dfrac{1-z}{1+z}$.

2. $D:(1<|z|<2)$, $\quad w=\dfrac{2}{z-1}$.

3. $D:(0 \le \operatorname{Re} z \le 1, \quad 0 \le \operatorname{Im} z \le 1)$, $\quad w=z^2$.

4. $D:(\operatorname{Re} z>0, \quad \operatorname{Im} z>0)$, $\quad w=\dfrac{z-i}{z+i}$.

5. D – треугольник с вершинами $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=i$, $w=(1+i)(1-z)$.

6. D – треугольник с вершинами $z_1=-i$, $z_2=2+i$, $z_3=-3$, $w=2z-zi+3i+5$.

7. $D:(0<\operatorname{Re} z<1)$, $\quad w=z^{-1}$.

8. $D:\left(0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\quad w=\dfrac{1}{z}$.

9. D – треугольник с вершинами $z_1=-1-i$, $z_2=1$, $z_3=i$, $w=(-i+1)z+3i-5$.

10. $D:(0<\operatorname{Re} z<1)$, $\quad w=\dfrac{z-1}{z-2}$.

11. $D:(|z|<1, \quad \operatorname{Im} z>0)$, $\quad w=\dfrac{2z-i}{2+iz}$.

12. $D:(1 \le \operatorname{Re} z \le 2, \quad 0 \le \operatorname{Im} z \le 1{,}5\pi)$, $\quad w=e^z$.

13. $D:\left(1 \le |z| \le 2, \quad -\dfrac{\pi}{4} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4}\right)$, $\quad w=z^2$.

14. D – треугольник с вершинами $z_1=0$, $z_2=2+2i$, $z_3=-1+3i$, $w=1+2i-(3-i)z$.

15. $D:(-1 \le \operatorname{Re} z \le 1, \quad -1 \le \operatorname{Im} z \le 2)$, $\quad w=(-1-i)z+i+4$.

9.5. Выяснить, какие из следующих функций являются аналитическими хотя бы в одной точке, а какие – нет

1. $w = z^2\,\overline{z}$,

2. $w = z\,e^{z}$,

3. $w = |z| \cdot \operatorname{Re}\overline{z}$,

4. $w = \sin 3z + i$,

5. $w = (2-3i)z^2 - iz + i$,

6. $w = \overline{z}\,\operatorname{Re} z$,

7. $w = z\cos z$,

8. $w = z \cdot |z|$,

9. $w = \dfrac{z-i}{z+i}$,

10. $w = i\cos z$,

11. $w = 3e^{-z^2}$,

12. $w = |z| \cdot \overline{z}$,

13. $w = \operatorname{ch}(2z)$,

14. $w = \overline{z}\,\operatorname{Im} z$,

15. $w = iz^3 - 2z + 4$.

9.6. Найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке z_0 при отображении $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

	$u(x,y)$	$v(x,y)$	z_0
1.	$3x^2y - y^3$,	$3xy^2 - x^3$,	$-i+1$.
2.	$e^{1+y}\cos x$,	$-e^{1+y}\sin x$,	$\frac{\pi}{4}+i$.
3.	$x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2$,	$3x^2y - y^3 + 2xy$,	$\frac{2}{3}i$.
4.	$2xy - 2x$,	$y^2 - 2y - x^2 + 1$,	1.
5.	$e^x(x\cos y - y\sin y)$,	$e^x(x\sin y + y\cos y)$,	$-1+i\pi$.
6.	$x^2 + 2x - y^2$,	$2xy + 2y$,	i.
7.	$e^{-1-y}\cos x$,	$e^{-1-y}\sin x$,	$\pi - i$.
8.	$e^{-x}\cos y$,	$-e^{-x}\sin y$,	i.

9.	$x^2 - y^2$,	$2xy$,	$\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.
10.	$2xy$,	$y^2 - x^2$,	$-i$.
11.	$2x^2 - 2y^2 + y$,	$4xy - x$,	$-1 + i$.
12.	$e^{y^2 - x^2} \cos 2xy$,	$-e^{y^2 - x^2} \sin 2xy$,	i.
13.	$x^3 - 3xy^2 + 3x$,	$3x^2y - y^3 + 3y - 1$,	$-1 + i$.
14.	$x^3 + 3xy^2 + x^2 - y^2$,	$3x^2y - y^3 + 2xy$,	$1 - i$.
15.	$e^{1+2y} \cos 2x$,	$-e^{1+2y} \sin 2x$,	$\frac{\pi}{6}$.

