МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

Методические рекомендации и варианты контрольных работ
по курсу “Высшая математика” для студентов
технических специальностей заочной формы обучения

Брест 2008

УДК 519.2.(076)

В настоящей методической разработке приведены вопросы программы и варианты контрольной работы № 1 по разделам «Линейная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных» курса «Высшая математика», изучаемым студентами технических специальностей заочной формы обучения в первом семестре, даны решения типового варианта и задания, рекомендуемые к выполнению на практических занятиях. В организационно-методических указаниях приведены правила оформления контрольной работы.

Составители: И. В. Лизунова, доцент,
Л. Т. Мороз, доцент,
И.И. Гладкий, старший преподаватель.

Рецензент: Савчук В.Ф., зав. кафедрой информатики и прикладной математики учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н., доцент.

Организационно-методические указания

В контрольную работу № 1 включены 8 заданий по линейной алгебре, аналитической геометрии, введению в математический анализ, дифференциальному исчислению функций одной и нескольких переменных.

Нумерация задач состоит из двух чисел: первое число – номер задания, второе (после точки) – номер варианта.

Правила оформления контрольной работы:

1. Контрольная работа выполняется в отдельной, тонкой ученической тетради с отчерченными полями;
2. На обложке обязательно должен быть указан шифр (номер зачетной книжки);
3. Контрольная работа выполняется студентом в соответствии со своим вариантом, который определяется двумя последними цифрами шифра;
4. Каждое задание начинается на новой странице с обязательной записью его полного условия. Если задача имеет общую формулировку, то ее условие переписывают, заменяя общие данные конкретными, соответствующими номеру варианта;
5. Решения всех заданий должны быть подробными и аккуратными, содержать достаточные пояснения, необходимые рисунки и таблицы;
6. Завершает работу список используемой литературы и роспись студента;
7. После рецензии исправления в тексте работы недопустимы;
8. Исправление ошибок, указанных рецензентом, выполняют в той же тетради после росписи студента.

Контрольные вопросы курса «Высшая математика»
I семестр

1. Определители, их свойства и вычисление.
2. Решение систем линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера.
3. Матрицы. Операции над матрицами.
4. Обратная матрица. Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений.
5. Ранг матрицы. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений.
6. Системы линейных однородных уравнений.
7. Векторы, линейные операции над ними.
8. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис.
9. Декартова система координат. Координаты вектора. Условие коллинеарности векторов.
10. Скалярное произведение векторов, его свойства, вычисление, приложения. Условия ортогональности векторов.
11. Векторное произведение вектора, его свойства, нахождение, приложения.
12. Смешанное произведение векторов, его вычисление, приложения. Условия компланарности векторов.
13. Радиус вектор. Полярная система координат.
14. Линейный оператор. Матрица линейного оператора.
15. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.
16. Прямая на плоскости.

17. Кривая второго порядка. Её характеристики.
18. Плоскость.
19. Прямая в пространстве. Взаимное расположение двух прямых.
20. Взаимное расположение прямой и плоскости.
21. Поверхности второго порядка.
22. Понятие функции одной переменной. Элементарные функции. Алгебраические функции.
23. Предел числовой последовательности. Свойства сходящихся последовательностей.
24. Число e.
25. Первый и второй замечательные пределы.
26. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства.
27. Эквивалентные бесконечно малые функции, их приложения к нахождению пределов.
28. Непрерывность функции. Точки разрыва.
29. Свойства функций непрерывных в точке и непрерывных на отрезке.
30. Производная функции. Ее геометрический и механический смыслы.
31. Правила дифференцирования и таблица производных.
32. Производные обратной функции и неявно заданной. Логарифмическая производная.
33. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Инвариантность формы дифференциала.
34. Производные и дифференциалы высших порядков.
35. Дифференцирование параметрически заданной функции.
36. Теорема Ферма. Теорема Ролля.
37. Теорема Коши. Теорема Лагранжа.
38. Правило Лопиталя.
39. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа.
40. Разложение по формуле Тейлора функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.
41. Условия монотонности функции.
42. Необходимое и достаточные условия экстремума.
43. Выпуклость функции. Точки перегиба. Необходимые и достаточные условия существования точки перегиба.
44. Асимптоты графика функции.
45. Вектор-функция скалярного аргумента. Касательная и нормальная плоскость к годографу. Кривизна кривой.
46. Функция нескольких переменных. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
47. Частные производные, их геометрический смысл.
48. Полный дифференциал функции нескольких переменных.
49. Дифференцирование неявных и сложных функций.
50. Частные производные и дифференциалы высших порядков.
51. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
52. Локальный экстремум функции двух переменных. Необходимые и достаточные условия.
53. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.
54. Метод наименьших квадратов.

Контрольная работа №1

Задание 1. В задачах 1.1-1.30 проверить совместность системы линейных уравнений и в случае совместности решить ее тремя способами:

1. по формулам Крамера;
2. методом Гаусса;
3. матричным методом (с помощью обратной матрицы).

1. $\begin{cases} 2x-3y-5z=1, \\ 3x+y-2z=-4, \\ x-2y+z=5. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x+3y-z=2, \\ x-y+3z=-4, \\ 3x+5y=4. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 5x-2y+z=-1, \\ 2x+y+2z=6, \\ x-3y-z=-5. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x-y+3z=1, \\ x+2y+z=8, \\ 4x-3y-2z=-1. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 2x-y+3z=3, \\ x+2y+z=2, \\ x-3y+4z=-1. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x-3y-z=1, \\ 2x+y+z=-7, \\ 2x-y-3z=5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x-3y+z=2, \\ 2x+y+3z=3, \\ 2x-y-2z=8. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 4x+3y-2z=-1, \\ 3x+y+z=3, \\ x-2y-3z=8. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 3x+3y+2z=-1, \\ 2x+y-z=3, \\ x-2y-3z=4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x-2y+z=4, \\ 2x+y+3z=5, \\ 3x+4y+z=-2. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} 3x+y-2z=1, \\ x-2y+3z=5, \\ 2x+3y-z=-4. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 3x+y+2z=-4, \\ x-2y-z=-1, \\ 2x+3y+2z=0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x+3y-z=2, \\ x+2y+3z=0, \\ x-y-2z=6. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x+5y-z=-1, \\ 2x+y-2z=7, \\ x-4y+z=0. \end{cases}$ 15. $\begin{cases} 3x+2y-z=3, \\ x-y+2z=-4, \\ 2x+2y+z=4. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x-3y+z=3, \\ x+y-2z=4, \\ 3x-2y+6z=0. \end{cases}$ 17. $\begin{cases} 3x-2y+2z=3, \\ 2x+y-z=-5, \\ 5x-y+3z=4. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} 2x-3y+3z=0, \\ x+y-2z=-7, \\ x-2y+3z=3. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x+y-2z=1, \\ 2x+3y+z=0, \\ x-2y-z=7. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x+2y-4z=0, \\ 3x+y-3z=-1, \\ 2x-y+5z=3. \end{cases}$ 21. $\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x-y-3z=-1, \\ 3x+3y+z=3. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x+y+2z=-1, \\ 2x-y+2z=-4, \\ 4x+y+4z=-2. \end{cases}$ 23. $\begin{cases} 3x+4y+2z=-1, \\ 2x-y-3z=-5, \\ x+5y+z=0. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} x-4y-2z=-5, \\ 3x+y+z=5, \\ 3x-5y-6z=-8. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x+y-z=1, \\ 8x+3y-6z=2, \\ 4x+y-3z=3. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} 2x-y+5z=1, \\ x-3y+z=-2, \\ 2x+y-z=3. \end{cases}$ 27. $\begin{cases} x+y-2z=0, \\ 3x-y-z=1, \\ 5x-3y+z=5. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 3x-y+2z=1, \\ 2x+y+3z=4, \\ x-2y+5z=3. \end{cases}$ 29. $\begin{cases} 4x-3y-2z=2, \\ 3x+y-z=2, \\ 2x+5y+3z=5. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} 3x+y+z=4, \\ 2x+3y-2z=5, \\ x-4y-2z=-3. \end{cases}$

Задание 2. В задачах 2.1-2.30 даны вершины треугольника ABC: $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$. Найти:

1. проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{BC}$;
2. площадь треугольника ABC;
3. уравнение стороны AB;
4. уравнение высоты CH;
5. уравнение медианы AM;
6. уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;
7. расстояние от точки C до прямой AB;
8. сделать чертеж.

	A	B	C
2.1.	(-2;4),	(3;1),	(10;7).
2.3.	(-12;-1),	(7;-12),	(11;20).
2.5.	(0;2),	(12;-7),	(16;15).
2.7.	(1;0),	(13;-9),	(17;13).
2.9.	(2;5),	(14;-4),	(18;18).
2.11.	(-2;7),	(10;-2),	(8;12).
2.13.	(3;6),	(15;-3),	(13;11).
2.15.	(-4;12),	(8;3),	(6;17).
2.17.	(4;1),	(16;-8),	(14;6).
2.19.	(0;3),	(12;-6),	(10;8).
2.21.	(-3;5),	(-2;-8),	(1;5).
2.23.	(-2;1),	(-4;-3),	(5;4).
2.25.	(2;1),	(-3;-3),	(2;-8).
2.27.	(4;2),	(-1;-5),	(3;-5).
2.29.	(3;4),	(-1;3),	(-2;-5).

