МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования

«Брестский государственный технический университет»

Кафедра высшей математики

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические рекомендации и варианты контрольной работы по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов технических специальностей заочной формы обучения

Брест 2008

УДК 519.2.(076)

В настоящей методической разработке приведены варианты контрольных заданий по разделу “Теория вероятностей и математическая статистика” общего курса высшей математики для студентов технических специальностей заочной формы обучения, даны методические рекомендации, полезные для успешного выполнения контрольной работы.

Составители: **Гладкий И.И.**, старший преподаватель,
Каримова Т.И., доцент, к.ф.-м.н.,
Махнист Л.П., доцент, к.т.н.

Рецензент: **Савчук В.Ф.**, зав. кафедрой информатики и прикладной математики учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н., доцент.

Организационно-методические указания

В контрольную работу по разделу “Теория вероятностей и математическая статистика” общего курса высшей математики включено 6 заданий. В нумерации задач первое число – номер задания (задачи), второе (после точки) – номер варианта.

Контрольная работа должна выполняться студентом в соответствии со своим вариантом. **Номер варианта определяется по двум последним цифрам номера зачетной книжки студента.**

При выполнении контрольной работы условия задач нужно записывать полностью. В случае, если задача имеет общую формулировку, ее условие следует переписывать, заменяя общие данные конкретными, соответствующими номеру варианта.

Решение всех задач приводить подробно и аккуратно, давать достаточные пояснения и делать необходимые рисунки и таблицы.

В конце каждой задачи должен быть ответ.

Контрольные вопросы по теории вероятностей и математической статистике

Теория вероятностей

1. Элементы комбинаторики: перестановки, сочетания и размещения.
2. События и их виды. Алгебра событий.
3. Вероятность события. Свойства вероятности. Способы вычисления вероятности случайного события (классический, геометрический и статистический).
4. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
5. Формулы полной вероятности и Байеса.
6. Схема повторных испытаний. Формула Бернулли.
7. Предельные случаи в схеме Бернулли: локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа, формула Пуассона.
8. Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности в схеме Бернулли.
9. Случайные величины. Закон распределения ДСВ.
10. Функция распределения одномерной СВ, свойства функции распределения.
11. Плотность распределения вероятностей НСВ, свойства плотности.
12. Числовые характеристики ДСВ и НСВ.
13. Примеры законов распределения ДСВ: биномиальное распределение и распределение Пуассона.
14. Примеры законов распределения НСВ: равномерное, нормальное и показательное.

15. Понятие закона больших чисел (неравенство и теорема Чебышева, теорема Бернулли).
16. Понятие центральной предельной теоремы Ляпунова.
17. Понятие двумерной случайной величины. Закон распределения двумерной СВ. Функция распределения двумерной СВ.
18. Плотность совместного распределения вероятностей непрерывной двумерной СВ.
19. Условные законы распределения компонент двумерной СВ.
20. Корреляционный момент и коэффициент корреляции. Коррелированность и зависимость случайных величин.

Математическая статистика

21. Статистическая совокупность. Генеральная и выборочная совокупности.
22. Статистическое распределение выборки. Геометрическое изображение статистических рядов.
23. Эмпирическая функция распределения.
24. Основные числовые характеристики выборки.
25. Понятие статистической оценки неизвестных параметров распределения. Точечные оценки и их классификация.
26. Интервальные оценки параметров распределения. Доверительный интервал.
27. Доверительные интервалы для оценки параметров нормального распределения.
28. Распределения χ^2 ("хи" - квадрат) и Стьюдента.
29. Статистическая проверка гипотез. Нулевая и альтернативная гипотезы. Ошибки первого и второго рода при проверке гипотез. Уровень значимости, критическая область. Статистический критерий и его мощность.
30. Критерии согласия χ^2 и Колмогорова.
31. Основные понятия корреляционного регрессионного анализа.
32. Линейная корреляционная зависимость и прямые среднеквадратических регрессий.

Варианты контрольных заданий

Задание 1

1.01–1.05. Производится **k** независимых измерений некоторой физической величины. Вероятность того, что в одном измерении (любом) ошибка выйдет за пределы допуска, равна **p**. Найти вероятности следующих событий: 1) во всех проведенных измерениях была достигнута заданная точность; 2) по крайней мере в **r** измерениях была достигнута заданная точность.

Вариант	k	p	r
1.01	5	0,09	3
1.02	4	0,1	2
1.03	5	0,085	3
1.04	4	0,09	2
1.05	3	0,1	2

1.06–1.10. Партия из **N** изделий содержит $\alpha\%$ брака. При приемке партии подвергается проверке $\beta\%$ изделий. Условиями проверки допускается не более $\gamma\%$ бракованных изделий. Найти вероятность того, что данная партия изделий будет принята.

Вариант	N	α	β	γ
1.06	100	4	40	2,5
1.07	80	5	50	2,5
1.08	200	5	25	2
1.09	100	3	50	2
1.10	200	5	50	1

1.11.–1.15. На участке **k** бригад, работающих независимо друг от друга. Вероятность выполнения плана **i**-ой бригадой равна p_i $\left(i=\overline{1,k}\right)$. Найти: 1) вероятность выполнения плана участком; 2) вероятность выполнения плана только одной бригадой; 3) вероятность выполнения плана хотя бы одной бригадой.

Вариант	k	p_1	p_2	p_3
1.11	2	0,85	0,9	–
1.12	3	0,8	0,85	0,9
1.13	3	0,75	0,9	0,8
1.14	2	0,8	0,95	–
1.15	3	0,9	0,75	0,8

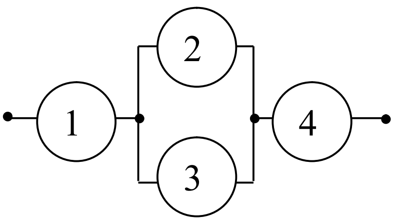
1.16.–1.20. Группа студентов из **N** человек распределяется на производственную практику следующим образом: в город **A** направляется **s**

студентов, в город **B – r** студентов и в город **C – k** студентов. Какова вероятность того, что два определенных студента попадут на практику в один город?

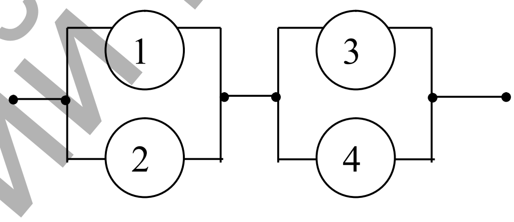
Вариант	**N**	**s**	**r**	**k**
1.16	23	10	8	5
1.17	26	9	10	7
1.18	27	8	7	12
1.19	28	7	10	11
1.20	30	12	10	8

1.21.–1.26. Дана схема элементов, образующих цепь с одним входом и одним выходом. Предполагается, что отказы элементов являются независимыми в совокупности событиями. Надежность $\mathbf{k}$-го элемента равна $\mathbf{p_k}$ (соответственно $\mathbf{q_k} = 1 - \mathbf{p_k}$ - вероятность его отказа). Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Вычислить надежность схемы.

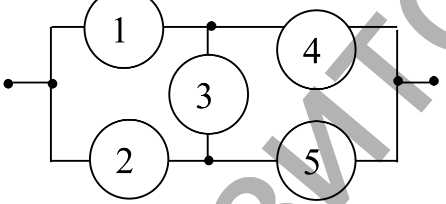
1.21.



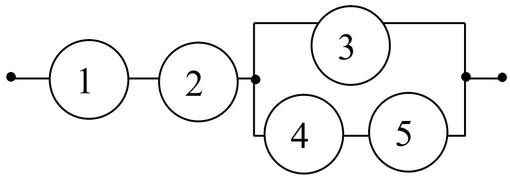
1.22



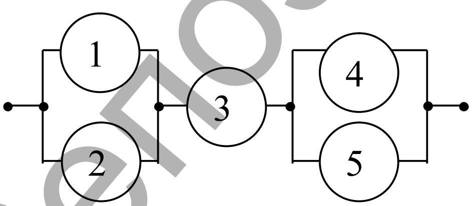
1.23



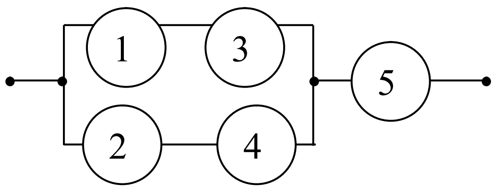
1.24



1.25



1.26



Варианты	$\mathbf{p_1}$	$\mathbf{p_2}$	$\mathbf{p_3}$	$\mathbf{p_4}$	$\mathbf{p_5}$
1.21	0,6	0,8	0,9	0,7	–
1.22	0,9	0,8	0,6	0,6	–
1.23	0,8	0,9	0,9	0,85	0,7
1.24	0,9	0,9	0,8	0,7	0,6
1.25	0,65	0,75	0,8	0,8	0,9
1.26	0,7	0,8	0,8	0,9	0,95

1.27.–1.30. Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятности попадания в мишень соответственно равны p_1, p_2, p_3. Найти вероятности следующих событий: 1) три попадания в мишень; 2) не меньше двух попаданий в мишень; 3) хотя бы одно попадание в мишень.

Вариант	p_1	p_2	p_3
1.27	0,8	0,85	0,9
1.28	0,7	0,8	0,9
1.29	0,9	0,75	0,8
1.30	0,6	0,8	0,7

Задание 2

2.01.–2.05. На сборку поступают изделия с трех конвейеров. Первый дает $\alpha\%$, второй – $\beta\%$, третий – $\gamma\%$ деталей, поступивших на сборку. С первого конвейера в среднем поступает $\delta_1\%$ брака, со второго – $\delta_2\%$, с третьего – $\delta_3\%$. Найти вероятность того, что на сборку поступила бракованная деталь. Чему равна вероятность того, что поступившая на сборку бракованная деталь, с **i**-го конвейера?

Вариант	α	β	γ	δ_1	δ_2	δ_3	**i**
2.01	30	15	55	2	2	3	3
2.02	40	40	20	1	3	2	1
2.03	50	30	20	2	4	3	2
2.04	20	45	35	3	5	2	3
2.05	35	35	30	2	3	5	2

2.06.–2.10. Для поиска спускаемого аппарата космического корабля выделено m_1 вертолетов первого типа, m_2 вертолетов второго типа и m_3 вертолетов третьего типа. Каждый вертолет первого типа обнаруживает находящийся в районе поиска аппарат с вероятностью p_1, второго типа – с вероятностью p_2, третьего типа – с вероятностью p_3. Найти вероятность того, что наудачу выбранный вертолет обнаружит аппарат. К какому типу вероятнее всего принадлежит вертолет, обнаруживший спускаемый аппарат?

Вариант	m_1	m_2	m_3	p_1	p_2	p_3
2.06	4	6	2	0,6	0,5	0,8
2.07	3	4	1	0,7	0,8	0,6
2.08	2	3	4	0,8	0,6	0,7
2.09	1	2	3	0,5	0,6	0,8
2.10	2	1	4	0,6	0,7	0,65

2.11.–2.15. Во время испытаний было установлено, что вероятность безотказного срабатывания реле при отсутствии помех равна p_1, при перегреве – p_2, при вибрации – p_3, при вибрации и перегреве – p_4. Найти вероятность отказа этого реле при работе в жарких странах (вероятность перегрева равна q_1, вероятность вибрации равна q_2), предполагая, что перегрев и вибрация – независимые события.

Вариант	p_1	p_2	p_3	p_4	q_1	q_2
2.11	0,98	0,96	0,92	0,85	0,19	0,12
2.12	0,97	0,95	0,93	0,87	0,18	0,13
2.13	0,99	0,94	0,95	0,80	0,20	0,15
2.14	0,98	0,96	0,94	0,82	0,21	0,09
2.15	0,95	0,96	0,91	0,84	0,17	0,10

2.16.–2.20. Изделие поступает для обработки на одну из трех линий производительностью V_1, V_2, V_3 изделий в час соответственно. Брак может возникнуть на любой из этих трех линий, причем наблюдения показали появление дефектов: на первой – $\alpha\%$ изделий, на второй – $\beta\%$, на третьей – $\gamma\%$ изделий. Считая, что вероятность попадания изделия на ту или иную линию пропорциональна ее производительности, определить:

1) вероятность того, что случайно выбранное изделие окажется бракованным;
2) вероятность того, что случайно выбранное бракованное изделие изготовлено на i-ой линии.

Вариант	V_1	V_2	V_3	α	β	γ	i
2.16	7	3	10	6	4	2	1
2.17	6	7	8	5	3	3	2
2.18	10	5	15	3	5	4	3
2.19	8	10	12	2	3	5	2
2.20	6	8	6	3	4	6	3

2.21.–2.25. Предохранитель в электрической цепи отказывает при коротком замыкании в электронной лампе с вероятностью p_1, при замыкании в обмотке трансформатора – с вероятностью p_2, при пробое конденсатора – с вероятностью p_3, по другим причинам – с вероятностью p_4. Априорные вероятности этих событий соответственно q_1, q_2, q_3, q_4. Определить наиболее вероятную причину отказа предохранителя после того, как такое событие произошло.

Вариант	p_1	p_2	p_3	p_4	q_1	q_2	q_3	q_4
2.21	0,45	0,62	0,78	0,3	0,25	0,18	0,12	0,45
2.22	0,46	0,65	0,81	0,32	0,23	0,17	0,41	0,19
2.23	0,40	0,67	0,83	0,35	0,31	0,29	0,11	0,29
2.24	0,48	0,60	0,82	0,34	0,27	0,13	0,15	0,45
2.25	0,52	0,61	0,79	0,31	0,24	0,26	0,18	0,32

2.26.–2.30. В ящик, содержащий **N** годных изделий, добавлено **r** изделий, взятых со склада. Известно, что доля бракованных изделий на складе равна $\beta\%$, т.е. каждое из добавленных изделий независимо от другого может быть бракованным с вероятностью $0{,}01\cdot\beta$. Найти вероятность того, что взятое наугад из пополненного ящика изделие не будет бракованным.

Вариант	**N**	**r**	β
2.26	11	2	5
2.27	10	3	4
2.28	9	2	5
2.29	15	3	4
2.30	8	3	3

Задание 3

3.01.–3.05. При сборке прибора для наиболее точной подгонки основной детали может потребоваться (в зависимости от удачи) **i** проб с вероятностями $\mathbf{p_i}$. Требуется: 1) составить закон распределения случайной величины **X** – числа проб, необходимых для удовлетворительной сборки прибора; 2) найти математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение величины $\boldsymbol{X}$; 3) сколько деталей необходимо сборщику для сборки **N** приборов?

Вариант	**i**	**N**	$\mathbf{p_1}$	$\mathbf{p_2}$	$\mathbf{p_3}$	$\mathbf{p_4}$	$\mathbf{p_5}$
3.01	4	30	0,15	0,25	0,35	0,25	
3.02	5	50	0,09	0,01	0,45	0,35	0,10
3.03	5	40	0,02	0,28	0,15	0,30	0,25
3.04	5	30	0,13	0,15	0,27	0,12	0,33
3.05	4	50	0,27	0,03	0,42	0,28	

3.06.–3.10. Дискретная случайная величина $\boldsymbol{X}$ может принимать только два значения $\mathbf{x_1}$ и $\mathbf{x_2}$, причем $\mathbf{x_1} < \mathbf{x_2}$. Известны математическое ожидание $\mathbf{M}(\boldsymbol{X})$, дисперсия $\mathbf{D}(\boldsymbol{X})$ и вероятность $\mathbf{p_1} = \mathbf{P}(\boldsymbol{X} = \mathbf{x_1})$. Составить закон распределения случайной величины.

Вариант	$\mathbf{M}(\boldsymbol{X})$	$\mathbf{D}(\boldsymbol{X})$	$\mathbf{p_1}$
3.06	3,7	0,21	0,3
3.07	3,5	0,25	0,5
3.08	3,1	0,09	0,9
3.09	3,6	0,24	0,4
3.10	3,2	0,16	0,8

3.11.–3.16. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: 1) плотность распределения вероятностей; 2) математическое ожидание и дисперсию случайной величины X; 3) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

3.11
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \frac{1}{2}\left(x^2-x\right), & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

3.12
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{1}{6}\left(x^2+x\right), & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

3.13
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ (x-2)^2, & 2<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

3.14
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{x}{2}, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

3.15
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{1}{8}x^3, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

3.16
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ x-1, & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

3.17.–3.20. Билет на право разового участия в азартной игре стоит **x** долларов. Игрок выбрасывает две игральные кости и получает выигрыш **n** долларов, если выпали две шестерки, **m** долларов – при выпадении только одной шестерки и проигрывает, если ни одной шестерки не появилось. Требуется: 1) составить закон распределения случайной величины X – стоимости выигрыша; 2) найти математическое ожидание и дисперсию величины X; 3) какова должна быть стоимость билета, чтобы игра приносила доход ее учредителям?

Вариант	**n**	**m**
3.17	100	20
3.18	200	30
3.19	100	15
3.20	150	25

3.21.–3.26. Случайная величина задана функцией плотности $f(x)$. Найти: 1) неизвестный параметр A; 2) математическое ожидание и дисперсию величины X; 3) построить график функции $f(x)$.

3.21
$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ A(x+2), & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

3.24
$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ A(x-2), & 2<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

3.22

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ Ax, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

3.23

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ A(x+1), & -1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

3.25

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ Ax^2, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

3.26

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ A(x-1), & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

3.27.–3.30. Автомобиль должен проехать по улице, на которой установлено $\mathbf{n}$ светофоров, дающих независимо друг от друга зеленый сигнал в течение $\mathbf{t_1}$ минут, желтый – в течение $\mathbf{t_2}$ минут, красный – в течение $\mathbf{t_3}$ минут. Требуется: 1) написать закон распределения случайной величины $\boldsymbol{X}$ – числа остановок автомобиля на улице; 2) найти математическое ожидание и дисперсию величины $\boldsymbol{X}$; 3) каково среднее число остановок автомобиля на данном пути?