9.7. Восстановить аналитическую в окрестности т очки z_0 функцию $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, если

1. $u = x^2 - y^2 + x$, $f(0) = 0$.

2. $v = e^{-y} \sin x + y$, $f(0) = 1$.

3. $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $f(1) = 1 + i$.

4. $u = x^3 - 3xy^2 - x$, $f(0) = 0$.

5. $v = 1 - \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $f(1) = 1 + i$.

6. $v = x^2 - y^2 - x$, $f(0) = 0$.

7. $u = x^3 - 3xy^2 + x$, $f(0) = 1$.

8. $u = e^{-y} \cos x + x$, $f(0) = 1$.

9. $v = 3x^2y - y^3 - y$, $f(0) = 0$.

10. $v = y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $f(1) = 2$.

11. $u = 1 - e^x \sin y$, $f(0) = 1 + i$.

12. $v = x^2 - y^2 + 2x + 1$, $f(0) = i$.

13. $u = \dfrac{x + 1}{(x + 1)^2 + y^2}$, $f(0) = 1$.

14. $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + x$, $f(1) = 2$.

15. $v = 3x^2y - y^3$, $f(0) = 1$.

9.8. Вычислить следующие интегралы

1. $\int\limits_{\gamma} z^{-2}dz$, γ – отрезок прямой между точками $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$.

2. $\int\limits_{\gamma} z^3 e^{z^4} dz$, γ – ломаная ABC с вершинами $z_A = i$, $z_B = 1$, $z_C = 0$.

3. $\int\limits_{\gamma} \frac{\overline{z}}{z} dz$, γ – граница области $(1 < |z| < 2, \ \operatorname{Re} z > 0)$.

4. $\int\limits_{\gamma} z \cdot \overline{z} dz$, $\gamma : (|z| = 1, \ \operatorname{Im} z \le 0)$.

5. $\int\limits_{\gamma} (\sin iz + z) dz$, $\gamma : (|z| = 1, \ \operatorname{Re} z \ge 0)$.

6. $\int\limits_{\gamma} z \operatorname{Im} z^2 dz$, $\gamma = AB$– отрезок прямой между точками $z_A = 0$ и $z_B = 1 + i$.

7. $\int\limits_{\gamma} (3z^2 + 2z) dz$, γ – дуга параболы $y = x^2$ между точками $z = 1 + i$ и $z = 0$.

8. $\int\limits_{\gamma} e^{|z|^2} \operatorname{Im} z dz$, γ отрезок прямой между точками $z = 1 + i$ и $z = 0$.

9. $\int\limits_{\gamma} (z^3 + \sin z) dz$, $\gamma : (|z| = 1, \ \operatorname{Re} z \ge 0)$.

10. $\int\limits_{\gamma} z \operatorname{Im} z^2 dz$, $\gamma : (|z| = 1, \ -\pi \le \arg z \le 0)$.

11. $\int\limits_{0}^{i} z \cos z dz$.

12. $\int\limits_{1+i}^{2i} (z^3 + z) e^{\frac{z^2}{2}} dz$.

13. $\oint\limits_{\gamma} z \operatorname{Re} z dz$, $\gamma : |z| = 1$.