	A	B	C
2.2.	(-5;7),	(0;-10),	(4;12).
2.4.	(-10;9),	(2;0),	(6;22).
2.6.	(-9;6),	(3;-3),	(7;19).
2.8.	(-4;10),	(8;1),	(12;13).
2.10.	(-1;4),	(11;-5),	(15;17).
2.12.	(-6;8),	(6;-1),	(4;13).
2.14.	(-10;5),	(2;-4),	(0;10).
2.16.	(-3;10),	(9;1),	(7;15).
2.18.	(-7;4),	(5;-5),	(3;9).
2.20.	(-5;9),	(7;0),	(5;14).
2.22.	(4;-3),	(-1;-4),	(2;6).
2.24.	(3;-2),	(-1;-6),	(5;3).
2.26.	(3;2),	(-1;-6),	(4;-4).
2.28.	(-3;1),	(-6;-6),	(2;-5).
2.30.	(-2;4),	(3;3),	(-2;-6).

Задание 3. В задачах 3.1-3.30 даны четыре точки $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_3(x_3,y_3,z_3)$, $A_4(x_4,y_4,z_4)$. Найти:

1. объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$;
2. угол между прямыми A_1A_2 и A_1A_4 (в градусах);
3. уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
4. уравнение прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$.

3.1.	A_1(5;-1;-4),	A_2(9;3;-6),	A_3(7;10;-14),	A_4(5;1;-3).
3.2.	A_1(1;-4;0),	A_2(5;0;-2),	A_3(3;7;-10),	A_4(1;-2;1)
3.3.	A_1(-3;-6;2),	A_2(1;-2;0),	A_3(-1;5;-8),	A_4(-3;-4;3).
3.4.	A_1(-1;1;-5),	A_2(3;5;-7),	A_3(1;12;-15),	A_4(-1;3;-4).
3.5.	A_1(-4;2;-1),	A_2(0;6;-3),	A_3(-2;13;-11),	A_4(-4;-4;0).
3.6.	A_1(0;4;3),	A_2(4;8;1),	A_3(2;15;-7),	A_4(0;6;4).
3.7.	A_1(-2;0;-2),	A_2(2;4;-4),	A_3(0;11;-12),	A_4(-2;2;-1).
3.8.	A_1(3;3;-3),	A_2(7;7;-5),	A_3(5;14;-13),	A_4(3;5;-2).
3.9.	A_1(4;-2;5),	A_2(8;2;3),	A_3(6;9;-5),	A_4(4;0;6).
3.10.	A_1(-5;0;1),	A_2(-4;-2;3),	A_3(6;2;11),	A_4(3;4;9).
3.11.	A_1(1;-4;0),	A_2(2;-6;2),	A_3(12;-2;10),	A_4(9;0;8).

3.12.	$A_1(-1;-2;-8)$,	$A_2(0;-4;-6)$,	$A_3(10;0;2)$,	$A_4(7;2;0)$.
3.13.	$A_1(0;2;-10)$,	$A_2(1;0;-8)$,	$A_3(11;4;0)$,	$A_4(8;6;-2)$.
3.14.	$A_1(3;1;-2)$,	$A_2(4;-1;0)$,	$A_3(14;3;8)$,	$A_4(11;5;6)$.
3.15.	$A_1(-8;3;-1)$,	$A_2(-7;1;1)$,	$A_3(3;5;9)$,	$A_4(0;7;7)$.
3.16.	$A_1(2;-1;-4)$,	$A_2(3;-3;-2)$,	$A_3(13;1;6)$,	$A_4(10;3;4)$.
3.17.	$A_1(-4;5;-5)$,	$A_2(-3;3;-3)$,	$A_3(7;7;5)$,	$A_4(4;9;3)$.
3.18.	$A_1(-2;-3;2)$,	$A_2(-1;-5;4)$,	$A_3(9;-1;12)$,	$A_4(6;1;10)$.
3.19.	$A_1(-3;4;-3)$,	$A_2(-2;2;-1)$,	$A_3(8;6;7)$,	$A_4(5;8;5)$.
3.20.	$A_1(-3;-2;4)$,	$A_2(-4;2;-7)$,	$A_3(5;0;3)$,	$A_4(-1;3;0)$.
3.21.	$A_1(2;-2;1)$,	$A_2(-3;0;-5)$,	$A_3(0;-2;-1)$,	$A_4(-3;4;2)$.
3.22.	$A_1(5;4;1)$,	$A_2(-1;-2;-2)$,	$A_3(3;-2;2)$,	$A_4(-5;5;4)$.
3.23.	$A_1(3;6;-2)$,	$A_2(0;2;-3)$,	$A_3(1;-2;0)$,	$A_4(-7;6;6)$.
3.24.	$A_1(1;-4;1)$,	$A_2(4;4;0)$,	$A_3(-1;2;-4)$,	$A_4(-9;7;8)$.
3.25.	$A_1(4;6;-1)$,	$A_2(7;2;4)$,	$A_3(-2;0;-4)$,	$A_4(3;1;-4)$.
3.26.	$A_1(0;6;-5)$,	$A_2(8;2;5)$,	$A_3(2;6;-3)$,	$A_4(5;0;-6)$.
3.27.	$A_1(-2;4;-6)$,	$A_2(0;-6;1)$,	$A_3(4;2;1)$,	$A_4(7;-1;-8)$.
3.28.	$A_1(-4;-2;-5)$,	$A_2(1;8;-5)$,	$A_3(0;4;-4)$,	$A_4(9;-2;-10)$.
3.29.	$A_1(3;4;-1)$,	$A_2(2;-4;2)$,	$A_3(5;6;0)$,	$A_4(11;-3;-12)$.
3.30.	$A_1(2;0;1)$,	$A_2(3;-3;1)$,	$A_3(4;2;5)$,	$A_4(-3;7;4)$.

Задание 4. В задачах 4.1 - 4.30 найти указанные пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

4.1. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+x+4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-1}$.

4.2. а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{2x^2+15x+25}{2x^2-x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+1}{2x^2+4x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2\arcsin^2 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{2-x}$.

4.3. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x-x^2}{x^2+4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-1}\right)^{2x-3}$.

4.4. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x+3}{2x^2-x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg}5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{3-x}$.

4.5. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2+1}{3x^3-4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{x\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+4}\right)^{2x+4}$.

4.6. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2-x^2}{4x^2-3x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x-4}\right)^{2x}$.

4.7. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-x+1}{3x^3+x^2+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\operatorname{tg}^2 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-7}{2x-3}\right)^{4x+1}$.

4.8. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{6-x-x^2}{3x^2+8x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-2x+1}{3x^2+4x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\arcsin 6x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+2}\right)^{1-2x}$.

4.9. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-2x-3x^2}{x^2+x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+3}\right)^{3-2x}$.

4.10. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{8-x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{2x^3+5x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x\cdot\operatorname{ctg}5x$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{4-x}$.

4.11. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x-1}{5x^3+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}x}{1-\cos 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x+4}\right)^{1-2x}$.

4.12. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x-1}{5x^3+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{\arcsin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{4x-3}\right)^{4x+1}$.

4.13. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-6x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2+5x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{5\sin^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{2x+5}\right)^{1-3x}$.

4.14. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{3x+7}-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x-7}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot \mathrm{ctg}4x$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{4x+1}\right)^{2x-3}$.

4.15. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^3-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 5x}{\mathrm{tg}^2 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{3x-2}\right)^{6x+1}$.

4.16. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-4x+3}{3x^2+4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2\cos x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2x+8}\right)^{4x-5}$.

4.17. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2-2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-2x}{x(x-2)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6-6\cos 6x}{3x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+5}\right)^{2x-3}$.

4.18. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+11x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x+5}{8x^3-4x+x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\mathrm{tg}8x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-3}{4x+1}\right)^{2x-3}$.

4.19. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)^2}{2x^2+3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x-5}{x^3-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2}{\mathrm{arctg}^2 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+9}\right)^{2-x}$.

4.20. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x-1}{1-x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\cos x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x}$.

4.21. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{7-x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x-x^3}{3x^3-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2\arcsin 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+2}\right)^{x}$.

4.22. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-x^3}{4x^3+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x}{4x+1}\right)^{2x}$.

4.23. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{3x+1}-1}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-x^3}{5x^3+2x^2+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{\operatorname{arctg}^2 3x}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-2}\right)^{2x}$.

4.24. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+1}{4x^3-x^2+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+8}{4x-9}\right)^{3x}$;

4.25. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\sin^2 x}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-4}\right)^{2x}$.