Вариант	n	t_1	t_2	t_3
3.27	4	1,5	0,4	1,1
3.28	3	1,6	0,3	1,3
3.29	4	1,4	0,3	1,1
3.30	3	1,5	0,2	1,3

Задание 4

4.01.–4.04. В магазине имеется $\mathbf{N}$ электрических лампочек. Вероятность продажи каждой из них в течение дня равна $\mathbf{p}$. Какое максимальное число лампочек будет продано в течение дня с вероятностью $\mathbf{P}$?

Вариант	N	p	P
4.01	10000	0,9	0,998
4.02	16000	0,8	0,996
4.03	9000	0,7	0,993
4.04	12000	0,85	0,996

4.05.–4.08. Имеется $\mathbf{n}$ станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором их привод оказывается включенным в течение 80% всего рабочего времени. Найти вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными: 1) ровно $\mathbf{m}$ станков; 2) не менее $\mathbf{r}$ станков.

Вариант	n	m	r
4.05	90	70	65
4.06	80	50	60
4.07	70	30	30
4.08	100	70	40

4.09.–4.12. Завод изготавливает шарики для подшипников. Номинальный диаметр шариков $\mathbf{d_0}$ (мм). Вследствие неточности изготовления шарика фактический его диаметр есть случайная величина, распределенная по нормальному закону со средним значением $\mathbf{d_0}$ и среднеквадратическим отклонением σ (мм). При контроле бракуются шарики, диаметр которых отличается от номинального больше, чем на ε (мм). Определить: 1) какой процент шариков в среднем будет отбраковываться; 2) вероятность того, что фактический диаметр шариков будет заключен в границах от α до β (мм).

Вариант	$\mathbf{d_0}$	ε	σ	α	β
4.09	5	0,10	0,04	4,93	5,02
4.10	6	0,12	0,05	5,94	6,03
4.11	3	0,11	0,02	2,97	3,02
4.12	8	0,09	0,03	7,95	8,08

4.13.–4.16. Детали, выпускаемые цехом, по размерам распределяются по нормальному закону с параметрами: математическое ожидание **а** (см), дисперсия $\boldsymbol{\sigma^2}$ (см^2). Определить: 1) вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали имеет размеры от α до β (см); 2) в каких границах следует ожидать размер диаметра детали, чтобы вероятность невыхода за эти границы была равна **р**?

Вариант	**а**	**р**	$\boldsymbol{\sigma^2}$	α	β
4.13	10	0,9922	0,0081	9,8	10,3
4.14	8	0,9934	0,0064	7,6	8,1
4.15	12	0,9566	0,0049	11,5	12,3
4.16	6	0,9936	0,0036	5,8	6,1

4.17.–4.20. Случайные отклонения размера детали от номинала распределены нормально: математическое ожидание размера детали равно **а** (мм), среднеквадратическое отклонение равно σ (мм). Годными считаются те детали, размер которых заключен в рамках от α до β (мм). Определить: 1) вероятность изготовления годной детали; 2) процент бракованных изделий, если точность изготовления ухудшится и будет характеризоваться среднеквадратическим отклонением σ_1 (мм).

Вариант	**а**	σ_1	σ	α	β
4.17	275	0,9	0,7	273	277
4.18	290	0,9	0,8	288	292
4.19	300	0,7	0,5	292	301
4.20	250	0,8	0,6	249	253

4.21.–4.24. В страховой компании застраховано **N** автомобилей. Вероятность поломки каждого автомобиля в результате аварии равна **p**. Каждый владелец застрахованного автомобиля платит в год **C** денежных единиц страховых и в случае поломки автомобиля в результате аварии получает от компании **S** денежных единиц. Найти вероятность того, что к концу года страховая компания потерпит убыток.

Вариант	**N**	**p**	**C**	**S**
4.21	10000	0,006	12	1000
4.22	10000	0,005	15	1500
4.23	2000	0,004	5	500
4.24	5000	0,005	7	1000

4.25.–4.30. Среднее время работы каждого из трех элементов, входящих в техническое устройство, равно **T** часов. Для безотказной работы устройства необходима безотказная работа хотя бы одного из трех этих элементов. Определить вероятность, что устройство будет работать от t_1 до t_2 часов, если время работы каждого из трех элементов независимо и распределено по показательному закону.

Вариант	**T**	t_1	t_2
4.25	800	650	700
4.26	1000	800	900
4.27	850	750	820
4.28	1200	900	1000
4.29	900	700	900
4.30	950	720	850

Задание 5

5.01.–5.05. Даны измерения твердости 16 образцов легированной стали (в условных единицах). В предположении, что выборка измерений получена из нормального распределения генеральной совокупности, найти доверительные интервалы для математического ожидания и среднеквадратического отклонения при доверительной вероятности $\gamma = 1 - \alpha = 0{,}95$.

5.01	13,1	11,9	12,5	11,5	12,8	11,9	12,4	13,5
	12,0	13,8	10,6	12,4	13,5	11,7	13,9	13,7

5.02	12,36	12,37	12,33	12,36	12,38	12,34	12,35	12,33
	12,34	12,37	12,37	12,33	12,34	12,37	12,34	12,34

5.03	18,51	18,59	18,61	18,65	18,61	18,65	18,71	18,89
	18,85	18,70	18,81	18,84	18,70	18,70	18,70	18,61

5.04	12,37	12,36	12,33	12,36	12,38	12,35	12,34	12,35
	12,33	12,37	12,34	12,35	12,34	12,34	12,37	12,32

5.05	11,8	12,1	12,3	12,3	12,1	12,2	12,1	12,0
	11,9	11,9	12,2	11,8	11,9	12,2	12,1	12,1

5.06.–5.10. В таблице приведены результаты лабораторного анализа 16 образцов сланцевых пород на содержание оксида алюминия (Al_2O_3). В предположении, что выборка получена из нормального распределения генеральной совокупности, найти доверительный интервал для математического ожидания и среднеквадратического отклонения с доверительной вероятностью $\boldsymbol{\gamma} = 1 - \boldsymbol{\alpha} = 0{,}95$. Для варианта **5.10** дано содержание оксида кремния (SiO_2).

5.06	17,2	17,9	18,8	19,9	16,0	17,8	18,8	19,3
	17,0	17,8	19,9	17,1	15,5	17,6	14,8	16,1

5.07	16,3	17,2	15,8	15,0	14,4	15,3	16,6	14,9
	16,1	19,5	15,6	18,1	19,5	15,7	13,2	19,2

5.08	16,4	15,9	15,9	14,8	19,8	18,7	20,2	17,6
	18,2	16,8	18,2	19,7	19,6	19,1	20,2	19,2

5.09	21,5	21,3	20,3	20,1	17,2	15,6	16,0	15,5
	18,5	19,0	16,6	16,0	18,6	19,4	18,9	19,2

5.10	57,8	54,6	54,8	51,7	61,1	62,3	52,2	49,2
	60,0	56,2	55,2	53,3	57,9	54,0	52,6	53,9

5.11.–5.20. Проведены 100 измерений $\mathbf{x}_i$ (мм) диаметра вала. В предположении, что выборка измерений получена из нормального распределения генеральной совокупности, требуется: 1) оценить с помощью доверительного интервала истинный диаметр вала с надежностью $\boldsymbol{\gamma} = 1 - \boldsymbol{\alpha} = 0{,}95$; 2) построить 95% доверительный интервал, накрывающий среднеквадратическое отклонение.

5.11	$\mathbf{x}_i$	7,60	7,64	7,68	7,72	7,76	7,80	7,82	7,84	7,86
	$\mathbf{n}_i$	8	10	16	32	12	10	8	3	1

5.12	$\mathbf{x}_i$	18,51	18,56	18,61	18,66	18,71	18,76	18,81	18,86	18,91
	$\mathbf{n}_i$	2	9	12	21	24	16	11	4	1

5.13	$\mathbf{x}_i$	10,26	10,29	10,32	10,35	10,38	10,41	10,44	10,47	10,50
	$\mathbf{n}_i$	2	3	18	31	16	14	11	4	1

5.14	$\mathbf{x}_i$	11,86	11,91	11,96	12,01	12,06	12,11	12,16	12,21	12,26
	$\mathbf{n}_i$	1	6	14	15	35	16	9	3	1

5.15	$\mathbf{x}_i$	5,12	5,15	5,18	5,21	5,24	5,27	5,30	5,33	5,36
	$\mathbf{n}_i$	1	7	14	22	18	13	9	4	2

5.16	$\mathbf{x}_i$	2,86	2,91	2,96	3,01	3,06	3,11	3,16	3,21	3,26
	$\mathbf{n}_i$	1	6	12	15	35	16	11	3	1

5.17	$\mathbf{x}_i$	3,20	3,26	3,32	3,38	3,44	3,50	3,56	3,62	3,68
	$\mathbf{n}_i$	1	3	9	17	42	15	6	5	2

5.18	x_i	4,02	4,04	4,06	4,08	4,10	4,12	4,14	4,16	4,20
	n_i	3	5	10	19	32	15	8	6	2

5.19	x_i	6,13	6,16	6,19	6,22	6,25	6,28	6,31	6,34	6,37
	n_i	2	4	8	15	40	16	7	5	3

5.20	x_i	8,01	8,05	8,09	8,13	8,17	8,21	8,25	8,29	8,33
	n_i	2	3	10	15	38	16	8	6	2

5.21.–5.25. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0,05$ установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами $\mathbf{n_i}$ и теоретическими частотами $\mathbf{n'_i}$, которые вычислены в предположении, что генеральный признак $\boldsymbol{X}$ имеет нормальное распределение.

5.21	n'_i	16	16	25	32	33	30	22	14	12
	n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

5.22	n'_i	4	7	12	29	48	35	34	18	7
	n_i	5	6	14	32	43	39	30	20	6

5.23	n'_i	5	9	14	16	18	16	9	6	7
	n_i	6	8	13	15	20	16	10	7	5

5.24	n'_i	6	6	14	15	22	15	8	8	6
	n_i	5	7	15	14	21	16	9	7	6

5.25	n'_i	5	3	17	32	20	13	7	2	1
	n_i	8	3	18	31	16	14	8	1	1

5.26.–5.29. В таблице приведены данные об отказах аппаратуры за 10000 часов работы. Общее число обследованных экземпляров аппаратуры равно $\mathbf{n}$. Приняты обозначения: $\mathbf{K}$ – число отказов, $\mathbf{n_k}$ – количество случаев, в которых наблюдалось $\mathbf{K}$ отказов. Приняв уровень значимости $\boldsymbol{\alpha} = 0,01$, проверить гипотезу о том, что число отказов имеет распределение Пуассона.

5.26	**K**	0	1	2	3	4	5	$\geq$ 6
	n_k	427	235	72	21	1	1	0

5.27	**K**	0	1	2	3	4	5	$\geq$ 6
	n_k	537	243	68	20	2	1	0

5.28	**K**	0	1	2	3	4	5	$\geq$ 6
	n_k	430	238	75	24	2	1	0

5.29	**K**	0	1	2	3	4	5	$\geq$ 6
	n_k	422	230	68	16	1	0	0

5.30. В цехе с 10 станками ежедневно регистрировалось число вышедших из строя станков. Всего было проведено 200 наблюдений. Приняты обозначения: $\mathbf{K}$ – число выбывших станков, $\mathbf{n_k}$ – количество зарегистрированных случаев, в которых наблюдалось $\mathbf{K}$ выходов из строя. Приняв уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, проверить гипотезу о том, что число выбывших из строя станков имеет распределение Пуассона.

5.30	$\mathbf{K}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$\mathbf{n_k}$	41	62	45	22	16	8	4	2	0	0	0

Задание 6

6.01.–6.09. На металлургическом заводе исследовалась зависимость предела прочности (Н/мм^2) и предела текучести (Н/мм^2). Результаты замеров прочности $\mathbf{x_i}$ и текучести $\mathbf{y_i}$ стали 10 марок приведены в таблице. Составить уравнение прямой регрессии $\boldsymbol{Y}$ на $\boldsymbol{X}$.

6.01	$\mathbf{x_i}$	77	96	86	92	98	63	80	53	64	66
	$\mathbf{y_i}$	81	77	76	86	53	36	40	47	49	60
6.02	$\mathbf{x_i}$	81	57	86	80	87	163	153	133	159	134
	$\mathbf{y_i}$	54	40	61	68	88	145	136	129	126	96
6.03	$\mathbf{x_i}$	129	145	142	120	95	107	133	140	149	147
	$\mathbf{y_i}$	100	95	206	118	109	107	120	114	113	123
6.04	$\mathbf{x_i}$	104	108	93	124	112	113	95	112	116	93
	$\mathbf{y_i}$	94	84	73	107	94	107	99	100	104	88
6.05	$\mathbf{x_i}$	96	112	136	104	103	115	123	111	127	129
	$\mathbf{y_i}$	84	94	162	98	77	88	94	76	84	73
6.06	$\mathbf{x_i}$	60	62	68	70	73	75	82	84	87	88
	$\mathbf{y_i}$	175	171	160	151	150	141	133	131	125	120
6.07	$\mathbf{x_i}$	80	56	85	79	86	162	152	132	158	133
	$\mathbf{y_i}$	55	41	62	69	89	146	137	130	126	97
6.08	$\mathbf{x_i}$	73	92	82	88	98	59	76	49	60	62
	$\mathbf{y_i}$	77	73	72	82	49	32	36	43	45	56
6.09	$\mathbf{x_i}$	92	108	132	100	99	114	119	107	123	125
	$\mathbf{y_i}$	80	90	158	94	73	84	90	72	80	69

6.10.–6.11. В таблице приведены данные о ценах $\boldsymbol{Y}$ (ден. ед. за кг) 12 сортов шоколадных конфет и оценках $\boldsymbol{X}$ (усл. ед.) их вкусовых качеств.

Составить уравнение прямой регрессии ***Y*** на ***X*** .

6.10	***X***	11	11	11	11	11	12	13	12	14	15	15	14
	Y	1,57	1,65	1,75	2,49	2,49	2,51	2,70	2,70	2,96	3,15	3,15	3,18

6.11	***X***	17	15	15	16	14	17	17	17	16	16	16	15
	Y	3,29	3,32	3,37	3,37	3,39	3,57	3,59	3,69	3,89	3,99	4,04	4,26

6.12. Годовая производительность труда ***X*** (млн. руб./чел.) в расчете на одного рабочего и энерговооруженность труда ***Y*** (кВт/чел.) на предприятиях некоторой отрасли характеризуются данными, приведенными в таблице. Составить уравнение прямой регрессии ***Y*** на ***X*** и установить тесноту связи между признаками.

6.12	***X***	6,7	6,9	7,2	8,4	8,8	9,1	9,8	10,6	10,7	11,1	11,8	12,1	12,4
	Y	2,8	2,2	3,0	3,2	3,7	4,0	4,8	6,0	5,4	5,2	5,4	6,0	9,0

6.13.–6.17. В корреляционной таблице даны распределения 100 фирм по производственным средствам ***X*** (млн. руб.) и по суточной выработке ***Y*** (час.). Составить выборочное уравнение прямой регрессии ***Y*** на ***X*** .

6.13

X \ ***Y***	**10-14**	**14-18**	**18-22**	**22-26**	**26-30**	**30-34**	**m_x**
15-25	3	4					**7**
25-35		2	6				**8**
35-45			3	50	4		**57**
45-55			2	8	6		**16**
55-65				3	7	2	**12**
m_y	**3**	**6**	**11**	**61**	**17**	**2**	**n** = 100

6.14

X \ ***Y***	**8-14**	**14-20**	**20-26**	**26-32**	**32-38**	**38-44**	**m_x**
10-20	5	1					**6**
20-30		6	2				**8**
30-40			5	40	5		**50**
40-50			2	8	7		**17**
50-60				4	7	7	**19**
m_y	**5**	**7**	**9**	**52**	**19**	**8**	**n** = 100

6.15

X \ ***Y***	**9,5-14,5**	**14,5-19,5**	**19,5-24,5**	**24,5-29,5**	**29,5-34,5**	**34,5-39,5**	**m_x**
20-30	2	4					**6**
30-40		6	3				**9**
40-50			6	35	4		**45**
50-60			2	8	6		**16**
60-70				14	7	3	**24**
m_y	**2**	**10**	**11**	**57**	**17**	**3**	**n** = 100

6.16

X \ Y	2,5-7,5	7,5-12,5	12,5-17,5	17,5-22,5	22,5-27,5	27,5-32,5	m_x
5-15	3	5					**8**
15-25		4	4				**8**
25-35			7	35	8		**50**
35-45			2	10	8		**20**
45-55				5	6	3	**14**
m_y	**3**	**9**	**13**	**50**	**22**	**3**	**n** = 100

6.17

X \ Y	10-18	18-26	26-34	34-42	42-50	50-58	m_x
12-20	3	3					**6**
20-28		5	4				**9**
28-36			40	2	8		**50**
36-44			5	10	6		**21**
44-52				4	7	3	**14**
m_y	**3**	**8**	**49**	**16**	**21**	**3**	**n** = 100

6.18.-6.20. В корреляционной таблице заданы результаты измерений возраста ***X*** и дневной выработки ***Y*** молодых рабочих. Составить выборочное уравнение прямой регрессии ***Y*** на ***X*** .