14. $\int\limits_{\gamma} \operatorname{Re}\frac{\bar{z}}{z}dz,\quad \gamma = \overline{ABC},\quad AB:(|z|=1,\ \operatorname{Im} z \ge 0),$ BC – отрезок с концами в точках $z_1 = 1,\ z_2 = 2.$

15. $\int\limits_{1}^{i} \frac{\ln(z+1)}{z+1}dz$ по дуге окружности $|z|=1,\ \operatorname{Im} z \ge 0,\ \operatorname{Re} z \ge 0.$

9.9. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)$ ***в кольце*** K:

1. $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)},\qquad K: 2 < |z| < 3.$

2. $f(z) = \frac{z+2}{z^2+2z-8},\qquad K: 2 < |z+2| < 4.$

3. $f(z) = \frac{2z+3}{z^2+3z+2},\qquad K: 1 < |z| < 2.$

4. $f(z) = \frac{2}{z^2-1},\qquad K: 1 < |z+2| < 3.$

5. $f(z) = \frac{z+2}{z^2-4z+3},\qquad K: 2 < |z-1| < \infty.$

6. $f(z) = \frac{1}{z^2+1},\qquad K: 0 < |z-i| < 2.$

7. $f(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2},\qquad K: 0 < |z-2| < 1.$

8. $f(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2},\qquad K: 1 < |z| < 2.$

9. $f(z) = (z^2+z)^{-1},\qquad K: 0 < |z| < 1.$

10. $f(z) = \frac{4z-8}{(z+1)(z-3)},\qquad K: 3 < |z| < \infty.$

11. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)},\qquad K: 0 < |z| < 1.$

12. $f(z) = \frac{2}{(z-1)(z-3)},\qquad K: 3 < |z| < +\infty.$

13. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-4)},\qquad K:1<|z|<4.$

14. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)},\qquad K:0<|z-2|<1.$

15. $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)},\qquad K:0<|z-1|<1.$

9.10. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)$ ***в окрестности точки*** z_0

1. $f(z)=\sin\dfrac{z}{1-z},\qquad z_0=1.$

2. $f(z)=\ln\dfrac{z-1}{z-2},\qquad z_0=\infty.$

3. $f(z)=e^{\frac{z}{z-3}},\qquad z_0=3.$

4. $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z-1},\qquad z_0=1.$

5. $f(z)=z\cos\dfrac{1}{z-2},\qquad z_0=2.$

6. $f(z)=z\,e^{\frac{z}{z-4}},\qquad z_0=4.$

7. $f(z)=\dfrac{1}{z}\sin^2\dfrac{2}{z},\qquad z_0=0.$

8. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z-2},\qquad z_0=2.$

9. $f(z)=\cos\dfrac{3z}{z-i},\qquad z_0=i.$

10. $f(z)=e^{\frac{4z-2z^2}{(z-1)^2}},\qquad z_0=1.$

11. $f(z)=z^2\,e^{\frac{1}{z}}\qquad z_0=\infty.$

12. $f(z)=\cos\dfrac{i}{z^2}+\dfrac{z}{z-1},\quad z_0=0.$

13. $f(z)=\dfrac{z\,e^{2z}}{z-1},\qquad z_0=1.$

14. $f(z)=z\sin\dfrac{z^2-2z}{(z-1)^2},\qquad z_0=1.$

15. $f(z)=2\sin^2 z+\cos\dfrac{1}{z},\qquad z_0=0.$

9.11. Исследовать характер особой точки z_0 функции $f(z)$

1. $f(z)=\dfrac{e^z-1}{\sin\pi z}$, $z_0=0.$

2. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3(1-\cos z)}$, $z_0=0.$

3. $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4}$, $z_0=0$

4. $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4}$, $z_0=-1$

5. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$, $z_0=0$

6. $f(z)=\dfrac{1+\cos z}{z-\pi}$, $z_0=\pi$

7. $f(z)=\cos\dfrac{1}{z+\pi}$, $z_0=-\pi$

8. $f(z)=\dfrac{e^{z+i}}{z+i}$, $z_0=-i$

9. $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z}$, $z_0=0$

10. $f(z)=\dfrac{z-\pi}{\sin^2 z}$, $z_0=0$

11. $f(z)=\dfrac{z^2-3z+2}{z^2-2z+1}$, $z_0=1$

12. $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}$, $z_0=0$

13. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3(1-\cos z)}$, $z_0=0$

14. $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$, $z_0=0$

15. $f(z)=\dfrac{\sin 4z-4z}{e^z-1-z}$, $z_0=0$

9.12. Вычислить

1. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}\frac{2+\sin z}{z(z+2i)}dz$

2. $\displaystyle\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1}\frac{iz(z-i)}{\sin\pi z}dz$