4.26. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-3x+1}{1-5x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 8x}{x\sin x}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x-4}$.

4.27. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-1-x^3}{5x^3+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$;   г) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{3x-1}{3x+4}\right)^{2x+7}$.

4.28. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{x+x^2}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-7}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}3x\cdot\operatorname{ctg}3x$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x}{4x+8}\right)^{5+2x}$.

4.29. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-3x-1}{1-x^2}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5x-9}{7x^2-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 3x}{x^2\operatorname{tg}4x}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{x-1}$.

4.30. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2-3x}{x-\sqrt{x}}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-1}{x^3+4x+4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin x}{\operatorname{tg}^2 3x}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{3x-1}$.

Задание 5. Найти производные y' данных функций:

5.01. а) $y = 2x^3 - \dfrac{3}{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 3$, б) $y = \arccos\sqrt{1-2^x}$,

в) $x - y + e^y \operatorname{arctg} x = 0$.

5.02. а) $y = \dfrac{3}{x} - 2\sqrt[3]{x^5} + 4x^2 + 3$, б) $y = \ln \operatorname{tg}\dfrac{2x+1}{4}$,

в) $y^2 x = e^{\frac{y}{x}}$.

5.03. а) $y = 3x^4 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + x^3 - 1$, б) $y = e^x \cdot \sqrt{1-e^{2x}} - \arcsin e^x$,

в) $x^4 + y^4 = x^2 y^2$.

5.04. а) $y = 5x^3 - \dfrac{8}{x^3} + x^3\sqrt{x} + 2$, б) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$,

в) $x - y^2 + \operatorname{tg}(x^2 y) = 0$.

5.05. а) $y = 4x^5 - \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{\sqrt{x}} + 5$, б) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$,

в) $x^3 + 3xy^2 + 2y^2 - 5x = 1$.

5.06. а) $y = \dfrac{2}{x} - 3x^2 + \sqrt[3]{x^7} + 2$, б) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$,

в) $y^2 = x^2 - x\ln y + 3$.

5.07. а) $y = \sqrt[3]{x^7} + 3x^2 - \dfrac{4}{x} + 2$, б) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{3x - x^2}{1-3x^2}$,

в) $x^2 \ln y - y^2 \ln x = 1$.

5.08. а) $y = \dfrac{9}{x^2} - \sqrt[3]{x^4} - \dfrac{1}{x} + 3x^2$, б) $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$,

в) $y^2 = \dfrac{y-x}{x+y}$.

5.09. а) $y = \dfrac{1}{x^5} + \dfrac{2}{x} - \sqrt[5]{x} - x^3$, б) $y = -\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{2} - 2\ln\sin\dfrac{x}{2}$,

в) $y^2 \sin x = \cos(x-y)$,

5.10. а) $y = \dfrac{8}{x^3} + x^2\sqrt{x} - \dfrac{4}{x} + x^2$, б) $y = \operatorname{tg}^3 \operatorname{tg} x + 3\operatorname{tg}\operatorname{tg} x$,

в) $xe^{-\frac{1}{2}y} + ye^{-\frac{1}{2}x} = 2$.

5.11. а) $y = \dfrac{6}{x^4} + 5x^2 - \sqrt[3]{x^2} + 4$, б) $y = \dfrac{1}{4a}\ln\dfrac{x-a}{x+a} + \dfrac{1}{2a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$,

в) $e^{xy} + x^2 + y^3 = 2$.

5.12. а) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{3x}+2$, б) $y=\mathrm{arctg}(x+1)+\frac{x+1}{x^2+2x+2}$,

в) $e^x+e^y-2e^{xy}=1$.

5.13. а) $y=4x^5-\frac{2}{x^3}+\sqrt[5]{x^2}-1$, б) $y=e^{-x}-\cos e^{-x}\cdot\sin e^{-x}$,

в) $\ln y=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$.

5.14. а) $y=4-\frac{1}{x^6}+3x\sqrt[3]{x^5}+7x^2$, б) $y=\frac{x-e^{2x}}{x+e^{2x}}$,

в) $\sqrt{x^2+y^2}=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$.

5.15. а) $y=x^2-8x^2\sqrt{x}+\frac{3}{x}+2$, б) $y=\mathrm{arctg}\frac{2x^4}{1-x^8}$,

в) $x^4-6x^2y^2+9y^4-5x^2+15y^2-100=0$.

5.16. а) $y=6+3x^2-\frac{2}{x^3}+5\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, б) $y=2^{-\sqrt{x^2-2x+3}}$,

в) $\frac{y}{x}-\sqrt[3]{\frac{x}{y}}=x$.

5.17. а) $y=4x^3+\frac{3}{x}-\sqrt[3]{x^5}-\frac{2}{x^4}$, б) $y=x\arccos\frac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}$,

в) $\sin^2(2x-y^2)=3x+2$.

5.18. а) $y=\frac{7}{x}-\frac{4}{x^3}-2x^6-x^2\sqrt{x}$, б) $y=\frac{\mathrm{arctg}x}{x}-\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

в) $x^2-3xy+y^2+x-5y=0$.

5.19. а) $y=\sqrt[4]{x^3}-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^5}+x^2$, б) $y=\frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6}\ln\frac{x-1}{x+1}$,

в) $y^2\cos x=\sin(3x^2)+y$.

5.20. а) $y=3\sqrt{x}-\sqrt[7]{x^2}+2x^4-6$, б) $y=\mathrm{arctg}\sqrt{4x^2-1}$,

в) $y^2+x^2-\cos(x^2\cdot y^2)=2$.

5.21. а) $y=1-x^3-\sqrt[3]{x^2}+\frac{8}{x^3}$, б) $y=e^x\sqrt{1-e^{2x}}-\arcsin e^x$,

в) $\mathrm{tg}\left(\frac{y}{x}\right)=5x+1$.

5.22. а) $y=4-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+2x^2-\frac{9}{x^2}$, б) $y=\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$,

в) $x^2+e^y-x\cdot\ln y=0$.

5.23. а) $y = x^{-3} + 2x\sqrt[3]{x^5} + \dfrac{3}{x} + 4$, б) $y = \ln(e^x \cos x + e^{-x} \sin x)$,

в) $x^4 - xy^2 + y^3 - 4y + 5 = 0$.

5.24. а) $y = 2 - 2x^{-2} + 3\sqrt[3]{x^2} + 4x$, б) $y = \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1}$,

в) $xy = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

5.25. а) $y = 5 - 2x^{-5} + \sqrt[7]{x^5} + 3x$, б) $y = 3x^3 \arcsin x + (x^2 + 2)\sqrt{1 - x^2}$,

в) $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = 1$.

5.26. а) $y = x^2 + 2x^{-4} + \dfrac{3}{\sqrt{x}} + 7$, б) $y = \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{4}e^{2\sin x}\right)$,

в) $\dfrac{x}{y} = \operatorname{tg}(x^2 - y)$.

5.27. а) $y = 8x^{-3} - \dfrac{2}{x} - \dfrac{7}{x^3} + x\sqrt[7]{x^2}$, б) $y = 3^{\arcsin 3x} + (1 - \arccos 3x)^2$,

в) $e^x \sin y - e^y \cos x = 1$.

5.28. а) $y = 9x^3 + \dfrac{5}{x^2} - \dfrac{7}{x^4} - 4\sqrt{x}$, б) $y = 2\arcsin\dfrac{x-2}{\sqrt{6}} - \sqrt{2 + 4x - x^2}$,

в) $\dfrac{y}{x} = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

5.29. а) $y = 3 - 3x^5 + 7x^{-7} + \sqrt[5]{x}$, б) $y = \ln\dfrac{x\ln x - 1}{x\ln x + 1}$,

в) $x\sqrt{y} + y^3 \cos x = 3$.

5.30. а) $y = -\dfrac{4}{x+1} + (x-3)^2 + 1 + \sqrt[3]{x^5}$, б) $y = \dfrac{1}{3}\sin^3\sqrt{x} - \dfrac{2}{5}\sin^5\sqrt{x} + \dfrac{1}{7}\sin^7\sqrt{x}$,

в) $(x - y)^2 + \cos y^2 = 4$.

Задание 6. Найти уравнения касательной, уравнение нормальной плоскости и вычислить кривизну линии $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точке t_0.

6.01. $\vec{r} = (t - \sin t)\cdot\vec{i} + (1 - \cos t)\cdot\vec{j} + 2\sin t\cdot\vec{k}$, $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

6.02. $\vec{r} = 6t\cdot\vec{i} + 3t^2\cdot\vec{j} + t^3\cdot\vec{k}$, $t_0 = 1$.

6.03. $\vec{r} = 2\sin t\cdot\vec{i} + 3\operatorname{tg}t\cdot\vec{j} + 2\cos t\cdot\vec{k}$, $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

6.04. $\vec{r} = 3\operatorname{ch}t\cdot\vec{i} + 3\operatorname{sh}t\cdot\vec{j} + 3at\cdot\vec{k}$, $t_0 = 0$.