6.18

X \ Y	14-19	19-24	24-29	29-34	34-39	m_x
16-18	1	2				**3**
18-20	2	3				**5**
20-22		4	5	2		**11**
22-24		7	15	6		**28**
24-26			13	8	2	**23**
m_y	**3**	**16**	**33**	**16**	**2**	**n** = 70

6.19

X \ Y	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	m_x
16-18	1	2				**3**
18-20	1	2	4			**7**
20-22		4	3	9		**16**
22-24		2	5	6		**13**
24-26			1	7	1	**9**
26-28				1	1	**2**
m_y	**2**	**10**	**13**	**23**	**2**	**n** = 50

6.20

X \ Y	14-18	18-22	22-26	26-30	30-34	34-38	m_x
17-19	2	1					**3**
19-21	1	3	3				**7**
21-23		3	4	8			**15**
23-25			3	6	7		**16**
25-27				1	5	1	**7**
27-29					1	1	**2**
m_y	**3**	**7**	**10**	**15**	**13**	**2**	**n** = 50

6.21.-6.25. Дано распределение земельных угодий одинаковой площади по количеству внесенных удобрений ***X*** (ц/га) и урожайности ***Y*** (ц/га). Составить выборочное уравнение прямой регрессии ***Y*** на ***X*** .

6.21

X \ Y	7,5-12,5	12,5-17,5	17,5-22,5	22,5-27,5	27,5-32,5	32,5-37,5	m_x
15-25	5	1					**6**
25-35		6	2				**8**
35-45			5	40	5		**50**
45-55			2	8	7		**17**
55-65				4	7	8	**19**
m_y	**5**	**7**	**9**	**52**	**19**	**8**	**n** = 100

6.22

X \ Y	20-26	26-32	32-38	38-44	44-50	50-56	m_x
11-15	2	2	3				**7**
15-19	1	2	4				**7**
19-23		2	14	7			**23**
23-27				5	2	1	**8**
27-31				2	2	1	**5**
m_y	**3**	**6**	**21**	**14**	**4**	**2**	**n** = 50

6.23

X \ Y	14-24	24-34	34-44	44-54	54-64	64-74	m_x
12-14	1	2					**3**
14-16		1	2	3			**6**
16-18			4	24	4		**32**
18-20		1	1	3	2	1	**8**
20-22						1	**1**
m_y	**1**	**4**	**7**	**30**	**6**	**2**	**n** = 50

6.24

X \ Y	24-30	30-36	36-42	42-48	48-54	54-60	m_x
10-15	2	2	2				**6**
15-20		2	2	8			**12**
20-25				15	10		**25**
25-30					4	2	**6**
30-35						1	**1**
m_y	**2**	**4**	**4**	**23**	**14**	**3**	**n** = 50

6.25

X \ Y	7,5-12,5	12,5-17,5	17,5-22,5	22,5-27,5	27,5-32,5	32,5-37,5	m_x
5,5-8,5	3	3					**6**
8,5-11,5		4	6				**10**
11,5-14,5			8	28	9		**45**
14,5-17,5			7	10	8		**25**
17,5-20,5				5	6	3	**14**
m_y	**3**	**7**	**21**	**43**	**23**	**3**	**n** = 100

6.26.-6.28. Дано распределение автомашин по затратам на перевозки ***X*** (млн. руб.) и по протяженности маршрутов перевозок ***Y*** (км). Составить выборочное уравнение прямой регрессии ***Y*** на ***X*** .

6.26

X \ Y	110	130	150	170	190	210	230	250	m_x
10	1	3	4						**8**
13		5	6	5					**16**
16			4	8	6				**18**
19			6	15	9				**30**
22					5	6	7		**18**
25						1	7	2	**10**
m_y	**1**	**8**	**20**	**28**	**20**	**7**	**14**	**2**	**n** = 100

6.27

X \ Y	18,5	19,7	20,9	22,1	23,3	24,5	25,7	26,9	m_x
125	4	3	6						**13**
200		7	4	7					**18**
275				15	9	7			**31**
350					8	5	6		**19**
425						4	3	1	**8**
500							6	5	**11**
m_y	**4**	**10**	**10**	**22**	**17**	**16**	**15**	**6**	**n** = 100

6.28

Y / X	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	m_x
115	2	3	4						**9**
120			7	8					**15**
125			4	7	8				**19**
130				3	15	7			**25**
135					8	9	2		**19**
140						8	4	1	**13**
m_y	**2**	**3**	**15**	**18**	**31**	**24**	**6**	**1**	**n** = 100

6.29.-6.30. Распределение 40 заводов некоторого региона по количеству ***Y*** ремонтных слесарей и числу ***X*** станко-смен дано в корреляционной таблице. Найти выборочное уравнение прямой регрессии ***Y*** на ***X***.

6.29

Y / X	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	m_x
0,0-0,2	4						**4**
0,2-0,4	2	2					**4**
0,4-0,6			2				**2**
0,6-0,8			6	4	4		**14**
0,8-1,0					6	6	**12**
1,0-1,2						4	**4**
m_y	**6**	**2**	**8**	**4**	**10**	**10**	**n** = 40

6.30

Y / X	8-13	13-18	18-23	23-28	28-33	33-38	m_x
0,0-0,3	1	2					**3**
0,3-0,6	2	2					**4**
0,6-0,9			3				**3**
0,9-1,2			4	6	4		**14**
1,2-1,5					6	5	**11**
1,5-1,8						5	**5**
m_y	**3**	**4**	**7**	**6**	**10**	**10**	**n** = 40

Рекомендации для выполнения заданий

Задание 1

1.01.-1.05. Производится 5 независимых измерений некоторой физической величины. Вероятность того, что в одном измерении (любом) ошибка выйдет за пределы допуска, равна 0,1. Найти вероятности следующих событий: 1) во всех проведенных измерениях была достигнута заданная точность; 2) по крайней мере в 3 измерениях была достигнута заданная точность.

Решение

Введем в рассмотрение события: A_i – событие, состоящее в том, что в i-ом измерении достигнута заданная точность; $\bar{A}_i$ – событие состоящее в том, что в i-ом измерении произошла ошибка, $i=\overline{1,5}$.

Вероятность ошибки по условию задачи в каждом измерении, равна 0,1, т.е. $P(\bar{A}_i)=0{,}1$, тогда вероятность события A_i будет равна $P(A_i)=1-P(\bar{A}_i)=1-0{,}1=0{,}9$.

1) Пусть B – событие, состоящее в том, что во всех проведенных измерениях достигнута заданная точность.

Выражая событие B через события A_i $(i=\overline{1,5})$, получаем

$$B=A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4\cdot A_5.$$

Так как измерения независимы друг от друга, то по теореме умножения имеем:

$$P(B)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4\cdot A_5)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot P(A_4)\cdot P(A_5)=$$
$$=0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9=0{,}9^5\approx 0{,}59.$$

2) Пусть C – событие, состоящее в том, что, по крайней мере, в трех измерениях достигнута заданная точность.

Следовательно,

$$C=C_3+C_4+C_5,$$

где C_1 – событие, состоящее в том, что в трех измерениях достигнута заданная точность, C_4 – событие, состоящее в том, что в четырех измерениях достигнута заданная точность, C_5 – событие, состоящее в том, что в пяти измерениях достигнута заданная точность.

Найдем вероятности событий C_3 и C_4, используя формулу Бернулли:

$$P(C_3)=C_5^3(0{,}9)^3(0{,}1)^2=\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot(0{,}9)^3(0{,}1)^2\approx 0{,}07;$$

$$P(C_4)=C_5^4(0{,}9)^4(0{,}1)^1=\frac{5!}{4!\cdot 1!}\cdot(0{,}9)^4(0{,}1)^1\approx 0{,}33.$$

Событие C_5 совпадает с событием B. Значит,

$$P(C_5)=P(B)=0{,}59.$$

Так как события C_3, C_4 и C_5 несовместны, тогда

$$P(C)=P(C_3+C_4+C_5)=P(C_3)+P(C_4)+P(C_5)=0{,}07+0{,}33+0{,}59=0{,}99.$$

Ответ. 1) 0,59; 2) 0,99.

1.06–1.10. Партия из 125 изделий содержит 4% брака. При приемке партии подвергается проверке 40% изделий. Условиями проверки допускается не более 2% бракованных изделий. Найти вероятность того, что данная партия изделий будет принята.

Решение

По условию партия из 125 изделий содержит 4% брака, т.е. $125 \cdot \frac{4\%}{100\%} = 5$ изделий. При приемке партии подвергается проверке $125 \cdot \frac{40\%}{100\%} = 50$ изделий. Партия будет принята, если при проверке обнаружится не более $50 \cdot \frac{2\%}{100\%} = 1$ бракованного изделия.

Пусть A_0 – событие, состоящее в том, что при проверке бракованных изделий не обнаружено, а A_1 – событие, состоящее в том, что при проверке обнаружится одно бракованное изделие.

Рассмотрим событие A, состоящее в том, что партия изделий будет принята. Событие A произойдет, если наступит либо событие A_0, либо событие A_1. Следовательно,

$$A = A_0 + A_1.$$

Так как события A_0 и A_1 несовместны, то

$$p(A) = p(A_0 + A_1) = p(A_0) + p(A_1).$$

Из 125 изделий 50 можно отобрать C_{125}^{50} способами, а из 120 не бракованных изделий 50 можно выбрать C_{120}^{50} способами. Следовательно, вероятность события A_0 вычисляем по формуле

$$P(A_0) = \frac{C_{120}^{50}}{C_{125}^{50}} \approx 0{,}0736.$$

Из 120 не бракованных изделий 49 можно выбрать C_{120}^{49} способами, а из 5 бракованных изделий одно можно выбрать C_5^1 способами. Следовательно, вероятность события A_1, вычисляем по формуле

$$P(A_1) = \frac{C_{120}^{49} \cdot C_5^1}{C_{125}^{50}} \approx 0{,}2591.$$

Тогда вероятность события A будет равна

$$p(A) = p(A_0) + p(A_1) = 0{,}0736 + 0{,}2591 \approx 0{,}33.$$

Ответ. $0{,}33$.

1.11.–1.15. На участке три бригады, работающие независимо друг от друга. Вероятность выполнения плана первой бригадой равна 0,7, второй – 0,9, третьей – 0,8. Найти: 1) вероятность выполнения плана участком; 2) вероятность выполнения плана только одной бригадой; 3) вероятность выполнения плана хотя бы одной бригадой.

Решение

Введем в рассмотрение события: A_i – событие, состоящее в том, что в i-ая бригада выполнила план; $\overline{A}_i$ – событие, состоящее в том, что в i- ая бригада не выполнила план, $i=\overline{1,3}$.

По условию задачи, вероятность события A_1 равна $p(A_1)=p_1=0,7$ (вероятность выполнения плана первой бригадой), тогда $p(\overline{A}_1)=1-p(A_1)=1-0,7=0,3$ (вероятность не выполнения плана первой бригадой). Вероятность события A_2 равна $p(A_2)=p_2=0,9$, тогда $p(\overline{A}_2)=1-p(A_2)=1-0,9=0,1$. Вероятность события A_3 равна $p(A_3)=p_3=0,8$, тогда $p(\overline{A}_3)=1-p(A_3)=1-0,8=0,2$.

1) Пусть B – событие, состоящее в том, что участок выполнил план. Это событие произойдет, только если три бригады выполнят план, т.е.

$$B=A_1\cdot A_2\cdot A_3.$$

Так как бригады работают независимо друг от друга, то по теореме умножения получаем

$$P(B)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3).$$

Подставляя соответствующие вероятности, найдем вероятность выполнения участком плана

$$p(B)=0,7\cdot 0,9\cdot 0,8\approx 0,504.$$

2) Пусть событие C состоит в том, что только одна бригада выполнила план, а остальные бригады не выполнили план.

$$C=A_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3+\overline{A}_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3+\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3,$$

Все три слагаемые – несовместные события, так как появление любого из них исключает появление других. Тогда

$$P(C)=P(A_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3+\overline{A}_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3+\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3)=$$

$$=P(A_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3).$$

Так как A_1, A_2 и A_3 независимые события, то

$$P(C)=P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3).$$

Значит,

$$P(C)=0,7\cdot 0,1\cdot 0,2+0,3\cdot 0,9\cdot 0,2+0,3\cdot 0,1\cdot 0,8=0,014+0,054+0,024=0,092.$$

3) Пусть F – событие, состоящее в том, что хотя бы одна бригада выполнила план, следовательно, $\overline{F}$ – событие, состоящее в том, что все бригады не выполнили план. События F и $\overline{F}$ противоположны, значит

$$p(F)+p(\overline{F})=1.$$

Откуда

$$p(F)=1-p(\overline{F})=1-p(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3)=1-p(\overline{A}_1)\cdot p(\overline{A}_2)\cdot p(\overline{A}_3).$$

Следовательно,

$$p(F) = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 1 - 0{,}006 = 0{,}994.$$

Ответ. а) 0,504; б) 0,092; в) 0,994.

1.16.–1.20. Группа студентов из 20 человек распределяется на производственную практику следующим образом: в город Пинск направляется 8 студентов, в город Барановичи – 5 студентов и в город Брест – 7 студентов. Какова вероятность того, что два определенных студента попадут на практику в один город?

Решение

Введем в рассмотрение события: F_1 – событие, состоящее в том, что два студента попадут на практику в город Пинск; F_2 – событие, состоящее в том, что два студента попадут на практику в город Барановичи; F_3 – событие, состоящее в том, что два студента попадут на практику в город Брест.

Найдем вероятности этих событий.

Из 20 студентов двух можно отобрать C_{20}^2 способами.

Из 8 студентов, отправленных в город Пинск, двух можно выбрать C_8^2 способами. Следовательно, вероятность события F_1 равна

$$P(F_1) = \frac{C_8^2}{C_{20}^2} \approx 0{,}15.$$

Из 5 студентов, отправленных в город Барановичи, двух можно выбрать C_5^2 способами. Следовательно, вероятность события F_2 равна

$$P(F_2) = \frac{C_5^2}{C_{20}^2} \approx 0{,}05.$$

Из 7 студентов, отправленных в город Брест, двух можно выбрать C_7^2 способами. Следовательно, вероятность события F_3 равна

$$P(F_3) = \frac{C_7^2}{C_{20}^2} \approx 0{,}11.$$

Пусть F – событие, состоящее в том, что два студента попадут на практику в один город. Событие F произойдет, если наступит или событие F_1, или событие F_2, или событие F_3:

$$F = F_1 + F_2 + F_3.$$

Так как события F_1, F_2 и F_3 несовместны, то

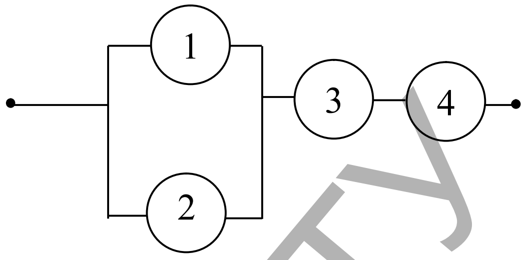
$$P(F) = P(F_1 + F_2 + F_3) = P(F_1) + P(F_2) + P(F_3).$$

Следовательно,

$$P(F) = 0{,}15 + 0{,}05 + 0{,}11 = 0{,}31.$$

Ответ. 0,31.

1.21.–1.26. Дана схема из четырех элементов (см. рис.), образующих цепь с одним входом и одним выходом. Предполагается, что отказы элементов являются независимыми в совокупности событиями. Надежность первого и второго элементов равна 0,8, третьего – 0,85, четвертого – 0,9. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,2, 0,2, 0,15 и 0,1. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Вычислить надежность схемы.



Решение

Введем в рассмотрение события: A_k – событие, состоящее в том, что k-ый элемент схемы работает; $\overline{A}_k$ – событие, состоящее в том, что k-ый элемент схемы вышел из строя, $k=\overline{1,4}$.

Вероятности событий A_1, A_2, A_3 и A_4 по условию задачи равны: $p(A_1)=0{,}8$, $p(A_2)=0{,}8$, $p(A_3)=0{,}85$ и $p(A_4)=0{,}9$, а вероятности событий $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$ и $\overline{A}_4$, равны $p(\overline{A}_1)=0{,}2$, $p(\overline{A}_2)=0{,}2$, $p(\overline{A}_3)=0{,}15$, $p(\overline{A}_4)=0{,}1$.

Пусть B – событие, состоящее в том, что схема работает надежно. Выразим событие B через события A_1, A_2, A_3 и A_4:

$$B=(A_1+A_2)\cdot A_3\cdot A_4.$$

События A_1+A_2, A_3 и A_4 независимы, поэтому

$$p(B)=p(A_1+A_2)\cdot p(A_3)\cdot p(A_4).$$

Для нахождения вероятности события A_1+A_2 воспользуемся тем, что

$$p(A_1+A_2)=1-p(\overline{A}_1)p(\overline{A}_2).$$

Вероятность одновременного выхода из строя первого и второго элементов равна $p(\overline{A}_1\overline{A}_2)=p(\overline{A}_1)p(\overline{A}_2)=0{,}2\cdot 0{,}2=0{,}04$, а вероятность того, что хотя бы один из них будет работать, равна

$$p(A_1+A_2)=1-p(\overline{A}_1)p(\overline{A}_2)=1-0{,}04=0{,}96.$$

Следовательно,

$$p(B)=0{,}96\cdot 0{,}85\cdot 0{,}9\approx 0{,}73.$$

Ответ. 0,73.

1.27.–1.30. Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятности попадания в мишень соответственно равны 0,9, 0,85 и 0,75. Найти вероятности следующих событий: 1) три попадания в мишень; 2) не меньше двух попаданий; 3) хотя бы одно попадание в мишень

Решение

Введем в рассмотрение события: D_k – событие, состоящее в том, что стрелок попал в мишень при k-ом выстреле; $\bar{D}_k$ – событие, состоящее в том, что стрелок не попал в мишень при k-ом выстреле, $k=\overline{1,3}$.