3. $\displaystyle\oint\limits_{|z-3|=1}\frac{\sin 3z+2}{z^2(z-\pi)}dz$

4. $\displaystyle\oint\limits_{\gamma}\frac{2dz}{z^2(z-1)}$, $\gamma:|z-1-i|=\dfrac{5}{4}$

5. $\displaystyle\oint\limits_{|z-\pi|=1}\frac{(z^2+\pi)^2}{i\sin z}dz$

6. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=2}\frac{z^2+1}{(z^2+4)\sin\frac{z}{3}}dz$

7. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{iz}-1}{z^3}dz$

8. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{3z^4-2z^3+5}{z^4}dz$

9. $\oint\limits_{\gamma} \frac{z(\sin z+2)}{\sin z}$, $\gamma: \left|z-\frac{3}{2}\right|=1$

10. $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z(z^2+4)}$, $\gamma: |z-i|=\frac{3}{2}$

11. $\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z+1}{z(z-\pi)}dz$

12. $\oint\limits_{|z+1,5|=1} \frac{\cos^2 z+3}{2z^2+\pi z}dz$

13. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z^2-1}{z^3}dz$,

14. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1-z^4+3z^6}{2z^3}dz$

15. $\oint\limits_{|z+1|=1/2} \frac{\operatorname{tg} z+2}{4z^2+\pi z}dz$

9.13. Вычислить

1. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z\cdot\sin(z-1)}{z^2-z}dz$

2. $\oint\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}$

3. $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{(z-1)^2(z-3)}dz$

4. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z\operatorname{sh} z}{(z^2-1)^2}dz$

5. $\oint\limits_{|z-3|=6} \frac{z\,dz}{(z-2)^3(z+4)}$

6. $\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{\operatorname{ch} e^{i\pi z}}{z^3-4z^2}dz$

7. $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^3}\cos\frac{\pi}{z+1}dz$

8. $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^2+4)^2}dz$

9. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1-\sin z}{z^2}dz$

10. $\oint\limits_{|z-1|=1/2} \frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2}dz$

11. $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\cos\frac{\pi}{4}z}{(z^2-1)^2}dz$

12. $\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{z}{z^2-2z+3}dz$

13. $\oint\limits_{\gamma}\frac{z-1}{(z^2-2z+3)^2}dz, \qquad \gamma: |z-1-i|=\frac{3}{2}$ **14.** $\oint\limits_{|z-2|=3/2}\frac{\sin iz}{z^2-4z+3}dz$

15. $\oint\limits_{|z+i|=1}\frac{i\,dz}{(z^2+1)^2}$

9.14. Используя теорию вычетов, найти интегралы

1. $\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^z dz}{z^2(z+1)}$

2. $\oint\limits_{\gamma}\frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)}, \quad \gamma: |z-3|=4$

3. $\oint\limits_{|z-i|=3}\frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz$

4. $\oint\limits_{\gamma}\frac{zdz}{(z-1)^2(z+2)}, \gamma: x^{2/3}+y^{2/3}=3^{2/3}$

5. $\oint\limits_{|z|=\sqrt{3}}\frac{\sin\pi z}{z^2-z}dz$

6. $\oint\limits_{\gamma}\frac{\cos\frac{z}{2}}{z^2-4}dz$

$\gamma: z=3\cos t+2i\sin t, \quad t\in[0, 2\pi]$

7. $\oint\limits_{|z-i|=1}\frac{e^z dz}{z^4+2z^2+1}$

8. $\oint\limits_{\gamma}\frac{z+1}{z^2+2z-3}dz, \qquad \gamma: x^2+y^2=16$

9. $\oint\limits_{|z-1|=4}\frac{dz}{(z-1)^2(z+2)}$

10. $\oint\limits_{\gamma}\frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}dz, \qquad \gamma: \frac{x^2}{4}+y^2=1$

11. $\oint\limits_{|z|=4}\frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3}dz$