6.05. $\vec{r} = e^t\cdot\vec{i} + e^{-t}\cdot\vec{j} + \sqrt{2}\cdot t\cdot\vec{k}$, $t_0 = 0$.

6.06. $\vec{r} = 2\sin^2 t \cdot \vec{i} + 2\cos^2 t \cdot \vec{j} + \sin 2t \cdot \vec{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

6.07. $\vec{r} = \ln(t-3) \cdot \vec{i} - t \cdot \vec{j} + (t^2 - 16) \cdot \vec{k}$, $t_0 = 4$.

6.08. $\vec{r} = (2-t) \cdot \vec{i} + \sqrt{25 - t^2} \cdot \vec{j} + t^2 \cdot \vec{k}$, $t_0 = 4$.

6.09. $\vec{r} = e^t \cdot \vec{i} + (1 + t^2) \cdot \vec{j} + \operatorname{arctg} t \cdot \vec{k}$, $t_0 = 1$.

6.10. $\vec{r} = e^t \cos t \cdot \vec{i} + e^t \sin t \cdot \vec{j} + e^t \cdot \vec{k}$, $t_0 = 0$.

6.11. $\vec{r} = (t - \sin t) \cdot \vec{i} + (1 - \cos t) \cdot \vec{j} + 4\sin\frac{t}{2} \cdot \vec{k}$, $t_0 = \pi$.

6.12. $\vec{r} = (t^3 - 3) \cdot \vec{i} + (t^2 + 2) \cdot \vec{j} + \ln t \cdot \vec{k}$, $t_0 = 1$.

6.13. $\vec{r} = (t^3 + 8t) \cdot \vec{i} + t^2 \cdot \vec{j} + (5t^5 + 3t) \cdot \vec{k}$, $t_0 = 0$.

6.14. $\vec{r} = 2t \cdot \vec{i} - 3t \cdot \vec{j} + \ln \operatorname{tg} t \cdot \vec{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

6.15. $\vec{r} = 4t \cdot \vec{i} + \ln t \cdot \vec{j} + t^2 \cdot \vec{k}$, $t_0 = 1$.

6.16. $\vec{r} = \ln\cos t \cdot \vec{i} + \ln\sin t \cdot \vec{j} + \sqrt{2} \cdot t \cdot \vec{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

6.17. $\vec{r} = (\cos t + t\sin t) \cdot \vec{i} + (\sin t - t\cos) \cdot \vec{j} + t \cdot \vec{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

6.18. $\vec{r} = (t^2 + 1) \cdot \vec{i} + \cos t \cdot \vec{j} + e^t \cdot \vec{k}$, $t_0 = 0$.

6.19. $\vec{r} = (t+1)^2 \cdot \vec{i} + t^3 \cdot \vec{j} + \sqrt{t^2 + 1} \cdot \vec{k}$, $t_0 = 0$.

6.20. $\vec{r} = (3t - t^3) \cdot \vec{i} + 3t^2 \cdot \vec{j} + (3t + t^2) \cdot \vec{k}$, $t_0 = 1$.

6.21. $\vec{r} = \frac{t}{\sqrt{2}} \cdot \vec{i} + \frac{t}{\sqrt{2}} \cdot \vec{j} + \ln\sin t \cdot \vec{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

6.22. $\vec{r} = \operatorname{ch}^2 t \cdot \vec{i} + \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} t \cdot \vec{j} + \operatorname{sh}^2 t \cdot \vec{k}$, $t_0 = 0$.

6.23. $\vec{r} = e^t \sin t \cdot \vec{i} + \vec{j} + e^t \cos t \cdot \vec{k}$, $t_0 = 0$.

6.24. $\vec{r} = (1 + 3t + 2t^2) \cdot \vec{i} + (2 - 2t + 5t^2) \cdot \vec{j} + (1 - t^2) \cdot \vec{k}$, $t_0 = 1$.

6.25. $\vec{r} = \cos t \cdot \vec{i} + \sin t \cdot \vec{j} + \operatorname{ch} t \cdot \vec{k}$, $t_0 = 0$.

6.25. $\vec{r} = \sqrt{5 - t^2} \cdot \vec{i} - \left(2t - t^2\right) \cdot \vec{j} + \left(5 - 2t^2\right) \cdot \vec{k}$, $t_0 = 1$.

6.27. $\vec{r} = t^2 \cdot \vec{i} + (t^3 - 2) \cdot \vec{j} + t^6 \cdot \vec{k}$, $t_0 = 1$.

6.28. $\vec{r} = \sqrt{t^3 + 3} \cdot \vec{i} - \ln(2t - 1) \cdot \vec{j} + t^3 \cdot \vec{k}$, $t_0 = 1$.

6.29. $\vec{r} = 2\operatorname{tg} t \cdot \vec{i} + 3\cos t \cdot \vec{j} + 3\sin t \cdot \vec{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

6.30. $\vec{r} = e^{t+1} \cdot \vec{i} - (t^2 - 3t + 1) \cdot \vec{j} + \sqrt{2t + 6} \cdot \vec{k}$, $t_0 = -1$.

Задание 7. Исследовать на экстремум следующие функции:

7.01. $z=-\frac{2}{3}x^3+2xy-y^2-1$.

7.02. $z=x^3+3xy^2-15x-12y$.

7.03. $z=x^2+y^2+xy+6x-9y$.

7.04. $z=3x^2-x^3+3y^2+4y$.

7.05. $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$.

7.06. $z=1+15x-2x^2-xy-2y^2$.

7.07. $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

7.08. $z=-3x^2-3y^2+6(x-y)$.

7.09. $z=x^2+y^2+xy-4x-5y$.

7.10. $z=xy+x^2+y^2-3x-6y$.

7.11. $z=3x^2-x^3+3y^2+4y$.

7.12. $z=2x^3+2y^3-6xy+5$.

7.13. $z=3x^3+3y^3-9xy+10$.

7.14. $z=x^3+8y^3-6xy+1$.

7.15. $z=x^2-xy+y^2+3x-2y+1$.

7.16. $z=2y^3-x^2+2xy+4$.

7.17. $z=2xy-3x^2-2y^2+10$.

7.18. $z=e^{x-y}(x^2-2y^2)$.

7.19. $z=x^2+xy+y^2+x-y$.

7.20. $z=e^{2x}(x+y^2+2y)$.

7.21. $z=2x^3+xy^2+3x^2-y^2+1$.

7.22. $z=y^3-6xy-x^2+5$.

7.23. $z=x^2+y^2-2\ln x-18\ln y$.

7.24. $z=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}$.

7.25. $z=x^2+y^2-4x+6y+17$.

7.26. $z=x^2-2xy+4y^3$

7.27. $z=x^2+4xy-y^2-6x-2y-3$.

7.28. $z=x^3+y^3-3xy$.

7.29. $z=6xy-9x^2-9y^2+4x+4y+5$.

7.30. $z=e^{2x}\left(x^2-y^2+2y\right)+3$.

Задание 8:

8.1-8.10. Выпуск некоторым предприятием промышленной продукции *Y* по годам семилетки *X* характеризуется следующими данными:

X	1	2	3	4	5	6	7
Y (усл.ед.)	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7

По методу МНК построить эмпирическую формулу $y=ax+b$, отражающую рост объема продукции за семилетку, и определить прогноз объема выпуска на восьмой год. Сделать чертеж.

Необходимые числовые данные приведены в табл. 1.

Таблица1.

Вариант	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
01	16,00	26,06	36,51	47,16	57,01	67,32	78,21
02	1,29	4,77	8,63	12,05	14,97	19,00	23,31
03	2,29	6,16	11,63	16,81	19,96	25,64	29,31
04	7,05	11,12	16,39	20,06	26,35	30,40	34,97
05	10,73	10,68	11,93	12,08	12,13	12,48	13,54
06	12,18	12,81	13,00	14,07	14,97	15,69	15,96
07	11,04	12,05	12,16	13,57	13,00	14,59	15,63
08	13,14	14,35	14,51	16,17	16,38	18,19	18,62
09	14,34	15,14	16,64	17,04	17,15	18,84	20,14
10	11,77	13,18	13,99	14,78	16,21	17,93	19,38

8.11-8.20. При различных значениях признака X было семь раз измерено значение признака Y. Полученные результаты приведены в таблице:

X	0,30	0,91	1,52	2,13	2,74	3,35	3,96
Y(усл.ед.)	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7

Предполагая, что теоретически зависимость между значениями признаков выражается функцией $y = ax + b$, по методу МНК найти параметры a и b.

Каково значение признака Y при $x = 4{,}25$?

Необходимые числовые данные приведены в табл. 2.

Таблица2.