Из условия задачи следует, что

$$p(D_1)=0{,}9,\ p(D_2)=0{,}85 \text{ и } p(D_3)=0{,}75.$$

Тогда

$$p(\bar{D}_1)=1-p(D_1)=1-0{,}9=0{,}1,$$

$$p(\bar{D}_2)=1-p(D_2)=1-0{,}85=0{,}15,$$

$$p(\bar{D}_3)=1-p(D_3)=1-0{,}75=0{,}25.$$

1) Пусть событие A состоит в том, что стрелок попал в мишень 3 раза, т.е.

$$A=D_1\cdot D_2\cdot D_3.$$

Так как события D_1, D_2 и D_3 независимы, то

$$p(A)=p(D_1)\cdot p(D_2)\cdot p(D_3).$$

Следовательно,

$$p(A)=0{,}9\cdot 0{,}85\cdot 0{,}75\approx 0{,}574.$$

2) Пусть B – событие, состоящее в том, что стрелок попал в мишень не меньше двух раз, т.е. два или три раза

$$B=B_2+B_3,$$

где B_2 – событие, состоящее в том, что стрелок попал в мишень только два раза; B_3 – событие, состоящее в том, что стрелок попал в мишень три раза. Тогда $B_2=D_1\cdot D_2\cdot\bar{D}_3+D_1\cdot\bar{D}_2\cdot D_3+\bar{D}_1\cdot D_2\cdot D_3$ и $B_3=A$.

Вероятность события B_3 равна $p(B_3)=p(A)=0{,}574$.

Найдем вероятность события B_2:

$$p(B_2)=p(D_1\cdot D_2\cdot\bar{D}_3+D_1\cdot\bar{D}_2\cdot D_3+\bar{D}_1\cdot D_2\cdot D_3).$$

Так как слагаемые несовместные события, а события D_1, D_2, D_3, $\bar{D}_1$, $\bar{D}_2$ и $\bar{D}_3$ независимы, то

$$p(B_2)=p(D_1)\cdot p(D_2)\cdot p(\bar{D}_3)+p(D_1)\cdot p(\bar{D}_2)\cdot p(D_3)+p(\bar{D}_1)\cdot p(D_2)\cdot p(D_3).$$

Следовательно,

$$p(B_2)=0{,}9\cdot 0{,}85\cdot 0{,}25+0{,}9\cdot 0{,}15\cdot 0{,}75+0{,}1\cdot 0{,}85\cdot 0{,}75\approx 0{,}356,$$

Тогда вероятность события B равна

$$p(B)=p(B_2)+p(B_3)=0{,}356+0{,}574=0{,}930.$$

3) Пусть C – событие, состоящее в том, что стрелок хотя бы один раз попал в мишень, следовательно, $\bar{C}$ – событие, состоящее в том, что стрелок не попал в мишень. События C и $\bar{C}$ противоположны, значит

$$p(C)+p(\bar{C})=1.$$

Событие $\overline{C}$ произойдет тогда, когда стрелок все три выстрела промахнется, т.е. $\overline{C}=\overline{D}_1\cdot\overline{D}_2\cdot\overline{D}_3$. Так как события $\overline{D}_1$, $\overline{D}_2$ и $\overline{D}_3$ независимы, то

$$p\left(\overline{C}\right)=p\left(\overline{D}_1\cdot\overline{D}_2\cdot\overline{D}_3\right)=p\left(\overline{D}_1\right)\cdot p\left(\overline{D}_2\right)\cdot p\left(\overline{D}_3\right).$$

Следовательно,

$$p\left(\overline{C}\right)=0,1\cdot 0,15\cdot 0,25=0,00375.$$

Тогда

$$p(C)=1-p\left(\overline{C}\right)=1-0,00375\approx 0,996.$$

Ответ. 1) 0,574; 2) 0,930; 3) 0,996.

Задание 2

2.01.–2.05. На сборку поступают изделия с трех конвейеров. Первый дает 45%, второй – 25%, третий – 30% деталей, поступивших на сборку. С первого конвейера в среднем поступает 2% брака, со второго – 3%, с третьего – 5%. Найти вероятность того, что на сборку поступила бракованная деталь. Чему равна вероятность того, что поступившая на сборку бракованная деталь, с первого конвейера?

Решение

Пусть A – событие, состоящее в том, что поступившее на сборку изделие, является бракованным.

Введем в рассмотрение гипотезы: H_k – событие, состоящее в том, что поступившее на сборку изделие поступило с k-ого конвейера, $k=\overline{1,3}$.

По условию задачи вероятности выдвинутых гипотез равны:

$$p\left(H_1\right)=\frac{45}{100}=0,45,\quad p\left(H_2\right)=\frac{25}{100}=0,25,\quad p\left(H_3\right)=\frac{30}{100}=0,30.$$

Рассмотрим события: A/H_k - событие, состоящее в том, что поступившее на сборку бракованное изделие поступило с k-ого конвейера, $k=\overline{1,3}$.

По условию задачи имеем

$$p\left(A/H_1\right)=\frac{2}{100}=0,02,\quad p\left(A/H_2\right)=\frac{3}{100}=0,03,\quad p\left(A/H_3\right)=\frac{5}{100}=0,05.$$

Тогда по формуле полной вероятности найдем вероятность того, что на сборку поступила бракованная деталь:

$$p(A)=p\left(H_1\right)\cdot p\left(A/H_1\right)+p\left(H_2\right)\cdot p\left(A/H_2\right)+p\left(H_3\right)\cdot p\left(A/H_3\right).$$

Подставляя данные задачи, получаем

$$p(A)=0,45\cdot 0,02+0,25\cdot 0,03+0,30\cdot 0,05\approx 0,03.$$

По формуле Байеса найдем вероятность того, что поступившая на сборку бракованная деталь поступила с первого конвейера:

$$p\left(H_1/A\right)=\frac{p\left(H_1\right)\cdot p\left(A/H_1\right)}{p(A)}=\frac{0,45\cdot 0,02}{0,03}\approx 0,29.$$

Ответ. $0,03$; $0,29$.

2.06.–2.10. Для поиска спускаемого аппарата космического корабля выделено 2 вертолета первого типа, 5 вертолетов второго типа и 8 вертолетов третьего типа. Каждый вертолет первого типа обнаруживает находящийся в районе поиска аппарат с вероятностью $0{,}8$, второго типа – с вероятностью $0{,}7$, третьего типа – с вероятностью $0{,}85$. Найти вероятность того, что наудачу выбранный вертолет обнаружит аппарат. К какому типу вероятнее всего принадлежит вертолет, обнаруживший спускаемый аппарат?

Решение

Пусть A – событие, состоящее в том, что выбранный вертолет обнаружит спускаемый аппарат.

Введем в рассмотрение гипотезы: H_k – событие, состоящее в том, что выбран вертолет k-ого типа, $k = \overline{1,3}$.

Определим вероятности выбора типа вертолетов. Всего в поиске участвует $2+5+8=15$ вертолетов. Вероятности выдвинутых гипотез будут равны:

$$p(H_1) = \frac{2}{15} \approx 0{,}13, \quad p(H_2) = \frac{5}{15} \approx 0{,}33, \quad p(H_3) = \frac{8}{15} \approx 0{,}54.$$

Рассмотрим события: A/H_k – событие, состоящее в том, что вертолет k-ого типа обнаружит спускаемый аппарат, $k = \overline{1,3}$.

По условию задачи условные вероятности равны:

$$p(A/H_1) = 0{,}8, \quad p(A/H_2) = 0{,}7, \quad p(A/H_3) = 0{,}85.$$

Используя формулу полной вероятности, найдем вероятность того, что наудачу выбранный вертолет обнаружит аппарат:

$$p(A) = p(H_1)\cdot p(A/H_1) + p(H_2)\cdot p(A/H_2) + p(H_3)\cdot p(A/H_3).$$

Подставляя данные задачи, получаем

$$p(A) = 0{,}13\cdot 0{,}8 + 0{,}33\cdot 0{,}7 + 0{,}54\cdot 0{,}85 \approx 0{,}79.$$

Используя формулу Байеса, пересчитаем вероятности выдвинутых гипотез H_1, H_2 и H_3:

$$p(H_1/A) = \frac{p(H_1)\cdot p(A/H_1)}{p(A)} = \frac{0{,}13\cdot 0{,}8}{0{,}79} \approx 0{,}13,$$

$$p(H_2/A) = \frac{p(H_2)\cdot p(A/H_2)}{p(A)} = \frac{0{,}33\cdot 0{,}7}{0{,}79} \approx 0{,}29,$$

$$p(H_3/A) = \frac{p(H_3)\cdot p(A/H_3)}{p(A)} = \frac{0{,}54\cdot 0{,}85}{0{,}79} \approx 0{,}58.$$

Так как $0{,}58 > 0{,}29 > 0{,}13$, то вертолет, обнаруживший спускаемый аппарат, вероятнее всего принадлежит к третьему типу вертолетов.

Ответ. 0,79; к третьему типу вертолетов.

2.11.–2.15. Во время испытаний было установлено, что вероятность безотказного срабатывания реле при отсутствии помех равна $0{,}99$, при перегреве – $0{,}95$, при вибрации – $0{,}9$, при вибрации и перегреве – $0{,}8$. Найти вероятность отказа этого реле при работе в жарких странах (вероятность перегрева равна $0{,}2$, вероятность вибрации равна $0{,}1$), предполагая, что перегрев и вибрация – независимые события.

Решение

Пусть A – событие, состоящее в том, что реле работает безотказно. Тогда $\bar{A}$ – событие, состоящее в том, что реле отказало.

Так как событие $\bar{A}$ является противоположным событию A, то

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1.$$

Вычислим вероятность события A. По отношению к событию A введем в рассмотрение гипотезы: H_1 – событие, состоящее в том, что реле работает при отсутствии помех; H_2 – событие, состоящее в том, что помехой в работе реле служит только перегрев; H_3 – событие, состоящее в том, что помехой в работе реле служит только вибрация; H_4 – событие, состоящее в том, что реле работает при наличии двух помех: вибрации и перегрева.

Вычислим вероятности выдвинутых гипотез. Для этого рассмотрим события: B – событие, состоящее в том, что помехой является перегрев и C – событие, состоящее в том, что помехой является вибрация, вероятности, которых известны $p(B) = 0{,}2$ и $p(C) = 0{,}1$.

Выразим гипотезы H_1, H_2, H_3 и H_4 через события B и C:

$$H_1 = \bar{B} \cdot \bar{C}, \quad H_2 = B \cdot \bar{C}, \quad H_3 = \bar{B} \cdot C, \quad H_4 = B \cdot C.$$

По условию задачи перегрев и вибрация – независимые события, значит, вероятности гипотез будут равны:

$$p(H_1) = p(\bar{B})p(\bar{C}) = (1 - p(B))(1 - p(C)) = (1 - 0{,}2)(1 - 0{,}1) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72,$$

$$p(H_2) = p(B)p(\bar{C}) = p(B)(1 - p(C)) = 0{,}2 \cdot (1 - 0{,}1) = 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}18,$$

$$p(H_3) = p(\bar{B})p(C) = (1 - p(B))p(C) = (1 - 0{,}2) \cdot 0{,}1 = 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}08,$$

$$p(H_4) = p(B)p(C) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02.$$

Рассмотрим события: A/H_1 – событие, состоящее в том, что реле работает безотказно, при отсутствии помех; A/H_2 – событие, состоящее в том, что реле работает безотказно, при перегреве; A/H_3 – событие, состоящее в том, что реле работает безотказно, при вибрации; A/H_4 – событие, состоящее в том, что реле работает безотказно, при перегреве и вибрации.

По условию задачи вероятности этих событий равны

$$p(A/H_1) = 0{,}99, \quad p(A/H_2) = 0{,}95, \quad p(A/H_3) = 0{,}9, \quad p(A/H_4) = 0{,}8.$$

По формуле полной вероятности найдем вероятность безотказной работы реле

$$p(A) = p(H_1)p(A/H_1) + p(H_2)p(A/H_2) + p(H_3)p(A/H_3) + p(H_4)p(A/H_4).$$

Подставляя данные в формулу, получаем

$$p(A) = 0,72 \cdot 0,99 + 0,18 \cdot 0,95 + 0,08 \cdot 0,9 + 0,02 \cdot 0,8 \approx 0,97.$$

Тогда вероятность отказа реле

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0,97 = 0,03.$$

Ответ. 0,03.

2.16.–2.20. Изделие поступает для обработки на одну из трех линий производительностью 12, 4 и 9 изделий в час соответственно. Брак может возникнуть на любой из этих трех линий, причем наблюдения показали появление дефектов: на первой – 2% изделий, на второй – 3%, на третьей – 4% изделий. Считая, что вероятность попадания изделия на ту или иную линию пропорциональна ее производительности, определить: 1) вероятность того, что случайно выбранное изделие окажется бракованным; 2) вероятность того, что случайно выбранное бракованное изделие изготовлено на первой линии.

Решение

Пусть A – событие, состоящее в том, что случайно выбранное изделие является бракованным.

Введем в рассмотрение гипотезы: H_k – событие, состоящее в том, что изделие обработано на k-ой линии, $k = \overline{1,3}$.

Всего в час выпускается $12 + 4 + 9 = 25$ изделий.

Вычислим вероятности гипотез:

$$p(H_1) = \frac{12}{25} = 0,48, \quad p(H_2) = \frac{4}{25} = 0,16, \quad p(H_3) = \frac{9}{25} = 0,36.$$

Рассмотрим события: A/H_k – событие, состоящее в том, что дефект произошел на k-ой линии, $k = \overline{1,3}$.

По условию задачи вероятности этих событий равны

$$p(A/H_1) = \frac{2}{100} = 0,02, \quad p(A/H_2) = \frac{3}{100} = 0,03, \quad p(A/H_3) = \frac{4}{100} = 0,04.$$

По формуле полной вероятности найдем вероятность того, что выбранное изделие бракованное

$$p(A) = p(H_1)p(A/H_1) + p(H_2)p(A/H_2) + p(H_3)p(A/H_3).$$

Подставляя данные в формулу, получаем

$$p(A) = 0,48 \cdot 0,02 + 0,16 \cdot 0,03 + 0,36 \cdot 0,04 \approx 0,03.$$

Вероятность того, что случайно выбранное бракованное изделие изготовлено на первой линии, вычислим по формуле Байеса

$$p(H_1/A) = \frac{p(H_1) \cdot p(A/H_1)}{p(A)} = \frac{0,48 \cdot 0,02}{0,03} \approx 0,32.$$

Ответ. 1) 0,03; 2) 0,32.

2.21.–2.25. Предохранитель в электрической цепи отказывает при коротком замыкании в электронной лампе с вероятностью $p_1 = 0,4$, при замыкании в обмотке трансформатора – с вероятностью $p_2 = 0,6$, при пробое конденсатора – с вероятностью $p_3 = 0,8$, по другим причинам – с вероятностью $p_4 = 0,3$. Априорные вероятности этих событий соответственно $q_1 = 0,25$, $q_2 = 0,15$, $q_3 = 0,32$ и $q_4 = 0,28$. Определить наиболее вероятную причину отказа предохранителя после того, как такое событие произошло.

Решение

Пусть A – событие, состоящее в том, что произошел отказ предохранителя.

Данное событие наступит при осуществлении одной из гипотез: H_1 – событие, состоящее в том, что произошло короткое замыкание в электронной лампе; H_2 – событие, состоящее в том, что произошло замыкание обмотки трансформатора; H_3 – событие, состоящее в том, что произошел пробой конденсатора; H_4 – событие, состоящее в том, что произошли другие причины, вызывающие отказ предохранителя.

По условию задачи вероятности этих гипотез до опыта равны:

$$p(H_1) = 0,25, \quad p(H_2) = 0,15, \quad p(H_3) = 0,32, \quad p(H_4) = 0,28.$$

Рассмотрим события: A/H_1 – событие, состоящее в том, что предохранитель отказал из-за короткого замыкания в электронной лампе; A/H_2 – событие, состоящее в том, что предохранитель отказал из-за замыкания обмотки трансформатора; A/H_3 – событие, состоящее в том, что предохранитель отказал из-за пробоя конденсатора; A/H_4 – событие, состоящее в том, что предохранитель отказал по другим причинам.

Вероятности этих событий по условию задачи равны

$$p(A/H_1) = 0,4, \quad p(A/H_2) = 0,6, \quad p(A/H_3) = 0,8, \quad p(A/H_4) = 0,3.$$

Вычислим вероятность отказа предохранителя $p(A)$, используя формулу полной вероятности:

$$p(A) = p(H_1)p(A/H_1) + p(H_2)p(A/H_2) + p(H_3)p(A/H_3) + p(H_4)p(A/H_4).$$

Подставляя данные в формулу, получаем

$$p(A) = 0,25 \cdot 0,4 + 0,15 \cdot 0,6 + 0,32 \cdot 0,8 + 0,28 \cdot 0,3 = 0,53.$$

Пересчитаем вероятности гипотез после наступления события A, используя теорему Байеса:

$$p(H_1/A) = \frac{p(H_1) \cdot p(A/H_1)}{p(A)} = \frac{0,25 \cdot 0,4}{0,53} \approx 0,19,$$

$$p(H_2/A) = \frac{p(H_2) \cdot p(A/H_2)}{p(A)} = \frac{0,15 \cdot 0,6}{0,53} \approx 0,17,$$

$$p\left(H_3/A\right)=\frac{p\left(H_3\right)\cdot p\left(A/H_3\right)}{p\left(A\right)}=\frac{0,32\cdot 0,8}{0,53}\approx 0,48,$$

$$p\left(H_4/A\right)=\frac{p\left(H_4\right)\cdot p\left(A/H_4\right)}{p\left(A\right)}=\frac{0,28\cdot 0,3}{0,53}\approx 0,16.$$

После отказа предохранителя наиболее вероятной причиной, вызвавшей этот отказ, является пробой конденсатора.

Ответ. Отказ предохранителя из-за пробоя конденсатора.

2.26.–2.30. В ящик, содержащий 8 стандартных изделий, добавлено 2 изделия, взятых со склада. Известно, что доля бракованных изделий на складе равна 5%, т.е. каждое из добавленных изделий независимо от другого может быть бракованным с вероятностью $0,05$. Найти вероятность того, что взятое наугад из пополненного ящика изделие будет стандартным.