12. $\oint\limits_{\gamma}\frac{dz}{z^4+1}, \qquad \gamma: x^2+y^2=2x$

13. $\oint\limits_{|z-2|=2}\frac{zdz}{(z-1)(z-2)^3}$

14. $\oint\limits_{\gamma}\frac{e^{2z}}{z^2-1}dz, \qquad \gamma: x^2+y^2+2x=0$

15. $\oint\limits_{|z|=3}\frac{\sin zdz}{z^2(z^2-4)}$

9.15. Вычислить интегралы

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}dx,$

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+5}{x^4+5x^2+6}dx,$

3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2(x^2+16)}dx,$

4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+10x^2+9}dx,$

5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+4x+13)^2}dx,$

6. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+9)^2}dx,$

7. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}dx,$

8. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+4)}dx,$

9. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx,$

10. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+4)^2}dx,$

11. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2-10x+29)^2}dx,$

12. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{(x^2+8x+17)^2}dx,$

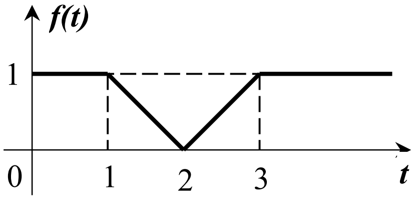
13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}dx,$

14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)(x^2+9)^2}dx.$

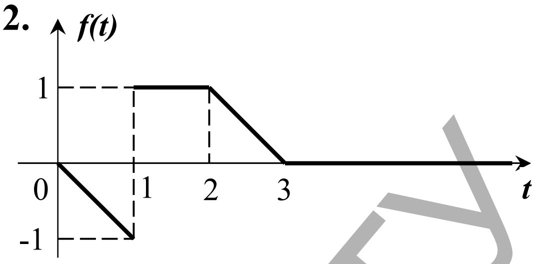
15. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}dx,$

9.16. По данному графику оригинала $\mathrm{f(t)}$ ***найти изображение.***

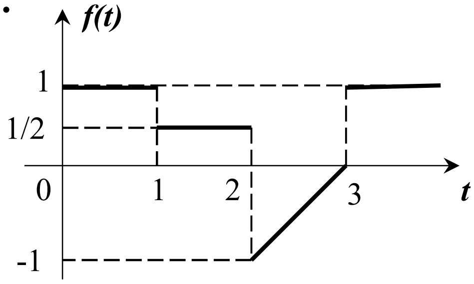
1.



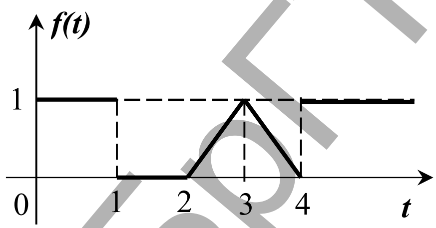
2.



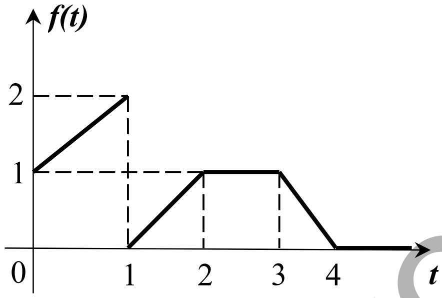
3.



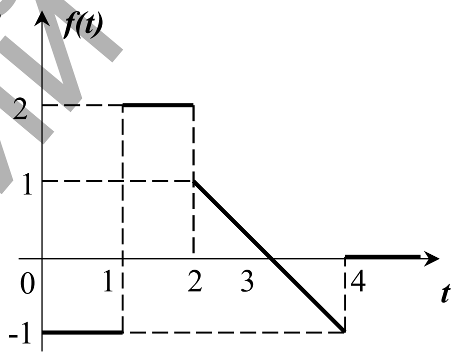
4.



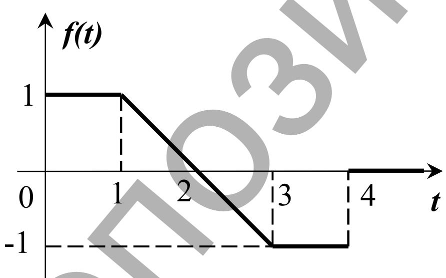
5.