Вариант	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
11	3,29	3,41	3,72	4,25	4,36	4,58	5,23
12	1,51	1,62	2,25	2,46	2,57	2,97	3,42
13	4,00	3,65	3,78	3,17	3,06	2,74	2,75
14	3,82	3,55	3,17	3,00	2,52	2,55	2,19
15	4,19	4,26	4,44	5,01	5,19	5,36	5,74
16	4,12	4,33	4,45	4,86	4,97	5,29	5,52
17	3,82	4,23	5,14	5,75	6,06	6,87	7,48
18	4,74	4,54	5,22	5,73	6,59	7,07	7,95
19	5,83	5,02	4,71	4,00	3,19	2,58	2,17
20	2,38	2,52	3,17	3,59	3,81	4,06	4,69

8.21-8.30. На химическом производстве в течение семи рабочих смен получены следующие данные о зависимости выхода продукта Y(кг/ч) от температуры реакции T:

T	32	45	51	64	73	80	83
Y(кг/ч)	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7

Предполагая, что зависимость между выходом продукта и температурой реакции линейная $(y = at + b)$, найти по методу МНК параметры a и b.

Каков ожидаемый выход продукта при $t = 90C^o$?

Необходимые числовые данные приведены в табл.3.

Таблица3.

Вариант	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
21	15,3	39,3	52,7	76,0	94,8	89,5	114,8
22	34,7	50,2	54,3	63,0	75,5	81,3	87,8
23	32,3	30,8	26,8	22,3	16,8	10,3	8,8
24	48,7	50,0	53,0	53,9	53,4	53,5	55,2
25	69,0	75,5	79,6	90,3	94,3	96,8	100,3
26	143,6	140,7	142,3	139,2	135,4	132,1	130,4
27	56,9	65,3	70,1	82,5	87,7	97,3	100,7
28	65,8	71,6	75,2	83,7	92,4	94,6	95,4
29	126,4	125,5	120,7	117,8	113,1	115,2	112,0
30	58,4	61,6	69,3	71,2	76,8	75,6	80,8

Решение типового варианта контрольной работы №1

Задание 1. Проверить совместимость системы линейных уравнений и в случае совместности решить ее тремя способами:

1. по формулам Крамера;
2. методом Гаусса;
3. матричным методом (с помощью обратной матрицы).

$$\begin{cases} 2x+3y+2z=9, \\ x+2y-3z, \\ 3x+4y+z=16. \end{cases} \qquad (1)$$

Решение

1) по формулам Крамера.

Вычислим главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4-27+8-12-3=-6.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система совместна.

Вычислим определители, полученные из главного замещением соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 14 & 2 & -3 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 18-144+112+108-42=-12.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 2 \\ 1 & 14 & -3 \\ 3 & 16 & 1 \end{vmatrix} = 28-81+32-84+96-9=-18.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 14 \\ 3 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 64+126+36-54-112-48=12.$$

По формулам Крамера получим

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-12}{-6}=2; \qquad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-18}{-6}=3; \qquad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{12}{-6}=-2.$$

Таким образом, $\begin{cases} x=2, \\ y=3, \\ z=-9, \end{cases}$ - решение системы (1).

2) Метод Гаусса. По данной системе составим матрицу и проведем необходимые элементарные преобразования строк

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & -3 & 14 \\ 3 & 4 & 1 & 16 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & 8 & -19 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & 8 & -19 \\ 0 & 0 & 12 & -24 \end{pmatrix}.$$

Первая строка записана без изменений во всех преобразованиях.

Вторая строка второго преобразования получена из первой строки вычитанием удвоенных элементов второй строки первого преобразования.

Третья строка второго преобразования получена вычитанием из утроенной первой строки, удвоенной третьей строки первого преобразования. Третья строка третьего преобразования получена сложением второй и третьей строк второго преобразования.

Последней матрице третьего преобразования соответствует система, эквивалентная исходной:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9, \\ -y + 8z = -19, \\ 12z = -24. \end{cases} \qquad (2)$$

Получением системы (2) из (1) завершен прямой ход метода Гаусса. Из (2), двигаясь снизу вверх, реализуем обратный ход метода Гаусса.

$z = -\dfrac{24}{12} = -2$; $y = 8z + 19 = 19 - 16 = 3$; $x = \dfrac{1}{2}(9 - 2z - 3y) = \dfrac{1}{2}(9 + 4 - 9) = 2$.

Итак: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}$ -решение системы (1).

3) Матричный метод решения.

По системе (1) составим матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad \chi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Тогда (1) примет вид

$$A \cdot X = B \qquad (3)$$

Решение матричного уравнения (3):

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

где A^{-1} - обратная матрица для матрицы А.

Матрицу A^{-1} находим по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где $\Delta \neq 0$ - определитель матрицы А; A_{ij} - алгебраические дополнения элементов a_{ij} определителя матрицы А.

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 28 - 30 - 4 = -6.$$

Вычислим алгебраические дополнения элементов этого определителя:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно:

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Откуда

$$X = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 126+70-208 \\ -90-56+128 \\ -18+14+16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \\ z = -2. \end{cases}$$

Ответ: $(2,3-2)$

Задание 2. Даны вершины треугольника ABC: A(4;3), B(-3;3), C(2;7). Найти: **1.** проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{BC}$;

2. площадь треугольника ABC;

3. уравнение стороны AB;

4. уравнение высоты CH;

5. уравнение медианы AM;

6. уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;

7. расстояние от точки C до прямой AB;

8. сделать чертеж.

Решение

1) $\text{Пр}_{\overline{BC}}\overline{AB} = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BC}\right|}$ (из скалярного произведения $(\overline{AB}\cdot\overline{BC})$). Находим

$$\overline{AB}=(-7;0);\ \overline{BC}=(5;4).\ \overline{AB}\cdot\overline{BC}=(-7)\cdot 5+0\cdot 4=-35.$$

$$\left|\overline{BC}\right|=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}.\ \ \text{Пр}_{\overline{BC}}\overline{AB}=-\frac{35}{\sqrt{41}}.$$

2) $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overline{BA}\times\overline{BC}\right|$ (из векторного произведения $\overline{BA}\times\overline{BC}$).

$$\overline{BA}=(7;0);\ \overline{BC}=(5;4).\ \overline{BA}\times\overline{BC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 7 & 0 & 0\\ 5 & 4 & 0\end{vmatrix}=28\bar{k}.$$

$$\left|\overline{BA}\times\overline{BC}\right|=\left|28\cdot\bar{k}\right|=28\cdot\left|\bar{k}\right|=28,\ \left|\bar{k}\right|=1.$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 28=14\ \text{(ед. кв.)}.$$

3) Используем формулу уравнения прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0},$$

где $A(x_0;y_0)$, $B(x_1;y_1)$.

Тогда

$$\frac{x-4}{-3-4}=\frac{y-3}{-3-3};\ 6(x-4)=7(y-3),$$

$6x-7y-3=0$ - уравнение прямой AB.

4) Для полученного уравнения прямой AB: $k_{AB}=\dfrac{6}{7}$; так как $CH\perp AB$, то $k_{CH}\cdot k_{AB}=-1$ (условие перпендикулярности).

$$k_{CH}\cdot\frac{6}{7}=-1\Rightarrow k_{CH}=-\frac{7}{6}.$$

Тогда по формуле уравнения прямой, проходящей через точку $A(x_0;y_0)$ с угловым коэффициентом k: $y-y_0=k(x-x_0)$, получим:

$y-7=-\dfrac{7}{6}(x-2)$ или $7x+6y-56=0$ - уравнение высоты CH.

5) Найдем середину отрезка BC или точку $M\left(\dfrac{-3+2}{2};\dfrac{3+7}{2}\right)$, т.е. $M\left(-\dfrac{1}{2};5\right)$. Для составления уравнения AM воспользуемся формулой уравнения прямой, проходящей через две точки как в пункте 3.

$$\frac{x-4}{-1/2-4}=\frac{y-3}{5-3};\ \frac{x-4}{-9/2}=\frac{y-3}{2};\quad \frac{x-4}{-9}=\frac{y-3}{4};\quad 4(x-4)=-9y+27;$$

$4x+9y-43=0$ - уравнение медиана AM.