Решение

Пусть A – событие, состоящее в том, что изделие, взятое из пополненного ящика, стандартное.

Рассмотрим гипотезы: H_1 – событие, состоящее в том, что среди двух добавленных в ящик изделий нет бракованных; H_2 – событие, состоящее в том, что среди двух добавленных в ящик изделий одно бракованное; H_3 – событие, состоящее в том, что среди двух добавленных в ящик изделий два бракованных.

Вычислим вероятности выдвинутых гипотез. Для этого рассмотрим события: B – событие, состоящее в том, что первая добавленная деталь бракованная и C – событие, состоящее в том, что вторая добавленная деталь бракованная, вероятности которых известны $p\left(B\right)=0,05$ и $p\left(C\right)=0,05$.

Выразим гипотезы H_1, H_2 и H_3 через события B и C:

$$H_1=\bar{B}\cdot\bar{C},\quad H_2=B\cdot\bar{C}+\bar{B}\cdot C,\quad H_3=B\cdot C.$$

По условию задачи выбор деталей со склада независим, а события $B\bar{C}$ и $\bar{B}C$ – несовместны, тогда вероятности гипотез будут равны:

$$p\left(H_1\right)=p\left(\bar{B}\right)p\left(\bar{C}\right)=\left(1-p\left(B\right)\right)\left(1-p\left(C\right)\right)=0,95\cdot 0,95=0,9025,$$

$$p\left(H_2\right)=p\left(B\right)p\left(\bar{C}\right)+p\left(\bar{B}\right)p\left(C\right)=0,05\cdot\left(1-0,05\right)+\left(1-0,05\right)\cdot 0,05=0,095,$$

$$p\left(H_3\right)=p\left(B\right)p\left(C\right)=0,05\cdot 0,05=0,0025.$$

Рассмотрим события: A/H_1 – событие, состоящее в том, что изделие, взятое из ящика, стандартное, если в него добавили два стандартных изделия; A/H_2 – событие, состоящее в том, что изделие, взятое из ящика, стандартное, если в него добавили одно бракованное и одно стандартное изделия; A/H_3 – событие, состоящее в том, что изделие, взятое из ящика, стандартное, если в него добавили два бракованных изделия.

Вычислим вероятности этих событий:

$$p(A/H_1) = \frac{10}{8+2} = 1, \quad p(A/H_2) = \frac{9}{8+2} = 0{,}9, \quad p(A/H_3) = \frac{8}{8+2} = 0{,}8.$$

По формуле полной вероятности найдем вероятность события A:

$$p(A) = p(H_1)p(A/H_1) + p(H_2)p(A/H_2) + p(H_3)p(A/H_3).$$

Подставляя данные в формулу, получаем

$$p(A) = 0{,}9025 \cdot 1 + 0{,}095 \cdot 0{,}9 + 0{,}0025 \cdot 0{,}8 = 0{,}99.$$

Ответ. 0,99.

Задание 3

3.01.–3.05. При сборке прибора для наиболее точной подгонки основной детали может потребоваться (в зависимости от удачи) 4 пробы с вероятностями $p_1 = 0{,}12$, $p_2 = 0{,}18$, $p_3 = 0{,}4$ и $p_4 = 0{,}3$. Требуется: 1) составить закон распределения случайной величины X – числа проб, необходимых для удовлетворительной сборки прибора; 2) найти математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение случайной величины X; 3) сколько деталей необходимо сборщику для сборки N приборов?

Решение

1) Так как X – число проб, необходимых для удовлетворительной сборки прибора, то случайная величина принимает значения 1, 2, 3, 4 с вероятностями 0,12, 0,18, 0,4, 0,3 соответственно.

Значит, закон распределения случайной величины X имеет вид

X	1	2	3	4
p	0,12	0,18	0,4	0,3

Проверим составленный закон распределения:

$$0{,}12 + 0{,}18 + 0{,}4 + 0{,}3 = 1.$$

2) Математическое ожидание дискретной СВ X вычислим по формуле

$$M(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i.$$

Подставляя данные задачи, вычислим $M(X)$:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 1 \cdot 0{,}12 + 2 \cdot 0{,}18 + 3 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}3 = 2{,}88.$$

Дисперсию случайной величины X, найдем по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Составим закон распределения для случайной величины X^2:

X^2	1	4	9	16
p	0,12	0,18	0,4	0,3

Вычислим математическое ожидание для случайной величины X^2

$$M\left(X^2\right)=1\cdot 0{,}12+4\cdot 0{,}18+9\cdot 0{,}4+16\cdot 0{,}3=9{,}24.$$

Следовательно, дисперсия равна

$$D(X)=9{,}24-(2{,}88)^2\approx 0{,}95.$$

Среднеквадратическое отклонение равно

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}95}\approx 0{,}97.$$

3) Среднее число проб, необходимых для сборки одного прибора, равно математическому ожиданию $M(X)$.

Следовательно, для сборки 20 приборов в среднем необходимо $20\cdot M(X)=20\cdot 2{,}88\approx 57$ проб.

Значит, для сборки 20 приборов потребуется в среднем 57 деталей.

Ответ. 2) $M(X)=2{,}88$, $D(X)=0{,}95$, $\sigma(X)=0{,}97$; 3) 57 деталей.

3.06.–3.10. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1<x_2$. Известны математическое ожидание $M(X)=3{,}8$, дисперсия $D(X)=0{,}16$ и вероятность $p_1=p\left(X=x_1\right)=0{,}2$. Составить закон распределения случайной величины.

Решение

Случайная величина X может принимать только два значения: x_1 и x_2, с вероятностями p_1 и p_2, соответственно. Вероятности p_1 и p_2 должны удовлетворять условию $p_1+p_2=1$. По условию задачи $p_1=0{,}2$, тогда $p_2=1-p_1=1-0{,}2=0{,}8$.

Значит, закон распределения случайной величины X примет вид

X	x_1	x_2
p	0,2	0,8

Для нахождения значений x_1 и x_2 воспользуемся тем, что математическое ожидание $M(X)=3{,}8$ и дисперсия $D(X)=0{,}16$.

Математическое ожидание находится по формуле

$$M(X)=\sum_i x_i p_i.$$

Значит, $M(X)=0{,}2x_1+0{,}8x_2$.

Дисперсия находится по формуле

$$D(X)=\sum_i x_i^2 p_i-\left(M(X)\right)^2.$$

Значит, $D(X)=0{,}8x_1^2+0{,}2x_2^2-(3{,}8)^2$.

Подставляя значения $M(X)=3{,}8$ и $D(X)=0{,}16$, составим систему уравнений относительно x_1 и x_2:

$$\begin{cases}0{,}2x_1+0{,}8x_2=3{,}8,\\ 0{,}8x_1^2+0{,}2x_2^2-(3{,}8)^2=0{,}16.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=19-4x_2,\\ 5x_2^2-38x_2+72=0.\end{cases}$$

Решая второе уравнение системы, найдем значения x_2. Подставляя найденные значения в первое уравнение системы, найдем соответствующие значения x_1. Таким образом, пары точек $(3;4)$ и $(4{,}6;3{,}6)$ есть решение системы. Вторая пара не удовлетворяет условию задачи $(x_1<x_2)$.

Значит, закон распределения случайной величины X имеет вид

X	3	4
p	0,2	0,8

Ответ.

X	3	4
p	0,2	0,8

3.11.–3.16. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0{,}25x^2, & 0<x\le 2,.\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения вероятностей; 2) математическое ожидание и дисперсию случайной величины X; 3) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Решение

1) Плотность распределения вероятностей случайной величины X, найдем по формуле

$$f(x)=F'(x).$$

Тогда

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0{,}5x, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

2) Математическое ожидание непрерывной случайной величины X, найдем по формуле:

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx.$$

Откуда

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{0}(x\cdot 0)dx+\int\limits_{0}^{2}(x\cdot 0{,}5x)dx+\int\limits_{2}^{+\infty}(x\cdot 0)dx=0{,}5\cdot\int\limits_{0}^{2}x^2dx=$$

$$=0{,}5\cdot\left.\left(\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^2=0{,}5\cdot\left(\frac{2^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)=0{,}5\cdot\frac{8}{3}=\frac{4}{3}\approx 1{,}33.$$

Дисперсию непрерывной случайной величины X найдем по формуле

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2.$$

Найдем математическое ожидание случайной величины X^2:

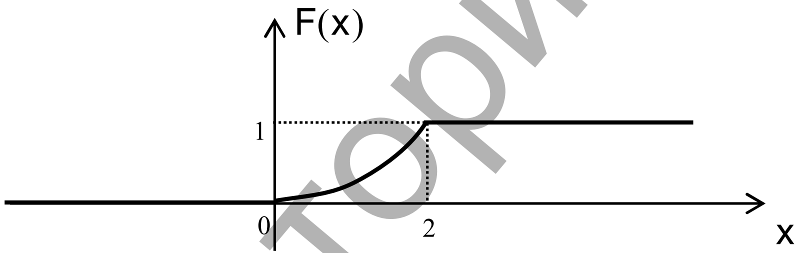
$$M\left(X^2\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0}\left(x^2\cdot 0\right)dx+\int\limits_{0}^{2}\left(x^2\cdot 0{,}5x\right)dx+\int\limits_{2}^{+\infty}\left(x^2\cdot 0\right)dx=$$

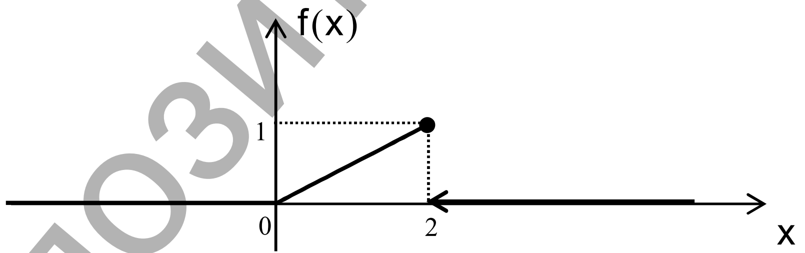
$$=0{,}5\cdot\int\limits_{0}^{2}x^3dx=0{,}5\cdot\left.\left(\frac{x^4}{4}\right)\right|_0^2=0{,}5\cdot\left(\frac{2^4}{4}-\frac{0^4}{4}\right)=0{,}5\cdot\frac{16}{4}=2.$$

Значит, дисперсия непрерывной случайной величины X будет равна

$$D(X)=2-(1{,}33)^2\approx 0{,}23.$$

3) Строим графики функций $F(x)$ и $f(x)$





Ответ. $M(X)=1{,}33$, $D(X)=0{,}23$.

3.17.–3.20. Билет на право разового участия в азартной игре стоит x долларов. Игрок выбрасывает две игральные кости и получает выигрыш 150 долларов, если выпали две шестерки, 50 долларов – при выпадении только одной шестерки и проигрывает, если ни одной шестерки не появилось. Требуется: 1) составить закон распределения случайной величины X – стоимости выигрыша; 2) найти математическое ожидание и дисперсию величины X; 3) какова должна быть стоимость билета, чтобы игра приносила доход ее учредителям?

Решение

1) Стоимость выигрыша есть случайная величина X, принимающая три возможных значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 50$ и $x_3 = 150$.

Определим вероятности, с которыми случайная величина принимает указанные значения. Вероятность выпадения шестерки на одной игральной кости равна $\frac{1}{6}$, а вероятность не выпадения шестерки равна $\frac{5}{6}$.

Если случайная величина X принимает значение $x_1 = 0$, то это означает, что на двух игральных костях не выпало ни одной шестерки. Вероятность этого события

$$p(X = 0) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36} \approx 0{,}69.$$

Если случайная величина X принимает значение $x_2 = 50$, то это означает, что на одной из двух игральных костей выпала шестерка. Вероятность данного события

$$p(X = 50) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{36} \approx 0{,}28.$$

Если случайная величина X принимает значение $x_3 = 150$, то это означает, что на двух игральных костях выпало две шестерки. Вероятность этого события

$$p(X = 150) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 0{,}03.$$

Следовательно, закон распределения принимает вид

X	0	50	150
p	0,69	0,28	0,03

Проверим составленный закон распределения

$$0{,}69 + 0{,}28 + 0{,}03 = 1{,}00.$$

2) Математическое ожидание находится по формуле:

$$M(X) = \sum_i x_i p_i.$$

Тогда

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}69 + 50 \cdot 0{,}28 + 150 \cdot 0{,}03 = 18{,}5.$$

Дисперсию случайной величины X найдем по формуле:

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2.$$

Составим закон распределения для случайной величины X^2:

X^2	0	2500	22500
p	0,69	0,28	0,03

Вычислим математическое ожидание для случайной величины X^2

$$M\left(X^2\right) = 0 \cdot 0{,}69 + 2500 \cdot 0{,}28 + 22500 \cdot 0{,}03 = 1375.$$

Следовательно, дисперсия равна

$$D(X) = 1375 - (18{,}5)^2 \approx 1032{,}75.$$

3) Среднее ожидаемое значение выигрыша равно 18,5 доллара. Поэтому билет должен стоить не менее 18,5 доллара.

Ответ. $M(X) = 18{,}5$; $D(X) = 1032{,}75$; не менее 18,5 доллара.

3.21.–3.26. Случайная величина задана функцией плотности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ A(2x-1), & 1 < x \le 2,. \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Найти: 1) неизвестный параметр A; 2) математическое ожидание и дисперсию величины X; 3) построить график функции $f(x)$.

Решение

1) Для определения параметра A используем условие нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Подставляя в интеграл функцию $f(x)$, получим уравнение относительно параметра A:

$$\int\limits_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int\limits_{1}^{2} A(2x-1)dx + \int\limits_{2}^{+\infty} 0\,dx = 1; \quad A \cdot \int\limits_{1}^{2}(2x-1)dx = 1; \quad A \cdot \left(x^2 - x\right)\Big|_1^2 = 1;$$

$$A \cdot \left(2^2 - 2 - 1^2 + 1\right) = 1; \quad 2A = 1; \quad A = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, функция плотности запишется в виде:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \frac{1}{2}(2x-1), & 1 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

2) Найдем математическое ожидание случайной величины X по формуле:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Подставляя функцию $f(x)$, получим

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{1}(x \cdot 0)dx + \int\limits_{1}^{2} x \cdot \frac{1}{2}(2x-1)dx + \int\limits_{2}^{+\infty}(x \cdot 0)dx = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{1}^{2}\left(2x^2 - x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{2}{3} \cdot 1^3 + \frac{1}{2} \cdot 1^2\right) \approx 1{,}58.$$

Дисперсию непрерывной случайной величины X найдем по формуле

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2.$$

Найдем математическое ожидание случайной величины X^2:

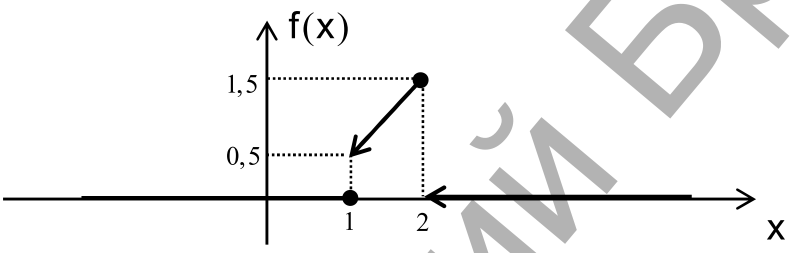
$$M\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} \left(x^2 \cdot 0\right)dx + \int_{1}^{2} \left(x^2 \cdot \frac{1}{2}(2x-1)\right)dx + \int_{2}^{+\infty} \left(x^2 \cdot 0\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_{1}^{2} \left(2x^3 - x^2\right)dx = \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2^4}{2} - \frac{2^3}{3} - \frac{1^4}{2} + \frac{1^3}{3}\right) \approx 2{,}58.$$

Значит, дисперсия непрерывной случайной величины X будет равна

$$D(X) = 2{,}58 - (1{,}58)^2 \approx 0{,}08.$$

3) Строим график функции $f(x)$



Ответ. $A = \frac{1}{2}$; $M(X) = 1{,}58$; $D(X) = 0{,}08$.

3.27.–3.30. Автомобиль должен проехать по улице, на которой установлено 4 светофора, дающих независимо друг от друга зеленый сигнал в течение 1,55 минуты, желтый – в течение 0,35 минуты, красный – в течение 1,20 минуты. Требуется: 1) составить закон распределения случайной величины X – числа остановок автомобиля на улице; 2) найти математическое ожидание и дисперсию величины X; 3) каково среднее число остановок автомобиля на данном пути?

Решение

1) Так как случайная величина X - это число остановок автомобиля на улице, то она может принимать следующие значения: 0 (ни одной остановки), 1 (одна остановка), 2 (две остановки), 3 (три остановки), 4 (четыре остановки).

По условию задачи $1{,}55 = 0{,}35 + 1{,}20$, т.е. время, в течение которого светофор разрешает проезд (зеленый свет), равно времени, при котором проезд запрещен (желтый и красный свет). Значит, вероятность того, что светофор пропустит (q) или задержит машину (p), одна и та же и равна $p = q = \frac{1}{2}$.