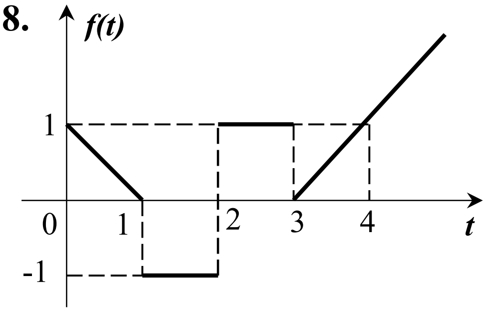
6.



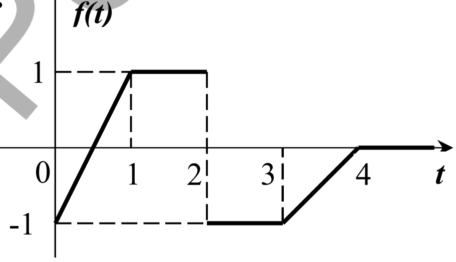
7.



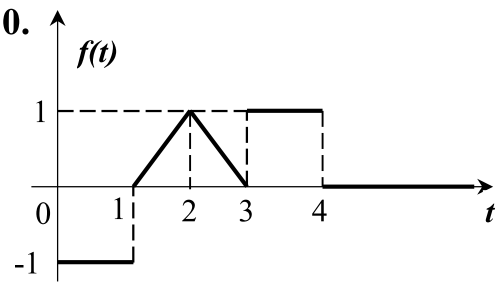
8.



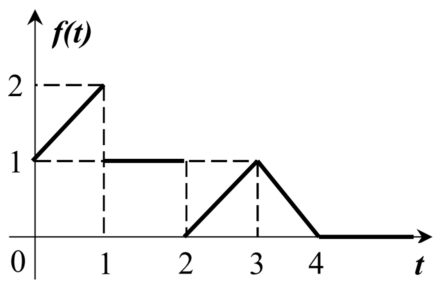
9.



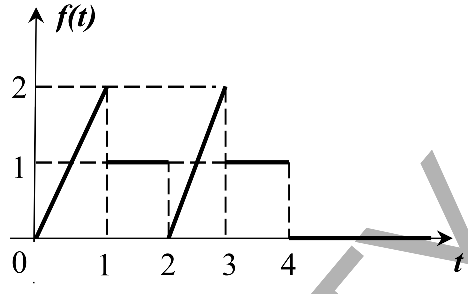
10.



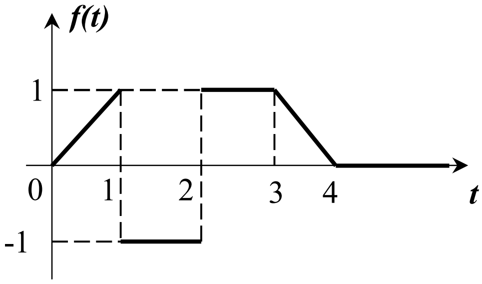
11.



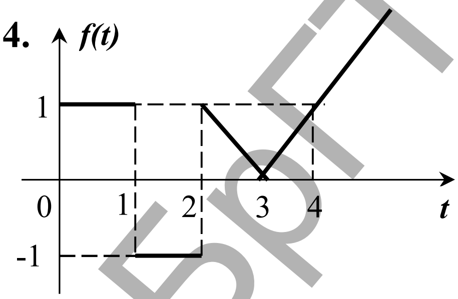
12.



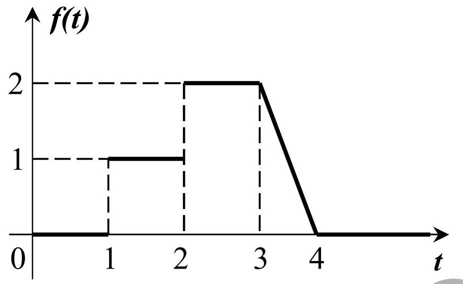
13



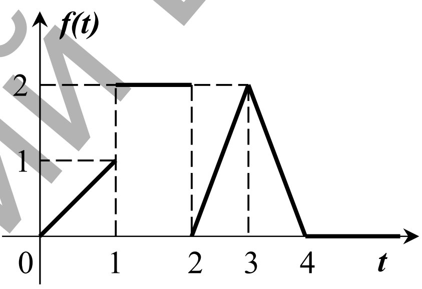
14.