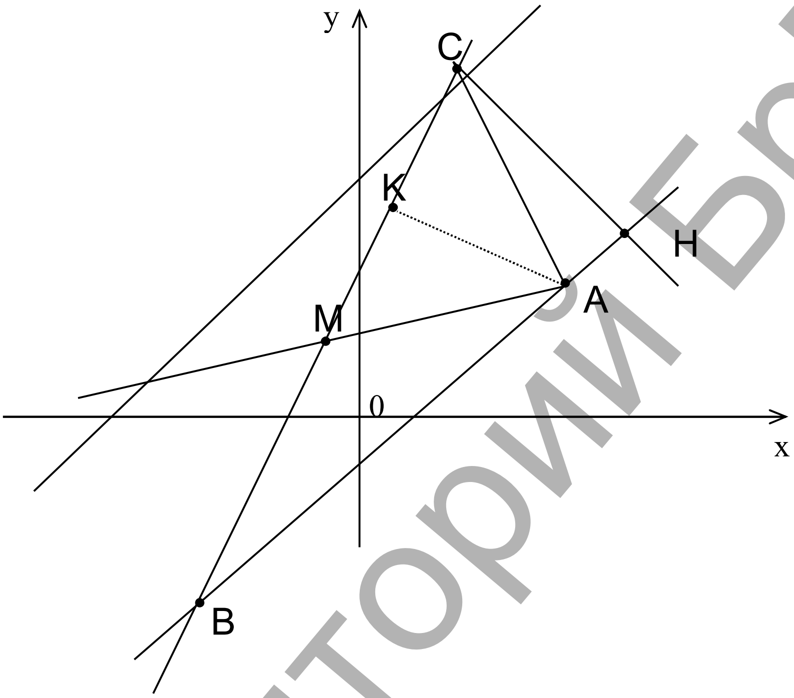
6) Так как $k_{AB} = \dfrac{6}{7}$, то уравнение прямой, проходящей через точку C с таким же угловым коэффициентом имеет вид

$$y - 7 = \frac{6}{7}(x - 2); \quad 6x - 7y + 37 = 0.$$

7) Расстояние от точки C(2;7) до прямой AB: $6x - 7y - 3 = 0$ найдем по формуле

$$d = \frac{|62 - 7 \cdot 7 - 3|}{\sqrt{36 + 49}} = \frac{40}{\sqrt{85}} \approx 4{,}34.$$

8) Решение задачи проиллюстрируем на чертеже.



Задание 3. Даны четыре точки: $A_1(4;7;8)$, $A_2(-1;13;0)$, $A_3(2;4;9)$, $A_4(1;8;9)$.
Найти: **1.** объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$;

2. угол между прямыми A_1A_2 и A_1A_4 (в градусах);

3. уравнение плоскости A_1, A_2; A_3;

4. уравнение прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$.

Решение

1) Найдем объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ по формуле:

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\left|\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4}\right|; \ \overline{A_1A_2} = (-5;6;-8); \ \overline{A_1A_3} = (-2;-3;1);$$

$$\overline{A_1A_4} = (-3;1;1).$$

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix} -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 20 - 6 + 88 = 102.$$

$$V_{пир} = \frac{1}{6} \cdot 102 = 17 \text{ (куб. ед.).}$$

2) Для нахождения угла между прямыми (A_1A_2) и (A_1A_4), найдем угол между направляющими векторами этих прямых, т.е. векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_4}$.

$$\cos\varphi = \cos(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4}) = \frac{\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_4}}{\left|\overline{A_1A_2}\right| \cdot \left|\overline{A_1A_4}\right|};$$

$$\cos\varphi = \frac{-5\cdot(-3)+6\cdot 1-8\cdot 1}{\sqrt{25+36+64}\cdot\sqrt{9+1+1}} = \frac{13}{\sqrt{125}\cdot\sqrt{11}} \approx 0.3502, \text{ тогда } \varphi \approx 69^\circ 30'.$$

3) Уравнение плоскости по трем точкам, не лежащим на одной прямой: $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_3)$, $A_3(x_3;y_3;z_3)$ находим в виде:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Для нашего случая имеем: $\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Раскрыв определитель по элементам первой строки, получим:

$$-18(x-4)+21(y-7)+27(z-8)=0 \text{ или } 6(x-4)-7(y-7)-9(z-8)=0$$

$6x-7y-9z+97=0$ - уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.

4) Составим уравнение прямой A_4M перпендикулярной плоскости $A_1A_2A_3$. Для этого направляющий вектор прямой приравняем к нормальному вектору плоскости $A_1A_2A_3$, т.е. $\overline{S} = \overline{n} = (6;-7;-9)$.

Уравнение A_4M имеет вид:

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-8}{-7} = \frac{z-9}{-9}.$$

Задание 4. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

Решение

а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+6x-5}{7x^2-x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{6}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(7-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{6}{x}-\frac{5}{x^2}}{7-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \left|\begin{matrix} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{A}{x^n}=0 \\ n>0; \qquad A=\text{const} \end{matrix}\right| = \frac{2}{7}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\cdot\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2\cdot\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(1-x^2)}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(1+\sqrt{1-x^2})}=\dfrac{1}{2}.$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\cdot \mathrm{tg}2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot\sin^2 2x\cdot\cos 2x}{2x\cdot\sin 2x}=$

$=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x=2\cdot 1\cdot 1=2.$

При решении примера использована обобщенная форма I замечательного предела $\lim\limits_{f(x)\to 0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$, при $f(x)=2x$,а также теорема о пределе непрерывной функции: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x-8}\right)^{2x-3}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5x-1}{5x-8}-1\right)^{2x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{5x-8}\right)^{2x-3}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{5x-8}\right)^{\frac{5x-8}{7}\cdot\frac{7}{5x-8}\cdot(2x-3)}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{7}{5x-8}\right)^{\frac{5x-8}{7}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7\cdot(2x-3)}{5x-8}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{7}{5x-8}\right)^{\frac{5x-8}{7}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{14-\frac{21}{x}}{5-\frac{8}{x}}}=e^{\frac{14-0}{5-0}}=e^{\frac{14}{5}}=\sqrt[5]{e^{14}}.$

При вычислении этого предела использована обобщенная форма второго замечательного предела: $\lim\limits_{f(x)\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$ и теорема о пределе показательно-степенной функции:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}=\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}$$

где x_0 конечная или бесконечно удаленная точка.

Задание 5. Найти производные данных функций

$$\textbf{а)}\ y=10+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4x}+\frac{2}{x\sqrt{x}}.$$

Решение

Применяя таблицу производных и известные правила дифференцирования, находим:

$$y' = \left(10 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4x} + \frac{2}{x\sqrt{x}}\right)' = \left(10 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x} + 2x^{-\frac{3}{2}}\right)' =$$

$$= x^2 + \frac{-1}{4x^2} - 2\cdot\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = x^2 - \frac{1}{4x^2} - \frac{3}{\sqrt{x^5}}.$$

б) $y = \frac{1}{2}\ln tg\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$

Решение

$$y' = \left(\frac{1}{2}\ln tg\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)' = \frac{1}{2}\left(\ln tg\frac{x}{2}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{tg\frac{x}{2}}\cdot\left(tg\frac{x}{2}\right)' -$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{(\cos x)'\cdot\sin^2 x - \cos x\cdot(\sin^2 x)'}{\sin^4 x} = \frac{1}{2}\cdot ctg\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3 x + \cos x\cdot 2\sin x\cdot\cos x}{\sin^4 x} = \frac{1}{4}\cdot ctg\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} + \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{\sin^3 x} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} + \frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin x} + \frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x} = \frac{1}{2\sin x}\left(1 + \frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = \frac{1}{\sin^3 x}.$$

При нахождении производной воспользовались правилами дифференцирования суммы, дроби, сложной функции и таблицей производных.

в) $x^2 + 3y^3 - \frac{x^2}{y} = 0.$

Решение

Имеем неявно заданную функцию $F(x,y) = 0$. Дифференцируем обе части равенства по x, считая y функцией от x.

$$2x + 3\cdot 3y^2\cdot y' - \frac{2xy - x^2y'}{y^2} = 0.$$

Применили правила дифференцирования дроби и сложной функции. Выразим из полученного равенства y':

$$2x + 9y^2\cdot y' - \frac{2x}{y} + \frac{x^2}{y^2}y' = 0. \qquad y'\left(9y^2 + \frac{x^2}{y^2}\right) = \frac{2x}{y} - 2x.$$

$$y' = \frac{\frac{2x}{y}\cdot(1-y)}{9y^2 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{2x\cdot(1-y)y^2}{y\left(9y^4 + x^2\right)} = \frac{2xy\cdot(1-y)}{9y^4 + x^2}.$$

Задание 6. Найти уравнение касательной, уравнение нормальной плоскости и вычислить кривизну линии

$$\overline{r} = (t^3 + t - 1)\vec{i} + (2t^2 + 3t + 2)\vec{j} + (t^2 + 1)\vec{k}\text{, в точке } t_0 = 1.$$

Решение

Канонические уравнения касательной к кривой $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеют вид $\dfrac{x - x_0}{x'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{y'(t_0)} = \dfrac{z - z_0}{z'(t_0)}$, а уравнение нормальной плоскости $x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$.

В данном случае $x(t) = t^3 + t - 1$, $y(t) = 2t^2 + 3t + 2$, $z(t) = t^2 + 1$; $x_0 = x(t_0) = x(1) = 1$, $y_0 = y(t_0) = y(1) = 7$, $z_0 = z(t_0) = z(1) = 2$; $M_0(1;7;2)$.

Найдем

$$x'(t) = 3t^2 + 1,\ y'(t) = 4t + 3,\ z'(t) = 2t;$$

$$x'(t_0) = x'(1) = 4,\ y'(t_0) = y'(1) = 7,\ z'(t_0) = z'(1) = 2.$$

Тогда

$\dfrac{x - 1}{4} = \dfrac{y - 7}{7} = \dfrac{z - 2}{2}$ - уравнения касательной,

$4(x - 1) + 7(y - 7) + 2(z - 2) = 0$ или

$4x + 7y + 2z - 57 = 0$ - уравнение нормальной плоскости.