Вероятность того, что машина при движении проедет без остановок (т.е. вероятность того, что случайная величина X примет значение, равное 0), найдем формуле Бернулли:

$$p(X=0)=C_4^0 p^0 q^4 = 1\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}\approx 0{,}06.$$

Аналогично находим вероятности, когда случайная величина X принимает значения 1, 2, 3 и 4:

$$p(X=1)=C_4^1 p^1 q^3 = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}=0{,}25;$$

$$p(X=2)=C_4^2 p^2 q^2 = 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16}\approx 0{,}38;$$

$$p(X=3)=C_4^3 p^3 q^1 = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=0{,}25;$$

$$p(X=0)=C_4^4 p^4 q^0 = 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot 1=\frac{1}{16}\approx 0{,}06.$$

Закон распределения случайной величины X принимает вид:

X	0	1	2	3	4
p	0,06	0,25	0,38	0,25	0,06

Проверим составленный закон распределения

$$0{,}06+0{,}25+0{,}38+0{,}25+0{,}06=1{,}00.$$

2) Найдем математическое ожидание по формуле

$$M(X)=\sum_i x_i p_i.$$

Тогда

$$M(X)=0\cdot 0{,}06+1\cdot 0{,}25+2\cdot 0{,}38+3\cdot 0{,}25+4\cdot 0{,}06=2.$$

Дисперсию случайной величины X, найдем по формуле:

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2.$$

Составим закон распределения для случайной величины X^2:

X^2	0	1	4	9	16
p	0,06	0,25	0,38	0,25	0,06

Вычислим математическое ожидание для случайной величины X^2

$$M\left(X^2\right)=0\cdot 0{,}06+1\cdot 0{,}25+4\cdot 0{,}38+9\cdot 0{,}25+16\cdot 0{,}06=4{,}98.$$

Следовательно, дисперсия равна

$$D(X)=4{,}98-2^2=0{,}98.$$

3) Математическое ожидание $M(X)$ определяет ожидаемое значение остановок автомобиля на данной улице. Значит число остановок равно двум.

Ответ. $M(X)=2$; $D(X)=0{,}98$; две остановки.

Задание 4

4.01.–4.04. В магазине имеется 60000 электрических лампочек. Вероятность продажи каждой из них в течение дня равна 0,6. Какое максимальное число лампочек будет продано в течение дня с вероятностью 0,9973?

Решение

По условию задачи $N = 60000$ и $p = 0{,}6$. Так как $p = 0{,}6$, то $q = 1 - p = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$. Пусть m – максимальное число лампочек, проданных в течение дня. Тогда по условию задачи $P(0 \le k \le m) = 0{,}9973$.

Для нахождения вероятности попадания в заданный интервал применим интегральную формулу Муавра-Лапласа:

$$P(k_1 \le k \le k_2) = P_N(k_1; k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - Np}{\sqrt{Npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - Np}{\sqrt{Npq}}\right).$$

Подставляя данные в формулу, получим

$$P(0 \le k \le m) = \Phi\left(\frac{m - 60000 \cdot 0{,}6}{\sqrt{60000 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 60000 \cdot 0{,}6}{\sqrt{60000 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{m - 36000}{120}\right) - \Phi\left(\frac{-36000}{120}\right) = \Phi\left(\frac{m - 36000}{120}\right) + \Phi(300) = 0{,}9973.$$

Используя таблицу значений функции Лапласа (приложение 2), найдем, что $\Phi(300) = 0{,}5$. Подставляя найденное значение в уравнение, получаем:

$$\Phi\left(\frac{m - 36000}{120}\right) + 0{,}5 = 0{,}9973, \qquad \Phi\left(\frac{m - 36000}{120}\right) = 0{,}4973.$$

Воспользовавшись приложением 2, найдем, что $\Phi(x) = 0{,}4973$ при $x = 2{,}78$.

Значит,

$$\frac{m - 36000}{120} = 2{,}78.$$

Из полученного уравнения найдем, что $m \approx 36333$.

Следовательно, с вероятностью 0,9973 можно утверждать, что наибольшее число лампочек, проданных в течение дня, равно 36333.

Ответ. 36333.

4.05.–4.08. Имеется 85 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором их привод оказывается включенным в течение 80% всего рабочего времени. Найти вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными: 1) ровно 60 станков; 2) не менее 60 станков.

Решение

1) Вероятность того, что в произвольно взятый момент времени из 85 станков окажутся включенными ровно 60 станков, найдем, воспользовавшись локальной теоремой Муавра-Лапласа:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \text{ где } x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

По условию задачи: количество станков $n = 85$, количество включенных станков $m = 60$, вероятность того, что станок работает $p = 0,8$, а вероятность того, что станок не работает $q = 1 - p = 1 - 0,8 = 0,2$.

Вычислим аргумент функции $\varphi(x)$:

$$x = \frac{60 - 85 \cdot 0,8}{\sqrt{85 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \approx -2,17.$$

По таблице значений для функции $\varphi(x)$ (приложение 1) учитывая четность функции $\varphi(x)$, находим, что $\varphi(-2,17) = \varphi(2,17) \approx 0,0379$.

Таким образом, вероятность того, что в произвольно взятый момент времени из 85 станков окажутся включенными ровно 60 станков, равна

$$P_{85}(60) = \frac{0,0379}{\sqrt{85 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \approx 0,01.$$

2) Вероятность того, что в произвольно взятый момент времени из 85 станков окажутся включенными не менее 60 станков, найдем, воспользовавшись интегральной теоремой Муавра-Лапласа:

$$P(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$ и $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$.

По условию задачи $m_1 = 60$ и $m_2 = 85$. Вычислим аргументы функции Лапласа x_2 и x_1:

$$x_2 = \frac{85 - 85 \cdot 0,8}{\sqrt{85 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \approx 4,61 \quad \text{и} \quad x_1 = \frac{60 - 85 \cdot 0,8}{\sqrt{85 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \approx -2,17.$$

Используя нечетность функции $\Phi(x)$, получаем

$$P(60 \le m \le 85) = \Phi(4,61) - \Phi(-2,17) = \Phi(4,61) + \Phi(2,17).$$

Используя таблицу значений функции Лапласа (приложение 2), находим, что $\Phi(4,61) \approx 0,5$ и $\Phi(2,17) \approx 0,4850$.

Следовательно,

$$P(60 \le m \le 85) = 0,5 + 0,4850 = 0,9850.$$

Ответ. 1) 0,01; 2) 0,985.

4.09.–4.12. Завод изготавливает шарики для подшипников. Номинальный диаметр шариков 6 (мм). Вследствие неточности изготовления шарика фактический его диаметр есть случайная величина, распределенная по нормальному закону со средним значением 6 (мм) и среднеквадратическим отклонением 0,04 (мм). При контроле бракуются шарики, диаметр которых отличается от номинального больше, чем 0,1 (мм). Определить: 1) какой процент шариков в среднем будет отбраковываться; 2) вероятность того, что фактический диаметр шариков будет заключен в границах от 5,97 до 6,05 (мм).

Решение

Пусть случайная величина X – фактический диаметр шарика. По условию она распределена по нормальному закону, т.е. $X \in \mathrm{N}(a;\sigma)$. Так как $a = d_0 = 6$ и $\sigma = 0{,}04$, то $X \in \mathrm{N}(6;0{,}04)$.

1) Так как по условию задачи на контроле бракуются шарики, диаметр которых отличается от номинального больше, чем 0,1 (мм), то рассмотрим событие $|X-6| > 0{,}1$. Для нахождения вероятности этого события воспользуемся противоположным событием $|X-6| \le 0{,}1$, т.е. диаметр шариков удовлетворяет предъявленным требованиям. Так как случайная величина X непрерывная, то

$$\mathrm{P}(|X-6| \le 0{,}1) = \mathrm{P}(|X-6| < 0{,}1).$$

Вероятность попадания случайной величины X в симметричный промежуток $|X-a| < \varepsilon$ находится по формуле:

$$\mathrm{P}(|X-a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Подставив в формулу значения $a = 6$, $\sigma = 0{,}04$ и $\varepsilon = 0{,}1$, получим

$$\mathrm{P}(|X-6| < 0{,}1) = 2\Phi\left(\frac{0{,}1}{0{,}04}\right) = 2\Phi(2{,}5).$$

Воспользовавшись таблицей значений функции Лапласа (приложение 2), найдем, что $\Phi(2{,}5) \approx 0{,}4938$.

Значит, вероятность события $|X-6| < 0{,}1$ равна

$$\mathrm{P}(|X-6| < 0{,}1) \approx 2 \cdot 0{,}4938 = 0{,}9876.$$

Для противоположных событий справедлива формула:

$$\mathrm{P}(|X-6| < 0{,}1) + \mathrm{P}(|X-6| > 0{,}1) = 1.$$

Откуда

$$\mathrm{P}(|X-6| > 0{,}1) = 1 - \mathrm{P}(|X-6| < 0{,}1) = 1 - 0{,}9876 = 0{,}0124.$$

Следовательно, в среднем будет отбраковываться 1,24% шариков.

2) Найдем вероятность того, что фактический диаметр шариков будет заключен в границах от 5,97 (мм) до 6,05 (мм).

Воспользуемся формулой, для нахождения вероятности попадания случайной величины X в заданный промежуток $(\alpha;\beta)$:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где a - математическое ожидание, а σ - среднеквадратическое отклонение.

Подставив $a = 6$, $\sigma = 0{,}04$, $\alpha = 5{,}97$ и $\beta = 6{,}05$ в формулу и воспользовавшись нечетностью функции Лапласа $\Phi(x)$, получим:

$$P(5{,}97 < X < 6{,}05) = \Phi\left(\frac{6{,}05 - 6}{0{,}04}\right) - \Phi\left(\frac{5{,}97 - 6}{0{,}04}\right) = \Phi(1{,}25) + \Phi(0{,}75).$$

По таблице значений функции Лапласа (приложение 2), найдем, что

$$\Phi(1{,}25) \approx 0{,}3944 \text{ и } \Phi(0{,}75) \approx 0{,}2734.$$

Следовательно,

$$P(5{,}97 < X < 6{,}05) \approx 0{,}3944 + 0{,}2734 = 0{,}6678.$$

Ответ. 1) 1,24%; 2) 0,6678.

4.13.–4.16. Детали, выпускаемые цехом, по размерам распределяются по нормальному закону с параметрами: математическое ожидание 3 (см), дисперсия 0,0025 (см^2). Определить: 1) вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали имеет размеры от 2,96 до 3,04 (см); 2) в каких границах следует ожидать размер диаметра детали, чтобы вероятность невыхода за эти границы была равна 0,9972?

Решение

Случайная величина X – контролируемый размер детали. По условию задачи случайная величина X распределена по нормальному закону распределения с параметрами $a = 3$ и $\sigma = \sqrt{0{,}0025} = 0{,}05$, т.е. $X \in N(3;0{,}05)$.

1) Для определения вероятности попадания диаметра в заданный интервал размеров, воспользуемся интегральной формулой Лапласа:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Подставив $a = 3$, $\sigma = 0{,}05$, $\alpha = 2{,}96$ и $\beta = 3{,}04$ в формулу и воспользовавшись нечетностью функции Лапласа $\Phi(x)$, получим:

$$P(2{,}96 < X < 3{,}04) = \Phi\left(\frac{3{,}04 - 3}{0{,}05}\right) - \Phi\left(\frac{2{,}96 - 3}{0{,}05}\right) = \Phi(0{,}8) + \Phi(0{,}8) = 2 \cdot \Phi(0{,}8).$$

Используя таблицу значений функции Лапласа (приложение 2), находим: $\Phi(0{,}8) \approx 0{,}2881$.

Следовательно,

$$P(2{,}96 < X < 3{,}04) \approx 2 \cdot 0{,}2881 = 0{,}5762.$$

2) Рассмотрим событие $|X-3|<\varepsilon$, где $\varepsilon>0$. По условию задачи вероятность этого события равна 0,9972.

Вероятность попадания случайной величины X в симметричный промежуток $|X-a|<\varepsilon$ находится по формуле:

$$P(|X-a|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Подставив $a=3$, $\sigma=0{,}05$ и воспользовавшись условием $P(|X-3|<\varepsilon)=0{,}9972$, получим уравнение:

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0{,}05}\right)=0{,}9972.$$

Откуда

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0{,}05}\right)=0{,}4986.$$

Воспользовавшись приложением 2, найдем, что $\Phi(x)=0{,}4986$ при $x=2{,}98$.

Значит, $\dfrac{\varepsilon}{0{,}05}=2{,}98$. Из полученного уравнения находим, что $\varepsilon=0{,}15$.

С другой стороны, из неравенства $|X-3|<0{,}15$ следует неравенство $2{,}85<X<3{,}15$. Это означает, что с вероятностью 0,9972 следует ожидать, что контролируемый размер детали будет заключен в границах от 2,85 (см) до 3,15 (см).

Ответ. 1) 0,5762; 2) от 2,85 (см) до 3,15 (см).

4.17.–4.20. Случайные отклонения размера детали от номинала распределены нормально: математическое ожидание размера детали равно 280 (мм), среднеквадратическое отклонение равно 0,8 (мм). Годными считаются те детали, размер которых заключен в рамках от 278 (мм) до 283 (мм). Определить: 1) вероятность изготовления годной детали; 2) процент бракованных деталей, если точность изготовления ухудшится и будет характеризоваться среднеквадратическим отклонением 0,9 (мм).

Решение

Случайная величина X – фактический размер детали. По условию задачи случайная величина X распределена по нормальному закону распределения с параметрами $a=280$ и $\sigma=0{,}8$, т.е. $X\in N(280;0{,}8)$.

1) Определим вероятность изготовления годной детали, т.е. вероятность попадания случайной величины X в промежуток $(278;283)$.

Воспользуемся интегральной формулой Лапласа:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Подставив $a=280$, $\sigma=0{,}8$, $\alpha=278$ и $\beta=283$ в формулу и воспользовавшись нечетностью функции Лапласа $\Phi(x)$, получим:

$$P(278<X<283)=\Phi\left(\frac{283-280}{0{,}8}\right)-\Phi\left(\frac{278-280}{0{,}8}\right)=\Phi(3{,}75)+\Phi(2{,}5).$$

По таблице значений функции Лапласа (приложение 2), найдем, что

$$\Phi(3{,}75)\approx 0{,}4999 \text{ и } \Phi(2{,}5)\approx 0{,}4938.$$

Следовательно,

$$P(278<X<283)\approx 0{,}4999+0{,}4938=0{,}9937.$$

2) Вычислим вероятность изготовления годной детали при условии, что точность изготовления ухудшилась (среднеквадратическое отклонение равно $\sigma_1=0{,}9$).

$$P(278<X<283)=\Phi\left(\frac{283-280}{0{,}9}\right)-\Phi\left(\frac{278-280}{0{,}9}\right)=\Phi(3{,}33)+\Phi(2{,}22).$$

По таблице значений интеграла Лапласа (приложение 2) находим, что $\Phi(3{,}33)\approx 0{,}4995$ и $\Phi(2{,}22)\approx 0{,}4868$. Тогда

$$P(278<X<283)\approx 0{,}4995+0{,}4868=0{,}9863.$$

Вероятность изготовления бракованной детали, при ухудшении точности ее изготовления, равна: $1-0{,}9863=0{,}0137$. Значит, процент бракованных деталей составляет $1{,}37\%$.

Ответ. 1) 0,9937; 2) 1,37 %.

4.21.–4.24. В страховой компании застраховано 15000 автомобилей. Вероятность поломки каждого автомобиля в результате аварии равна 0,004. Каждый владелец застрахованного автомобиля платит в год 15 денежных единиц страховых и в случае поломки автомобиля в результате аварии получает от компании 2500 денежных единиц. Найти вероятность того, что к концу года страховая компания потерпит убыток.

Решение

По условию задачи $N=15000$ – число автолюбителей, застрахованных в компании, $C=15$ – страховой взнос, $S=2500$ – сумма, выплачиваемая пострадавшему в аварии. Вероятность поломки автомобиля по условию равна $p=0{,}004$.

Пусть K – предельное число автолюбителей, попавших в аварию, при котором страховая компания не терпит убытки. Так как сумма страховых взносов должна быть не меньше суммы, выплачиваемой по страхованию, то $C\cdot N\ge S\cdot K$. Откуда

$$K\le\frac{C\cdot N}{S}=\frac{15\cdot 15000}{2500}=90.$$

Если m – число автолюбителей, попавших в аварию в течение года, то при выполнении неравенства $K<m\le N$ страховая компания будет терпеть убытки.

Найдем вероятность того, что к концу года страховая компания потерпит убыток, воспользовавшись интегральной теоремой Муавра-Лапласа:

$$P_N(K < m \le N) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_2 = \dfrac{N - Np}{\sqrt{Npq}}$ и $x_1 = \dfrac{K - Np}{\sqrt{Npq}}$.

Вычислим x_2 и x_1.

$$x_2 = \frac{15000 - 15000 \cdot 0{,}004}{\sqrt{15000 \cdot 0{,}004 \cdot (1 - 0{,}004)}} = \frac{15000 - 60}{\sqrt{59{,}76}} \approx 1933,$$

$$x_1 = \frac{90 - 15000 \cdot 0{,}004}{\sqrt{15000 \cdot 0{,}004 \cdot (1 - 0{,}004)}} = \frac{90 - 60}{\sqrt{59{,}76}} \approx 3{,}88.$$

Подставив найденные значения в формулу, получим

$$P_{15000}(90 < m \le 15000) \approx \Phi(1933) - \Phi(3{,}88).$$

По таблице значений функции Лапласа (приложение 2) находим, что $\Phi(1933) \approx 0{,}5$ и $\Phi(3{,}88) \approx 0{,}4999$. Тогда,

$$P_{15000}(90 < m \le 15000) \approx 0{,}5 - 0{,}4999 = 0{,}0001.$$

Таким образом, вероятность того, что компания потерпит убыток, очень мала.

Ответ. 0,0001.

4.25.–4.30. Среднее время работы каждого из трех элементов, входящих в техническое устройство, равно 750 часов. Для безотказной работы устройства необходима безотказная работа хотя бы одного из трех этих элементов. Определить вероятность, что устройство будет работать от 450 до 600 часов, если время работы каждого из трех элементов независимо и распределено по показательному закону распределения.

Решение

Рассмотрим случайную величину T – длительность времени безотказной работы i -го элемента $(i = 1,2,3)$.