15.



16.



9.17. Включить процесс $\varphi(t)$ с запаздыванием τ. Построить график и найти изображение функции $\varphi(t)\cdot\eta(t-\tau)$

1. $\varphi(t)=t^2-t+2,\quad \tau=1;$

2. $\varphi(t)=t^2-2t-3,\quad \tau=2;$

3. $\varphi(t)=t^2+2t+5,\quad \tau=3;$

4. $\varphi(t)=t^2-2t+3,\quad \tau=4;$

5. $\varphi(t)=t^2-3t+1,\quad \tau=1;$

6. $\varphi(t)=t^2+3t+2,\quad \tau=2;$

7. $\varphi(t)=t^2-4t+3,\quad \tau=2;$

8. $\varphi(t)=t^2-4t+5,\quad \tau=3;$

9. $\varphi(t)=t^2+t+2,\quad \tau=3;$

10. $\varphi(t)=t^2+t+3,\quad \tau=1;$

11. $\varphi(t)=2t^2+4t,\quad \tau=1;$

12. $\varphi(t)=2t^2-6t,\quad \tau=3;$

13. $\varphi(t)=t^2-7t+6,\quad \tau=2;$

14. $\varphi(t)=t^2-4t+2,\quad \tau=4;$

15. $\varphi(t)=t^2+2,\quad \tau=2;$

16. $\varphi(t)=t^2+1,\quad \tau=1.$

9.18. Найти оригинал по данному изображению

1. $\dfrac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$

2. $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+p+1)}$

3. $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+4p+5)}$

4. $\dfrac{p+5}{(p+1)(p^2-2p+5)}$

5. $\dfrac{5p}{(p+2)(p^2-2p+2)}$

6. $\dfrac{1}{(p-2)(p^2-2p+3)}$

7. $\dfrac{2p+1}{(p+1)(p^2+2p+3)}$

8. $\dfrac{2-3p}{(p-2)(p^2-4p+5)}$

9. $\dfrac{2p+3}{(p-1)(p^2-p+1)}$

10. $\dfrac{2}{(p+1)(p^2+2p+2)}$

11. $\dfrac{2-p}{(p-1)(p^2-4p+5)}$

12. $\dfrac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}$

13. $\dfrac{1-p}{p(p^2+3p+3)}$

14. $\dfrac{p+3}{p^3+2p^2+3p}$

15. $\dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$

16. $\dfrac{p}{p^4-3p^2+2}$.

9.19. Операционным методом решить задачу Коши.

1. $y''+y'+y=7e^{2t}$ $\quad y(0)=1 \quad y'(0)=4$

2. $y''+y'-2y=-2(t+1)$ $\quad y(0)=1 \quad y'(0)=1$

3. $y''+4y'+29y=e^{-2t}$ $\quad y(0)=0 \quad y'(0)=1$

4. $2y''+5y'=29\cos t$ $\quad y(0)=-1 \quad y'(0)=0$

5. $y''+2y'+10y=2e^{-t}\cos 3t$ $\quad y(0)=5 \quad y'(0)=1$

6. $y''+y'-2y=e^{-t}$ $\quad y(0)=-1 \quad y'(0)=0$

7. $y''-3y'+2y=2e^{t}\cos\dfrac{t}{2}$ $\quad y(0)=1 \quad y'(0)=0$

8.	$y''+y'+y=t^2+t$	$y(0)=1$	$y'(0)=-3$
9.	$y''+4y=\sin 2t$	$y(0)=0$	$y'(0)=1$
10.	$y''-9y=\sin t-\cos t$	$y(0)=-3$	$y'(0)=2$
11.	$y''-3y'+2y=12e^{3t}$	$y(0)=2$	$y'(0)=6$
12.	$y''+3y'-10y=47\cos 3t-\sin 3t$	$y(0)=3$	$y'(0)=-1$
13.	$y''-2y'=e^t(t^2+t-3)$	$y(0)=2$	$y'(0)=2$
14.	$y''+4y=8\sin 2t$	$y(0)=3$	$y'(0)=-1$
15.	$y''+y=\operatorname{sh}t$	$y(0)=2$	$y'(0)=1$