Кривизну пространственной линии $\vec{r} = \vec{r}(t)$ вычислим по формуле

$$K = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}.$$

Найдем вектора $\vec{r}' = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$ и $\vec{r}'' = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j} + z''(t)\vec{k}$.

$$\vec{r}' = (3t^2 + 1)\vec{i} + (4t + 3)\vec{j} + 2t\vec{k} \text{ и } \vec{r}'' = 6t\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}.$$

При $t_0 = 1$ получим $\vec{r}' = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{r}'' = 6\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$.

Тогда векторное произведение $\vec{r}' \times \vec{r}''$ равно вектору

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 7 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 26\vec{k}.$$

Вычислим модуль векторного произведения

$$|\vec{r}' \times \vec{r}''| = \sqrt{6^2 + 4^2 + 26^2} = \sqrt{36 + 16 + 676} = \sqrt{729} = 27.$$

и модуль вектора $\vec{r}'$: $|\vec{r}| = \sqrt{4^2 + 7^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 49 + 4} = \sqrt{69}$.

Тогда

$$K = \frac{27}{\left(\sqrt{69}\right)^3} = \frac{27}{69\sqrt{69}} = \frac{9}{23\sqrt{69}} \approx 0{,}047.$$

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy + 1$.

Решение

Найдем частные производные $z'_x = 3x^2 - 3y$, $z'_y = 3y^2 - 3x$.

Приравнивая их к нулю, получим систему $\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$

Решая систему методом исключения, находим

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x^4 - x = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2, \\ x\left(x^3 - 1\right) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, получим две точки $M_1(0;0)$ и $M_2(1;1)$, в которых функция может иметь экстремум.

Найдем вторые частные производные $z''_{xx} = 6x$, $z''_{yy} = 6y$, $z''_{xy} = -3$.

Рассмотрим точку $M_1(0;0)$.

Вычислим $A = z''_{xx}(M_1) = 0$, $B = z''_{xy}(M_1) = -3$, $A = z''_{xx}(M_1) = 0$.

Тогда $\Delta = AC - B^2 = -9$. Так как $\Delta < 0$, то в точке $M_1(0;0)$ экстремума нет.

В точке $M_2(1;1)$, имеем $A = z''_{xx}(M_2) = 6$, $B = z''_{xy}(M_2) = -3$, $A = z''_{xx}(M_2) = 6$.

Следовательно $\Delta = AC - B^2 = 36 - 9 = 27$. Так как $\Delta > 0$ и $A > 0$, то в точке $M_2(1;1)$ у функции минимум $z_{min} = z(1;1) = 0$.

Ответ: в точке $M_2(1;1)$ функция имеет минимум, $z_{min} = z(1;1) = 0$.

Задание 8. При различных значениях признака X было 5 раз измерено значение признака Y. Полученные результаты приведены в таблице.

X	1	2	3	4	5
Y	5,5	6,.5	5,0	3,0	3,5

Предполагая, что зависимость между значениями признаков выражается линейной функцией $y = ax + b$, по методу наименьших квадратов найти параметры a и b. Каково значение признака Y при $x = 6$? Сделать чертеж.

Решение

Наилучшими будут те значения параметров a и b, которые обращают в минимум сумму

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{5} (ax_i + b - y_i)^2 .$$

В точке минимума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{5} x_i = \sum\limits_{i=1}^{5} x_i y_i , \\ a\sum\limits_{i=1}^{5} x_i + 5b = \sum\limits_{i=1}^{5} y_i . \end{cases}$$

Составим расчетную таблицу

x_i	x_i^2	y_i	$x_i y_i$
1	1	5,5	5,5
2	4	6,5	13,0
3	9	5,0	15,0
4	16	3,0	12,0
5	25	3,5	17,5
15	55	23,5	63

В нашем случае система примет вид

$$\begin{cases} 55a + 15b = 63, \\ 15a + 5b = 23,5. \end{cases}$$

Так как определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{vmatrix} = 50 \neq 0$, то система имеет единственное решение.

Так как

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 63 & 15 \\ 23,5 & 5 \end{vmatrix} = -37,5, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 55 & 63 \\ 15 & 23,5 \end{vmatrix} = 347,5,$$

то по формулам Крамера

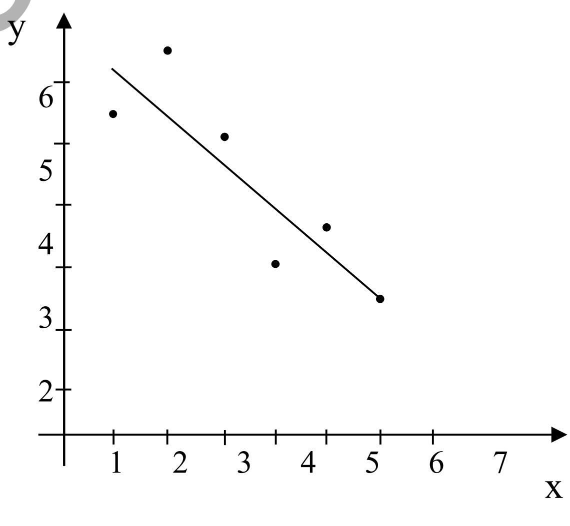
$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -0,75, \quad b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 6,95.$$

Итак, искомая эмпирическая формула имеет вид

$$y = -0,75x + 6,95.$$

Вычислим $y(6) = -0,75 \cdot 6 + 6,95 = -4,5 + 6,95 = 2,45$.

Сделаем рисунок



Задания для аудиторного занятия «Определители. Матрицы. Системы»

1. Вычислить определители:

$$а)\ \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix};\ б)\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -4 \end{vmatrix};\ в)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Ответ: а) –7; б) 9; в) –6.

2. Вычислить определители методы разложения по строке или столбцу:

$$а)\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix};\qquad б)\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ответ: а) 3; б) –6.

3. Найти $3A - 2B$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 3 & -8 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Найти произведение матриц:

$$а)\ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};\ б)\ \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};\ в)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: а) $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 6 & -3 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 19 & 11 \\ 26 & 17 \end{pmatrix}$.

5. Найти обратную матрицу A^{-1}: а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -4/7 & 3/7 & 6/7 \\ -7/7 & 3/7 & -1/7 \\ 1/7 & 1/7 & 2/7 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса:

$$а)\ \begin{cases} 3x + y + 7 = 4, \\ 2x + 3y - 2z = 5, \\ x - 4y - 27 = -3, \end{cases}\qquad б)\ \begin{cases} 4x - 3y - 2z = 2, \\ 3x + y - z = 2, \\ 2x + 5y + 3z = 5. \end{cases}$$

Ответ: а) (1;1;0); б) (1;0;1).

Задания для аудиторного занятия
«Векторы. Полярная система координат»

1. Даны векторы: $\vec{a}=(2;-1;3)$, $\vec{b}=(0;-4;5)$. Найти:

а) $2\vec{a}-3\bar{b}$; б) $\vec{a}\cdot(2\bar{a}-3\bar{b})$; в) $\text{пр}_{\vec{a}}(2\bar{a}-3\bar{b})$; г) $\cos\varphi$, где $\varphi=\bar{a},\bar{b}$.

Ответ: а) (4;10;-9); б) –29; в) $-\dfrac{29}{\sqrt{14}}$; г) 0,79.

2. Будут ли перпендикулярны векторы

а) $\vec{a}=(-2;1;0)$; $\vec{b}=(2;4;5)$; б) $\bar{a}=(-3;0;4)$; $\bar{b}=(-2;5;6)$.

3. Даны точки A(-1;3;4), B(0;-2;1), C(-2;3;1). Найти: а) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$; б) площадь треугольника ABC.

Ответ: а) (15;6;-5); б) $\dfrac{\sqrt{286}}{2}$.

4. Найти момент силы $\vec{F}=(-1;3;0)$, приложеной в точке B(2;-1;3), относительно точки A(-1;3;-4).

Ответ: (21;7;-5)

5. Даны векторы: $\vec{a}=(-1;0;3)$, $\vec{b}=(0;4;2)$, $\vec{c}=(3;1;2)$. Найти: а) $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$; б) объем пирамиды, построенной на векторах $\bar{a},\bar{b},c$ как на ребрах.

Ответ: а) –42; б) 7.

6. Лежат ли в одной плоскости точки: а) A (1;2;-1), B(4;1;5), C(-1;2;1), D(6;1;3); б) A (2;0;4), B(-1;3;2), C(0;3;1), D(-1;4;0)?

7. Построить линии, заданные уравнениями в полярной системе координат: а) $r=2$; б) $\varphi=\dfrac{3}{4}\pi$; в) $r=a\varphi$ $(a>0)$; г) $r=-3\cos\varphi$; д) $r=-2\sin\varphi$; е) $z=2(1+\cos\varphi)$.

8. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей A:

$$\text{а) } A=\begin{pmatrix}3 & 8\\ 5 & 6\end{pmatrix};\quad \text{б) } A=\begin{pmatrix}7 & 0 & 0\\ 10 & -19 & 10\\ 12 & -24 & 13\end{pmatrix}.$$

Ответ: а) $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=11$; $\vec{x}^{(1)}=\left(-\dfrac{8}{5}t;t\right)$, $t\neq 0$; $t\in R$; $\vec{x}^{(2)}=(t;t)$, $t\neq 0$, $t\in R$;

б) $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=7$; $\lambda_3=-7$; $\vec{x}^{(1)}=(0;2t;t)$, $\vec{x}^{(2)}=(7t;5t;6t)$; $\vec{x}^{(3)}=(0;5t;6t)$; $t\neq 0$, $t\in R$.

Задания для аудиторного занятия «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве»

1. По данным уравнением построить прямые, найти их угловые коэффициенты и отрезки отсекаемые на осях координат: а) $2x-y+3=0$; б) $5x+2y-8=0$; в) $3x-8y+16=0$; г) $3x-y=0$.

2. Записать уравнения прямых, которые проходят через точку $M_0(3;-1)$ и параллельны: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) биссектрисе первого координатного угла; г) прямой $y=3x+9$.

Ответ: а) $y=-1$; б) $x=3$; в) $y=x+4$; г) $y=3x-10$.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(-1;3)$ и $M_2(4;5)$.

Ответ: $2x-5y+17=0$.

4. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2;3)$ и перпендикулярной прямой $2x-3y+8=0$.

Ответ: $3x+2y=0$.

5. Точка $M(2;-5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x-2y-7=0$. Вычислить площадь квадрата.

Ответ: 5.

6. Построить линии, заданные уравнениями: а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; б) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$; в) $y^2=4x$; г) $y=-\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$; д) $x=-\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16}$; е) $x=2\sqrt{-y}$.

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-1;3)$ а) перпендикулярно вектору $\overline{n}=(3;2;-4)$; б) параллельно плоскости $5x-4y+8z-9=0$; в) параллельно векторам $\vec{a}=(-1;3;4)$; $\overline{b}=(3;0;-2)$.

Ответ: а) $3x+2y-4z+8=0$; б) $5x-4y+8z-38=0$; в) $6x-10y+9z-49=0$.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;-1;3)$; $M_2(-1;0;3)$, $M_3(0;-2;5)$.

Ответ: $2x+6y+5z-13=0$.

9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;-1;3)$ а) параллельно вектору $\vec{a}=(4;0;5)$; б) параллельно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z}{0}$; в) перпендикулярно плоскости $3x+7y+5z=0$.

Ответ: а) $\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-3}{5}$; б) $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{5}$; в) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{x}=\frac{z-3}{5}$.

Задания для аудиторного занятия «Пределы. Непрерывность»

1. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+8x-7}{2x^3+5x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^2+7x+8}{5x-4x^2+13}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x+8}{14x^2+9}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x+3}{7x+4}$.

Ответ: а) 0; б) $-\dfrac{5}{2}$; в) ∞; г) $\dfrac{6}{7}$

2. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-8x+4}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-1}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2-x-2}$.

Ответ: а) 1; б) 0; в) $\dfrac{2}{3}$.

3. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{14-x}-4}{\sqrt{7-x}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+4}-2}{x(x-1)}$.

Ответ: а) $\dfrac{1}{3}$; б) $\dfrac{3}{4}$; в) $-\dfrac{1}{2}$.

4. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}4x}{\sin 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg}3x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{arctg}8x}$.

5. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x+2}\right)^{x}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{4x+2}{2x-5}\right)^{3x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{3x+5}$.

Ответ: а) 0; б) $+\infty$; в) e^{-10}; г) e^{6}.

6. Исследовать на непрерывность и построить график функции

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x<0 \\ \cos x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2} \\ x-\dfrac{\pi}{2}, & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Задания для аудиторного занятия «Дифференциальное исчисление функций одной переменной»

1. Найти производные функций:

а) $y=3x^2-\frac{2}{x^3}+7\sqrt{x^3}-4\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$; б) $y=\sin(3x-8)$; в) $y=\operatorname{tg}\left(5x^2+6x\right)$;

г) $y=e^{-\cos x}$; д) $y=\sin(1-2x)\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$; е) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\cdot\cos^2 7x$;

ж) $y=\arcsin(1-x)\sqrt{1-4x^2}$; з) $y=\frac{\ln\left(1+2x^2\right)}{1-x}$; и) $y=\frac{\operatorname{ctg}(5x+4)}{\sqrt{1-4x}}$.

2. Найти y'

а) $2xy^3-\frac{4x}{y^2}=7$; б) $3x^2y^2+\frac{y}{x}-5x=0$;

в) $\cos(x-2y)+xy^3=5$; г) $6\sqrt{x}y^2-\sin(x+y)-5y=0$.

3. Найти y''

а) $y=e^{1-4x}$; б) $y=x^2e^{7x}$; в) $y=\sin\left(3x^2+8\right)$; г) $y=(x+1)\cos 4x$.

4. Найти дифференциал dy, если

а) $y=\sqrt{1-4x}$; б) $y=x^2\ln(1-5x)$; в) $y=\frac{1-x^2}{\cos 3x}$.

5. Найти дифференциал второго порядка функции

а) $y=e^{-x^2}$; б) $y=\sin^2 2x$.

6. Найти пределы по правилу Лопиталя

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2+8x}{13x^2-4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{2x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{\arcsin 4x}$.

7. Провести полное исследование функции и построить ее график

а) $y=e^{2x-x^2}$; б) $\frac{x^2}{2-x}$.

Ответ: а) $y_{max}(1)=e$, точки перегиба $M_1\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2};\sqrt{e}\right)$, $M_1\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2};\sqrt{e}\right)$;

б) $y_{min}(0)=0$, $y_{max}(4)=-8$, асимптоты $x=2$; $y=-x-2$.

8. Найти уравнение касательной, уравнение нормальной плоскости и вычислить кривизну линии $\vec{r}=\left(t^3+t-1\right)\vec{i}+\left(2t^2+3t+2\right)\vec{j}+\left(t^2+1\right)\vec{k}$ в точке $t_0=0$.

Ответ: $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{0}$ - уравнение касательной, $x+3y-5=0$ - уравнение нормальной плоскости, $K=0,24$.

Задания для аудиторного занятия «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных»

1. Найти частные производные

а) $z = 3x^2y - y^2\cos(3-4x)$; б) $z = e^{1-3x^2} \cdot y + \dfrac{\operatorname{tg}x}{y}$;

в) $z = \dfrac{y^2}{x^3} - \sqrt{2x-1} \cdot \sin xy$; г) $u = xyz^3$.

2. Найти частные производные второго порядка

а) $z = e^{3x^2} \cdot y^2$; б) $z = (x+y)^2 + \dfrac{3x}{y^2}$; в) $z = e^{x-2y} + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

3. Найти полный дифференциал, если

а) $z = \sin\left(x^2 + y^2\right)$; б) $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$; в) $u = xyz$.

4. Найти d^2z, если а) $z = e^{xy}$; б) $z = e^x \cos y$.

5. Исследовать на экстремум функции

а) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$; б) $z = e^{xy}\left(x^2 - 2y^2\right)$.

Ответ: а) $z_{min}(2;1) = -28$, $z_{max}(-2;-1) = 28$; б) $z_{max}(-4;-2) = 8e^{-2}$.

6. Табличные данные

x	19,1	25,0	30,1	36,0	40,0	45,1	50,0
y	76,30	77,80	79,75	80,80	8,38	83,90	85,10

Отвечают формуле $y = ax + b$. Методом наименьших квадратов найти a и b.

Литература

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Наука, 1985, т. I.
2. Жевняк Р. М., Карпук А. А. Высшая математика, ч.1-2, - Минск: ВШ, 1984-1988.
3. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. - М.: Наука, 1985.
4. Сборник задач по математике для втузов (под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича). - М.: Наука, 1981, ч. I.
5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике (под ред. А.П. Рябушко). – Минск: ВШ, 2000, ч. 1.
6. Гусак А.А. Высшая математика, т.1. - Минск: ВШ, 1988.
7. Гусак А.А. Пособие к решению задач по высшей математике. – Минск: ВШ, 1988.

Содержание

Учебное издание

Составители:
Лизунова Ирина Владимировна,
Мороз Людмила Трофимовна,
Гладкий Иван Иванович

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

Методические рекомендации и варианты контрольных работ по курсу “Высшая математика” для студентов технических специальностей заочной формы обучения

Ответственный за выпуск: Лизунова И.В.
Редактор: Строкач Т.В.
Компьютерная верстка: Боровикова Е.А.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 02.09.2008 г. Формат 60х84 1/16. Бумага «Снегурочка».
Усл. п. л. 2,1. Уч.-изд. л. 2,25. Заказ № 874. Тираж 150 экз.
Отпечатано на ризографе Учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.