По условию задачи случайная величина распределена по показательному закону распределения. Математическое ожидание случайной величины T по условию равно $M(T) = 750$.

Значит, параметр распределения λ будет равен: $\lambda = \dfrac{1}{M(T)} = \dfrac{1}{750}$.

Следовательно, функция распределения случайной величины T примет вид

$$F(T) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{750} \cdot t}, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Вероятность того, что случайная величина T примет значение из интервала $\left(t_1, t_2\right)$ определяется формулой:

$$P\left(t_1 < T < t_2\right) \approx F\left(t_1\right) - F\left(t_2\right).$$

Рассмотрим события A_k – k-ый элемент устройства безотказно проработал от 450 до 600 часов, $\overline{A}_k$ – k-ый элемент устройства во время работы отказал, $(k = 1,2,3)$.

Определим вероятности этих событий

$$P\left(A_1\right) = P\left(A_2\right) = P\left(A_3\right) = e^{-\frac{450}{750}} - e^{-\frac{600}{750}} = e^{-0,6} - e^{-0,8} \approx 0,0995,$$

$$P\left(\overline{A}_1\right) = P\left(\overline{A}_2\right) = P\left(\overline{A}_3\right) = 1 - 0,0995 = 0,9005.$$

Пусть событие A – устройство во время работы вышло из строя. По условию задачи устройство выйдет из строя, если откажут все элементы, значит $A = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$. Так как работа элементов независима, то вероятность отказа устройства равна

$$P(A) = P\left(\overline{A}_1\right)P\left(\overline{A}_2\right)P\left(\overline{A}_3\right) = 0,9005 \cdot 0,9005 \cdot 0,9005 \approx 0,7302.$$

Значит, вероятность безотказной работы устройства будет равна

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0,7302 = 0,2698.$$

Ответ. 0,2698.

Задание 5

5.01.–5.10. Даны измерения твердости 10 образцов легированной стали (в условных единицах). В предположении, что выборка измерений получена из нормального распределения генеральной совокупности, найти доверительные интервалы для математического ожидания и среднеквадратического отклонения при доверительной вероятности $\gamma = 1 - \alpha = 0,95$.

25,03	24,97	24,78	25,32	24,91	24,65	24,72	25,35	24,91	25,37

Решение

Количество образцов для измерения по условию равно $n = 10$.

Найдем точечные оценки параметров нормального распределения генерального признака, для чего составим расчетную таблицу

Номер образца	x_i	$x_i - \overline{x}$	$\left(x_i - \overline{x}\right)^2$
1	25,03	0,03	0,0009
2	24,97	- 0,03	0,0009
3	24,78	- 0,22	0,0484
4	25,32	0,32	0,1024
5	24,91	- 0,09	0,0081

Продолжение таблицы

6	24,65	- 0,35	0,1225
7	24,72	- 0,28	0,0784
8	25,35	0,35	0,1225
9	24,91	- 0,09	0,0081
10	25,37	0,37	0,1369
$\sum$	250,01	0,01	0,6291

Найдем несмещенную оценку для математического ожидания a:

$$a^* = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i = \frac{250{,}01}{10} \approx 25{,}00.$$

Вычислим несмещенную оценку для среднеквадратического отклонения σ:

$$\sigma^* = S = \sqrt{\frac{\sum_i \left(x_i - \bar{x} \right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0{,}6291}{9}} \approx 0{,}264.$$

Доверительный интервал для математического ожидания a найдем по формуле:

$$\bar{x} - \varepsilon < a < \bar{x} + \varepsilon,$$

Где ε – предельная погрешность оценки математического ожидания.

Вычислим ε по формуле:

$$\varepsilon = t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

По таблице значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$ (приложение 3), при доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$ и объеме выборки $n = 10$, найдем, что $t_\gamma = 2{,}26$.

Следовательно,

$$\varepsilon = 2{,}26 \cdot \frac{0{,}264}{\sqrt{10}} \approx 0{,}19.$$

Тогда доверительный интервал для математического ожидания будет иметь вид:

$$25{,}00 - 0{,}19 < a < 25{,}00 + 0{,}19,$$

$$24{,}81 < a < 25{,}19.$$

Доверительный интервал для среднеквадратического отклонения σ найдем по формуле:

$$S \cdot (1 - q) < \sigma < S \cdot (1 + q),$$

при условии, что $q < 1$.

По таблице значений $q_\gamma = q(\gamma, n)$ (приложение 4), при доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$ и объеме выборки $n = 10$, найдем, что $q_\gamma = 0{,}65$.

Тогда доверительный интервал для среднеквадратического отклонения σ будет иметь вид:

$$0{,}264 \cdot (1 - 0{,}65) < \sigma < 0{,}264 \cdot (1 + 0{,}65),$$

$$0{,}092 < \sigma < 0{,}436.$$

Ответ. $24{,}81 < a < 25{,}19$; $0{,}092 < \sigma < 0{,}436$.

5.11.–5.20. Проведены 100 измерений x_i (мм) диаметра вала. В предположении, что выборка измерений получена из нормального распределения генеральной совокупности, требуется: 1) оценить с помощью доверительного интервала истинный диаметр вала с надежностью $\gamma = 1 - \alpha = 0{,}95$; 2) построить 95% доверительный интервал, накрывающий среднеквадратическое отклонение.

x_i	4,60	4,62	4,64	4,66	4,68	4,70	4,72	4,74	4,76
n_i	2	7	12	20	28	15	11	4	1

Решение

Количество измерений диаметра вала по условию равно $n = 100$.

Найдем точечные оценки параметров нормального распределения генерального признака.

По условию задачи видно, что задана выборка в виде равноотстоящих вариант и соответствующих им частот. В этом случае выборочную среднюю и дисперсию найдем по формулам:

$$\bar{x} = \bar{u} \cdot h + C \quad \text{и} \quad \sigma^2 = D(u) \cdot h^2,$$

где h – шаг (разность между соседними вариантами), C – ”ложный нуль” (варианта расположенная примерно в середине вариационного ряда), u – условная варианта, вычисляемая по правилу

$$u_i = \frac{x_i - C}{h}.$$

Пусть “ложным нулем” будет варианта $C = 4{,}68$. Шаг равен $h = 0{,}02$.

Все расчеты производим в таблице.

	x_i	n_i	u_i	$n_i \cdot u_i$	$n_i \cdot u_i^2$
1	4,60	2	- 4	- 8	32
2	4,62	7	- 3	- 21	63
3	4,64	12	- 2	- 24	48
4	4,66	20	- 1	- 20	20
5	4,68	28	0	0	0
6	4,70	15	1	15	15
7	4,72	11	2	22	44
8	4,74	4	3	12	36
9	4,76	1	4	4	16
$\sum$		100		- 50	274

Вычислим $\bar{u}$ по формуле: $\bar{u} = \frac{1}{n} \cdot \sum n_i \cdot u_i$.

Значит,

$$\bar{u} = \frac{-50}{100} = -0{,}5.$$

Следовательно, выборочная средняя будет равна:

$$\overline{x} = -0,5 \cdot 0,02 + 4,68 = 4,67.$$

Тогда несмещенная точечная оценка для математического ожидания равна $a^* = \overline{x} = 4,67$.

Вычислим $D(u)$ по формуле: $D(u) = \frac{1}{n} \cdot \sum n_i \cdot u_i^2 - (\overline{u})$.

Значит,

$$D(u) = \frac{274}{100} - (-0,5)^2 = 2,49.$$

Следовательно, выборочная дисперсия будет равна

$$\sigma^2 = 2,49 \cdot 0,02^2 \approx 0,001.$$

Тогда несмещенная оценка для среднеквадратического отклонения равна

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1} \cdot \sigma^2} = \sqrt{\frac{100}{99} \cdot 0,001} \approx 0,032.$$

1) Доверительный интервал для математического ожидания a найдем по формуле

$$\overline{x} - \varepsilon < a < \overline{x} + \varepsilon,$$

где ε – предельная погрешность оценки математического ожидания.

Вычислим ε по формуле:

$$\varepsilon = t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

По таблице значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$ (приложение 3), при доверительной вероятности $\gamma = 0,95$ и объеме выборки $n = 100$, найдем, что $t_\gamma = 1,984$.

Следовательно,

$$\varepsilon = 1,984 \cdot \frac{0,032}{\sqrt{100}} \approx 0,006.$$

Тогда доверительный интервал для математического ожидания a будет иметь вид:

$$4,67 - 0,006 < a < 4,67 + 0,006,$$
$$4,664 < a < 4,676.$$

2) Доверительный интервал для среднеквадратического отклонения σ найдем по формуле

$$S \cdot (1 - q) < \sigma < S \cdot (1 + q),$$

при условии, что $q < 1$.

По таблице значений $q_\gamma = q(\gamma, n)$ (приложение 4), при доверительной вероятности $\gamma = 0,95$ и объеме выборки $n = 100$, найдем, что $q_\gamma = 0,143$.

Тогда доверительный интервал для среднеквадратического отклонения σ будет иметь вид:

$$0,032 \cdot (1 - 0,143) < \sigma < 0,032 \cdot (1 + 0,143),$$
$$0,027 < \sigma < 0,037.$$

Ответ. $4,664 < a < 4,676$; $0,027 < \sigma < 0,037$.

5.21.–5.25. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами n_i и теоретическими частотами n'_i, которые вычислены в предположении, что генеральный признак X имеет нормальное распределение.

n_i	2	9	16	21	34	19	10	6	3
n'_i	3	12	14	25	26	22	13	4	1

Решение

Рассмотрим нулевую гипотезу H_0 – расхождение эмпирических и теоретических частот незначимо (случайно).

В качестве статистики для проверки гипотезы H_0 используем случайную величину

$$\chi^2 = \sum_i \frac{\left(n_i - n'_i\right)^2}{n'_i},$$

которая, независимо от того, какому закону распределения подчинена генеральная совокупность, при $n \to \infty$ стремится к закону распределения χ^2 ("хи"- квадрат) с v степенями свободы. Число степеней свободы равно $v = S - r - 1$, где S – число групп (частичных интервалов) выборки, r – число параметров предполагаемого распределения, которые оценены по данным выборки.

Для вычисления наблюдаемого значения статистики составим расчетную таблицу, в которой группы, имеющие частоты меньше 5, объединяем с соседними группами.

	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$\left(n_i - n'_i\right)^2$	$\frac{\left(n_i - n'_i\right)^2}{n'_i}$
1	$\left.\begin{matrix}2\\9\end{matrix}\right\} = 11$	$\left.\begin{matrix}3\\12\end{matrix}\right\} = 15$	- 4	16	1,0667
2	16	14	2	4	0,2857
3	21	25	- 4	16	0,6400
4	34	26	8	64	2,4625
5	19	22	- 3	9	0,4091
6	10	13	- 3	9	0,6923
7	$\left.\begin{matrix}6\\3\end{matrix}\right\} = 9$	$\left.\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right\} = 5$	4	16	3,2000
$\sum$	120	120			8,7553

Из таблицы следует, что $\chi^2_{\text{набл.}} = 8{,}7553$.

Нормальное распределение характеризуется двумя параметрами: математическим ожиданием a и среднеквадратическим отклонением σ, поэтому $r = 2$. Число частичных интервалов $S = 7$. Следовательно, число степеней свободы равно: $v = 7 - 2 - 1 = 4$.

По таблице распределения χ^2 (приложение 5) найдем критическую точку при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и числе степеней свободы $v = 4$:

$$\chi^2_{\text{кр.}} = \chi^2(4; 0{,}05) = 9{,}488.$$

Так как $\chi^2_{\text{набл.}} = 8{,}7553 < 9{,}488 = \chi^2_{\text{кр.}}$, то нет оснований для отклонения нулевой гипотезы. Т.е. данные наблюдений не противоречат гипотезе о нормальном распределении генеральной совокупности.

Ответ. Расхождение эмпирических и теоретических частот признака X незначимо (случайно).

5.26.–5.30. В таблице приведены данные об отказах аппаратуры за 10000 часов работы. Общее число обследованных экземпляров аппаратуры равно n. Приняты обозначения: K – число отказов, n_k – количество случаев, в которых наблюдалось K отказов. Приняв уровень значимости $\alpha = 0{,}01$, проверить гипотезу о том, что число отказов имеет распределение Пуассона.

K	0	1	2	3	4	5	$\geq$ 6
$\mathbf{n_k}$	435	240	77	24	2	1	0

Решение

Определим общее число обследованных экземпляров аппаратуры

$$n = 435 + 240 + 77 + 24 + 2 + 1 = 779.$$

Определим число наблюдаемых отказов

$$435 \cdot 0 + 240 \cdot 1 + 77 \cdot 2 + 24 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 479.$$

Пусть случайная величина X – число отказов аппаратуры за 10000 часов работы. Найдем среднее число отказов

$$\bar{x} = \frac{479}{779} \approx 0{,}6.$$

Рассмотрим нулевую гипотезу H_0, состоящую в том, что случайная величина X распределена по закону Пуассона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$.

Определим точечную оценку параметра распределения Пуассона a:

$$a = \bar{x} = 0{,}6.$$

Теоретические частоты распределения Пуассона возьмем из таблицы (приложение 6).

Результаты вычислений заносим в таблицу.

K	n_k	p_k	$n'_k \approx n \cdot p_k$
0	435	0,5448	424
1	240	0,3293	257
2	77	0,0988	77
3	24	0,0198	15
4	2	0,0030	2
5	1	0,0004	0
≥ 6	0	0,0000	0
$\sum$	779	0,9961	775,96

В качестве статистики для проверки выдвинутой гипотезы используем случайную величину

$$\chi^2 = \sum_i \frac{\left(n_i - n'_i\right)^2}{n'_i} ,$$

которая, независимо от того, какому закону распределения подчинена генеральная совокупность, при $n \to \infty$ стремится к закону распределения χ^2 ("хи"- квадрат) с v степенями свободы. Число степеней свободы равно $v = S - r - 1$, где S – число групп (частичных интервалов) выборки, r – число параметров предполагаемого распределения, которые оценены по данным выборки.

Для вычисления наблюдаемого значения статистики составим расчетную таблицу, в которой группы, имеющие частоты меньше 5, объединяем с соседними группами.

	n_k	n'_k	$n_k - n'_k$	$\left(n_k - n'_k\right)^2$	$\frac{\left(n_k - n'_k\right)^2}{n'_k}$
1	435	424	11	121	0,2854
2	240	257	- 17	289	1,1245
3	77	77	0	0	0
4	$\left.\begin{matrix}24\\2\\1\end{matrix}\right\} = 27$	$\left.\begin{matrix}15\\2\\0\end{matrix}\right\} = 17$	10	100	5,8824
$\sum$					7,2923

Из таблицы следует, что $\chi^2_{\text{набл.}} = 7,2923$.

Распределение Пуассона характеризуется одним параметром a, поэтому $r = 1$. Число частичных интервалов $S = 4$. Следовательно, число степеней свободы равно: $v = 4 - 1 - 1 = 2$.

По таблице распределения χ^2 (приложение 5.) найдем критическую точку при уровне значимости α = 0,01 и числе степеней свободы $v = 2$:

$$\chi^2_{\text{кр.}} = \chi^2(2; 0,01) = 9,210 .$$

Так как $\chi^2_{\text{набл.}} = 7{,}2923 < 9{,}210 = \chi^2_{\text{кр.}}$, то нет оснований для отклонения нулевой гипотезы. Т.е. данные наблюдений не противоречат гипотезе о распределении Пуассона генеральной совокупности.

Ответ. Число отказов не противоречит распределению Пуассона.

Задание 6

6.01.–6.12. На металлургическом заводе исследовалась зависимость предела прочности (Н/мм^2) и предела текучести (Н/мм^2). Результаты замеров прочности x_i и текучести y_i стали 10 марок приведены в таблице. Составить уравнение прямой регрессии Y на X.

x_i	7,9	11,6	12,8	14,9	16,3	18,6	20,3	21,9	23,6
y_i	13,0	22,8	24,8	28,6	31,6	38,7	40,0	44,9	43,0

Решение

Эмпирическое уравнение регрессии Y на X имеет вид:

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot (x - \overline{x}),$$

где $\overline{y}_x$ – условная средняя, $\overline{x}$ и $\overline{y}$ – выборочные средние признаков X и Y, σ_x и σ_y – выборочные среднеквадратические отклонения, r_{xy} – выборочный коэффициент корреляции.

Выборочные средние $\overline{x}$ и $\overline{y}$ найдем по формулам:

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_i x_i \quad \text{и} \quad \overline{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_i y_i .$$

Выборочные среднеквадратические отклонения σ_x и σ_y найдем по формулам:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} \quad \text{и} \quad \sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2},$$

где $\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_i x_i^2 - (\overline{x})^2$, $\sigma_y^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_i y_i^2 - (\overline{y})^2$.