9.20. Решить систему ЛДУ

1. $\begin{cases}\dot{x}=-x+3y+2\\ \dot{y}=x+y+1\end{cases}$ $x(0)=0,\quad y(0)=1.$

2. $\begin{cases}\dot{x}=x+3y+3\\ \dot{y}=x-y+1\end{cases}$ $x(0)=0,\quad y(0)=1.$

3. $\begin{cases}\dot{x}=2x+2y+2\\ \dot{y}=4y+1\end{cases}$ $x(0)=2,\quad y(0)=1.$

4. $\begin{cases}\dot{x}=2x+8y+1\\ \dot{y}=3x+4y\end{cases}$ $x(0)=2,\quad y(0)=1.$

5. $\begin{cases}\dot{x}=2x+2y+2\\ \dot{y}=2y+1\end{cases}$ $x(0)=0,\quad y(0)=1.$

6. $\begin{cases}\dot{x}=-2x+y+2\\ \dot{y}=3x\end{cases}$ $x(0)=1,\quad y(0)=0.$

7. $\begin{cases}\dot{x}=-2x+5y+1\\ \dot{y}=x+2y+1\end{cases}$ $x(0)=0,\quad y(0)=2.$

8. $\begin{cases}\dot{x}=3x+y\\ \dot{y}=-5x-3y+2\end{cases}$ $x(0)=2,\quad y(0)=0.$

9. $\begin{cases}\dot{x}=x+4y\\ \dot{y}=2x-y+9\end{cases}$ $x(0)=1,\quad y(0)=0.$

10. $\begin{cases}\dot{x}=2x+5y\\ \dot{y}=x-2y+2\end{cases}$ $x(0)=1,\quad y(0)=1.$

11. $\begin{cases}\dot{x}=-x+3y+2\\ \dot{y}=x+y\end{cases}$ $x(0)=1,\quad y(0)=2.$

12. $\begin{cases}\dot{x}=-3x-4y+1\\ \dot{y}=2x+3y\end{cases}$ $x(0)=0,\quad y(0)=2.$

13. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 5y + 2 \\ \dot{y} = 3x + y + 1 \end{cases}$
$x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$

14. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 2 \\ \dot{y} = x - y + 1 \end{cases}$
$x(0) = -1, \quad y(0) = 2.$

15. $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 4x + y + 1 \end{cases}$
$x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ершова В.В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционная исчисление.–Мн.:Выш.шк.,1976.–256с.

2. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика, ч.IV. –Мн.:Выш.шк.,1987.–240с.

3. Сидоров Г.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекция по теории функций комплексного переменного.–М.:Наука,1982.–488с.

4. Мартыненко В.С. Операционное исчисление.–Изд-во Киевского ун-та, 1968.-198с.

5. Шахно К.У. Элементы теории функции комплексной переменной и операционного исчисления.–Мн.:Выш.шк.,1975.–400с.

6. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / В.А. Болгов, Б.П. Демидович, и др. –М.:Наука,1981,–368с.

7. Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. –М.:Наука,1981.–302с.

8. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. –М.:Наука.1989.–464с.

9. Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А. Введение в теорию аналитических функций.–М.:Просвещение,1977.–319с.

10. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного.–М.:Наука,1970.–319с.

Учебное издание

Гладкий Иван Иванович
Сидоревич Михаил Павлович
Тузик Татьяна Александровна

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Методические указания по дисциплине
“Высшая математика”
для студентов технических специальностей

Редактор *Т.В. Строкач*

Ответственный за выпуск *М.П. Сидоревич*

Компьютерный набор *И.И. Гладкий*

Подписано в печать 01.10.2000 г. Формат 60x84 1/16.
Бумага писч. Усл. п. л. 5,1. Уч. изд. л. 5,5. Тираж 200 экз.
Заказ № 812.

Отпечатано на ризографе Брестского государственного технического университета.
224017, Брест, ул. Московская, 267.