Выборочный коэффициент корреляции r_{xy} найдем по формуле:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y},$$

где K_{xy} – корреляционный момент, который можно найти по формуле

$$K_{xy} = \frac{1}{n} \cdot \sum_i (x_i \cdot y_i) - \overline{x} \cdot \overline{y} .$$

Составим расчетную таблицу

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	7,9	13,0	62,41	169,00	102,70
2	11,6	22,8	134,56	519,84	264,48
3	12,8	24,8	163,84	615,04	317,44
4	14,9	28,6	222,01	817,96	426,14
5	16,3	31,6	265,69	998,56	515,08
6	18,6	38,7	345,96	1497,69	719,82
7	20,3	40,0	412,09	1600,00	812,00
8	21,9	44,9	479,61	2016,01	983,31
9	23,6	43,0	556,96	1849,00	1014,80
$\sum$	147,9	287,4	2643,13	10083,10	5155,77

Выборочные средние $\overline{x}$ и $\overline{y}$ равны

$$\overline{x} = \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{9} x_i = \frac{1}{9} \cdot 147{,}9 = 16{,}433,$$

$$\overline{y} = \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{9} y_i = \frac{1}{9} \cdot 287{,}4 = 31{,}933.$$

Вычислим σ_x^2 и σ_y^2:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{9} x_i^2 - \left(\overline{x}\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot 2643{,}13 - \left(16{,}433\right)^2 \approx 23{,}638,$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{9} y_i^2 - \left(\overline{y}\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot 10083{,}10 - \left(31{,}933\right)^2 \approx 100{,}628.$$

Значит, выборочные среднеквадратические отклонения σ_x и σ_y будут равны:

$$\sigma_x = \sqrt{23{,}638} \approx 4{,}862,$$

$$\sigma_y = \sqrt{100{,}628} \approx 10{,}031.$$

Вычислим корреляционный момент K_{xy}:

$$K_{xy} = \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{9} \left(x_i \cdot y_i\right) - \overline{x} \cdot \overline{y} = \frac{1}{9} \cdot 5155{,}77 - 16{,}433 \cdot 31{,}933 \approx 48{,}108.$$

Вычислим коэффициент корреляции r_{xy}:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{48{,}108}{4{,}862 \cdot 10{,}031} \approx 0{,}986.$$

Подставляя найденные значения в формулу для эмпирического уравнения регрессии Y на X, получим:

$$\overline{y}_x - 31{,}933 = 0{,}986 \cdot \frac{10{,}031}{4{,}862} \cdot \left(x - 16{,}433\right).$$

Откуда

$$\overline{y}_x = 2{,}03x - 1{,}49.$$

Заметим, что в данном случае коэффициент корреляции $r_{xy} = 0{,}986$ достаточно близок к единице. Следовательно, между признаками X и Y существует достаточно тесная связь.

Вычислим коэффициент детерминации $r_{xy}^2 \approx 0{,}97$. Такой коэффициент детерминации означает: 97% рассеивания зависимой случайной величины объясняются линейной регрессией Y на X, а 3% могут быть вызваны либо случайными ошибками эксперимента, либо тем, что линейная регрессионная модель плохо согласуется с данными эксперимента.

Ответ. $\overline{y}_x = 2{,}03x - 1{,}49$.

6.13.–6.30. В корреляционной таблице даны распределения 100 фирм по производственным средствам X (млн. руб.) и по суточной выработке Y (час.). Составить выборочное уравнение прямой регрессии Y на X.

X \ Y	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	m_x
10-18	2	4					6
18-26		3	7				10
26-34		1	48	10	2		61
34-42			2	7	5		14
42-50				1	2	2	5
50-58					2	2	4
m_y	2	8	57	18	11	4	$n = 100$

Решение

Составим корреляционную таблицу в условных вариантах, которые найдем по формулам:

$$u_i = \frac{x_i - C_x}{h_x} \quad \text{и} \quad v_j = \frac{y_j - C_y}{h_y},$$

где C_x и C_y – ”ложные нули” признаков X и Y, h_x и h_y – длины интервалов значений признаков X и Y, $x_i\left(i = \overline{1,6}\right)$ и $y_j\left(j = \overline{1,6}\right)$ – середины интервалов значений признаков X и Y.

В качестве “ложных нулей” возьмем $C_x = 38$ и $C_y = 45$.

Длины интервалов $h_x = 8$ и $h_y = 10$.

Середины интервалов значений признака X:

$$x_1 = 14,\ x_2 = 22,\ x_3 = 30,\ x_4 = 38,\ x_5 = 46 \text{ и } x_6 = 54.$$

Середины интервалов значений признака Y:

$$y_1 = 15,\ y_2 = 25,\ y_3 = 35,\ y_4 = 45,\ y_5 = 55 \text{ и } y_6 = 65.$$

Таким образом, корреляционная таблица примет вид:

u \ v	- 3	- 2	- 1	0	1	2	m_u
- 3	2	4					6
- 2		3	7				10
- 1		1	48	10	2		61
0			2	7	5		14
1				1	2	2	5
2					2	2	4
m_v	2	8	57	18	11	4	n = 100

Выборочные средние $\overline{x}$ и $\overline{y}$ найдем по формулам:

$$\overline{x} = \overline{u} \cdot h_x + C_x \quad \text{и} \quad \overline{y} = \overline{v} \cdot h_y + C_y .$$

Вычислим значения $\overline{u}$ и $\overline{v}$ воспользовавшись формулами:

$$\overline{u} = \frac{1}{n} \cdot \sum_i u_i \cdot m_{u_i} \quad \text{и} \quad \overline{v} = \frac{1}{n} \cdot \sum_j v_j \cdot m_{v_j} .$$

Значит,

$$\overline{u} = \frac{1}{100} \cdot \left(-3 \cdot 6 - 2 \cdot 10 - 1 \cdot 61 + 0 \cdot 14 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4\right) = -0{,}86 .$$

$$\overline{v} = \frac{1}{100} \cdot \left(-3 \cdot 2 - 2 \cdot 8 - 1 \cdot 57 + 0 \cdot 18 + 1 \cdot 11 + 2 \cdot 4\right) = -0{,}60 .$$

Тогда выборочные средние $\overline{x}$ и $\overline{y}$ равны

$$\overline{x} = -0{,}86 \cdot 8 + 38 = 31{,}12 ,$$

$$\overline{y} = -0{,}60 \cdot 10 + 45 = 39 .$$

Среднеквадратические отклонения σ_x и σ_y признаков *X* и *Y* найдем по формулам:

$$\sigma_x = \sigma_u \cdot h_x \quad \text{и} \quad \sigma_y = \sigma_v \cdot h_y ,$$

где $\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\overline{u})^2}$ и $\sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\overline{v})^2}$.

Вычислим значения $\overline{u^2}$ и $\overline{v^2}$ воспользовавшись формулами:

$$\overline{u^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_i \left(u_i\right)^2 \cdot m_{u_i} \quad \text{и} \quad \overline{v^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_j \left(v_j\right)^2 \cdot m_{v_j} .$$

Значит,

$$\overline{u^2} = \frac{1}{100} \cdot \left((-3)^2 \cdot 6 + (-2)^2 \cdot 10 + (-1)^2 \cdot 61 + 0^2 \cdot 14 + 1^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 4\right) = 1{,}76 .$$

$$\overline{v^2} = \frac{1}{100} \cdot \left((-3)^2 \cdot 2 + (-2)^2 \cdot 8 + (-1)^2 \cdot 57 + 0^2 \cdot 18 + 1^2 \cdot 11 + 2^2 \cdot 4\right) = 1{,}34 .$$

Тогда σ_u и σ_v будут равны

$$\sigma_u = \sqrt{1{,}76 - (-0{,}86)^2} \approx 1{,}01,$$

$$\sigma_v = \sqrt{1{,}34 - (-0{,}60)^2} \approx 0{,}99 .$$

Следовательно, среднеквадратические отклонения σ_x и σ_y равны

$$\sigma_x = 1{,}01 \cdot 8 \approx 8{,}08\,,$$

$$\sigma_y = 0{,}99 \cdot 10 = 9{,}90\,.$$

Коэффициент корреляции признаков X и Y совпадает с коэффициентом корреляции условных вариант u и v, который вычисляем по формуле:

$$r = \frac{\overline{uv} - \bar{u} \cdot \bar{v}}{\sigma_u \cdot \sigma_v},$$

где $\overline{uv} = \frac{1}{n} \cdot \sum_i \sum_j u_i \cdot v_j \cdot m_{uv}$.

Вычислим $\overline{uv}$:

$$\overline{uv} = \frac{1}{100} \cdot ((-3)(-3 \cdot 2 - 2 \cdot 4) + (-2)(-2 \cdot 3 - 1 \cdot 7) + (-1)(-2 \cdot 1 - 1 \cdot 48 + 0 \cdot 10 + 1 \cdot 2) +$$

$$+0 \cdot (-1 \cdot 2 + 0 \cdot 7 + 1 \cdot 5) + 1 \cdot (0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2) + 2 \cdot (1 \cdot 2 + 2 \cdot 2)) = \frac{134}{100} = 1{,}34\,.$$

Вычислим выборочный коэффициент корреляции:

$$r = \frac{1{,}34 - (-0{,}86) \cdot (-0{,}60)}{1{,}01 \cdot 0{,}99} \approx 0{,}824\,.$$

Эмпирическое уравнение регрессии Y на X имеет вид:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot (x - \bar{x}),$$

где $\bar{y}_x$ – условная средняя, $\bar{x}$ и $\bar{y}$ – выборочные средние признаков X и Y, σ_x и σ_y – выборочные среднеквадратические отклонения, r – выборочный коэффициент корреляции.

Подставляя найденные значения $\bar{x} = 31{,}12$, $\bar{y} = 39$, $\sigma_x = 8{,}08$, $\sigma_y = 9{,}90$ и $r = 0{,}824$, получим

$$\bar{y}_x - 39 = 0{,}824 \cdot \frac{9{,}90}{8{,}08} \cdot (x - 31{,}12),$$

$$\bar{y}_x = 1{,}01x + 7{,}58\,.$$

Заметим, что в данном случае коэффициент корреляции $r_{xy} = 0{,}824$ близок к единице. Следовательно, между признаками X и Y существует умеренно-тесная связь.

Вычислим коэффициент детерминации $r_{xy}^2 \approx 0{,}68$. Такой коэффициент детерминации означает: 68% рассеивания зависимой случайной величины объясняются линейной регрессией Y на X, а 32% могут быть вызваны либо случайными ошибками эксперимента, либо тем, что линейная регрессионная модель плохо согласуется с данными эксперимента.

Ответ. $\bar{y}_x = 1{,}01x + 7{,}58$.

5. Статистические таблицы

Приложение 1. Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

x	Сотые доли									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2331	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001	0001

При $x \geq 4$ функция принимает значения $\varphi(x) = 0$.

Приложение 2. Таблица значений функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,45	0,1736	0,90	0,3159	1,35	0,4115	1,80	0,4641	2,50	0,4938
0,01	0,0040	0,46	0,1772	0,91	0,3186	1,36	0,4131	1,81	0,4649	2,52	0,4941
0,02	0,0080	0,47	0,1808	0,92	0,3212	1,37	0,4147	1,82	0,4656	2,54	0,4945
0,03	0,0120	0,48	0,1844	0,93	0,3238	1,38	0,4162	1,83	0,4664	2,56	0,4948
0,04	0,0160	0,49	0,1879	0,94	0,3264	1,39	0,4177	1,84	0,4671	2,58	0,4951
0,05	0,0199	0,50	0,1915	0,95	0,3289	1,40	0,4192	1,85	0,4678	2,60	0,4953
0,06	0,0239	0,51	0,1950	0,96	0,3315	1,41	0,4207	1,86	0,4686	2,62	0,4956
0,07	0,0279	0,52	0,1985	0,97	0,3340	1,42	0,4222	1,87	0,4693	2,64	0,4959
0,08	0,0319	0,53	0,2019	0,98	0,3365	1,43	0,4236	1,88	0,4699	2,66	0,4961
0,09	0,0359	0,54	0,2054	0,99	0,3389	1,44	0,4251	1,89	0,4706	2,68	0,4963
0,10	0,0398	0,55	0,2088	1,00	0,3413	1,45	0,4265	1,90	0,4713	2,70	0,4965
0,11	0,0438	0,56	0,2123	1,01	0,3438	1,46	0,4279	1,91	0,4719	2,72	0,4967
0,12	0,0478	0,57	0,2157	1,02	0,3461	1,47	0,4292	1,92	0,4726	2,74	0,4969
0,13	0,0517	0,58	0,2190	1,03	0,3485	1,48	0,4306	1,93	0,4732	2,76	0,4971
0,14	0,0557	0,59	0,2224	1,04	0,3508	1,49	0,4319	1,94	0,4738	2,78	0,4973
0,15	0,0596	0,60	0,2257	1,05	0,3531	1,50	0,4332	1,95	0,4744	2,80	0,4974
0,16	0,0636	0,61	0,2291	1,06	0,3554	1,51	0,4345	1,96	0,4750	2,82	0,4976
0,17	0,0675	0,62	0,2324	1,07	0,3577	1,52	0,4357	1,97	0,4756	2,84	0,4977
0,18	0,0714	0,63	0,2357	1,08	0,3599	1,53	0,4370	1,98	0,4761	2,86	0,4979
0,19	0,0753	0,64	0,2389	1,09	0,3621	1,54	0,4382	1,99	0,4767	2,88	0,4980
0,20	0,0793	0,65	0,2422	1,10	0,3643	1,55	0,4394	2,00	0,4772	2,90	0,4981
0,21	0,0832	0,66	0,2454	1,11	0,3665	1,56	0,4406	2,02	0,4783	2,92	0,4982
0,22	0,0871	0,67	0,2486	1,12	0,3686	1,57	0,4418	2,04	0,4793	2,94	0,4984
0,23	0,0910	0,68	0,2517	1,13	0,3708	1,58	0,4429	2,06	0,4803	2,96	0,4985
0,24	0,0948	0,69	0,2549	1,14	0,3729	1,59	0,4441	2,08	0,4812	2,98	0,4986
0,25	0,0987	0,70	0,2580	1,15	0,3749	1,60	0,4452	2,10	0,4821	3,00	0,4987
0,26	0,1026	0,71	0,2611	1,16	0,3770	1,61	0,4463	2,12	0,4830	3,20	0,4993
0,27	0,1064	0,72	0,2642	1,17	0,3790	1,62	0,4474	2,14	0,4838	3,40	0,4997
0,28	0,1103	0,73	0,2673	1,18	0,3810	1,63	0,4484	2,16	0,4846	3,60	0,4998
0,29	0,1141	0,74	0,2703	1,19	0,3830	1,64	0,4495	2,18	0,4854	3,80	0,4999
0,30	0,1179	0,75	0,2734	1,20	0,3849	1,65	0,4515	2,20	0,4861	4,00	0,4999
0,31	0,1217	0,76	0,2764	1,21	0,3869	1,66	0,4505	2,22	0,4868	4,50	0,5000
0,32	0,1255	0,77	0,2794	1,22	0,3883	1,67	0,4525	2,24	0,4875	5,00	0,5000
0,33	0,1293	0,78	0,2823	1,23	0,3907	1,68	0,4535	2,26	0,4881		
0,34	0,1331	0,79	0,2852	1,24	0,3925	1,69	0,4545	2,28	0,4887	↓	↓
0,35	0,1368	0,80	0,2881	1,25	0,3944	1,70	0,4554	2,30	0,4893	$+\infty$	0,5
0,36	0,1406	0,81	0,2910	1,26	0,3962	1,71	0,4564	2,32	0,4898		
0,37	0,1443	0,82	0,2939	1,27	0,3980	1,72	0,4573	2,34	0,4904		
0,38	0,1480	0,83	0,2967	1,28	0,3997	1,73	0,4582	2,36	0,4909		
0,39	0,1517	0,84	0,2995	1,29	0,4015	1,74	0,4591	2,38	0,4913		
0,40	0,1554	0,85	0,3023	1,30	0,4032	1,75	0,4599	2,40	0,4918		
0,41	0,1591	0,86	0,3051	1,31	0,4049	1,76	0,4608	2,42	0,4922		
0,42	0,1628	0,87	0,3078	1,32	0,4066	1,77	0,4616	2,44	0,4927		
0,43	0,1654	0,88	0,3106	1,33	0,4082	1,78	0,4625	2,46	0,4931		
0,44	0,1700	0,89	0,3133	1,34	0,4099	1,79	0,4633	2,48	0,4934		

Приложение 3. Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$.

$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Приложение 4. Таблица значений $q_\gamma = q(\gamma, n)$.

$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	1500	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Приложение 5. Критические точки распределения χ^2.

ν - число степеней свободы, α - уровень значимости.

ν \ α	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13`,815
3	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	5,989	7,779	9,488	11,668	13,237	18,467
5	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	14,631	17,275	19,675	22,618	24,795	31,264
12	15,812	18,549	21,026	24,054	24,217	32,909
13	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	18,151	21,064	23,685	26,783	29,141	36,123
15	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	21,615	24,769	27,587	30,995	32,409	40,790
18	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	23,900	27,204	30,144	33,678	36,191	43,820
20	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	30,675	34,382	37,652	41,566	42,314	52,620
26	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

Приложение 6. Значения $P_k = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$ (Распределение Пуассона).

k \ a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0019	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6							0,0001	0,0002	0,0003

k \ a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0037	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0126	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18							0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19							0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20								0,0002	0,0006	0,0019
21								0,0001	0,0003	0,0009
22									0,0001	0,0004
23										0,0002
24										0,0001

Литература

1. Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике: Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика: учеб. пособие / А.П. Рябушко. – Мн.: Выш. шк., 2006. – 336 с.: ил.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов / В.Е. Гмурман. – 8-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2003. – 405 с.: ил.

3. Белько И.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры и задачи: Учеб. пособие / И.В. Белько, Г.П. Свирид; под ред. К.К. Кузьмича – Мн.:Новое знание, 2002. –250 с.

4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упрвжнения по теории вероятностей. Учеб. пособие для втузов. – 3-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2000. – 366 с.: ил.

5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 256 с. – (высшее образование)

6. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. Учеб. пособие для втузов. – 2-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2000. – 480 с.: ил.

Содержание

Учебное издание

Составители: Гладкий Иван Иванович
Каримова Татьяна Ивановна
Махнист Леонид Петрович

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические рекомендации и варианты контрольной работы по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов технических специальностей заочной формы обучения

Ответственный за выпуск: Гладкий И.И.
Редактор: Строкач Т.В.
Компьютерная вёрстка: Кармаш Е.Л.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано в печать 26.05.2008 г. Формат 60х84 $^{1}/_{16}$. Бумага «Снегурочка».
Усл. п. л. 3,95. Уч. изд. л. 4,25. Заказ № 582. Тираж 100 экз.

Отпечатано на ризографе Учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.