МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»

Кафедра высшей математики

Математическое программирование

Методические указания и варианты заданий
для студентов экономических специальностей
заочной формы обучения

Брест 2003

УДК 519. 85 (076)

В методических указаниях и контрольных заданиях рассмотрены основные темы по математическому программированию: задача линейного программирования в случае двух переменных, графический способ ее решения и симплекс-метод; транспортная задача по критерию стоимости, построение начального опорного плана, метод потенциалов; задача о максимальном потоке, теорема Форда–Фалкерсона; основные понятия сетевого планирования, расчет временных параметров сетевого графика.

Приводятся подробные решения типовых задач контрольной работы по всем указанным темам.

Составители: ***Тузик Т.А.*****, доцент**
Рубанов В.С.**, доцент, к.-ф.-м.н.**

Рецензент: зав. кафедрой математического моделирования УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н., доцент *С.А. Тузик*.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Основной формой изучения курса высшей математики для студентов-заочников является *самостоятельная работа* с учебниками, учебными пособиями, сборниками задач и упражнений, справочниками. Список основных и наиболее доступных из них приводится в конце пособия.

Изучение любого раздела курса следует начинать с *конспекта установочных лекций,* соответствующих глав учебника, учебного пособия или руководства к решению задач, в которых имеется необходимая теория, приводятся расчетные формулы и решения задач по темам. После этого, по аналогии с решением типового варианта к контрольной работе, можно приступать к решению самой контрольной работы.

Номер варианта контрольной работы совпадает с двумя последними цифрами номера зачетной книжки (шифра).

При выполнении контрольной работы следует руководствоваться следующими требованиями:

1. Контрольная работа должна быть выполнена и представлена на проверку в срок, предусмотренный учебным планом.
2. Контрольную работу желательно выполнять в отдельной тетради, оставляя поля для замечаний рецензента.
3. Условия всех задач нужно записывать полностью, а их решения располагать в порядке номеров, указанных в заданиях.
4. В конце работы надо указать перечень использованной литературы, поставить подпись и дату.
5. В случае, если работа «не допущена к защите», студент в этой же тетради должен исправить все отмеченные ошибки и недочеты и представить ее на повторное рецензирование.

В случае необходимости студент может обращаться за консультациями к преподавателю кафедры, проверяющему контрольные работы в группе, лектору потока, либо к преподавателям, проводящим консультации студентов-заочников по графику, утвержденному на кафедре.

ВОПРОСЫ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ

1. Классификация задач математического программирования. Линейные экономико-математические модели.
2. Формы записи задач линейного программирования (ЛП), их эквивалентность и способы преобразования. Геометрическая интерпретация и графическое решение задачи ЛП для двух переменных. Свойства решений задачи ЛП.
3. Общая идея симплекс-метода, построение начального опорного плана.
4. Признак оптимальности опорного плана, переход к не худшему опорному плану. Симплексные таблицы и преобразования.
5. Альтернативный оптимум. Признак неограниченности целевой функции. Понятие о вырождении, зацикливание.
6. Понятие о двойственности. Построение двойственных задач.
7. Теоремы двойственности и их экономическое содержание.
8. Экономическая интерпретация и анализ двойственных оценок.
9. Транспортная задача по критерию стоимости; закрытая и открытая модели.
10. Построение начального опорного плана. Метод потенциалов.
11. Основные понятия теории графов. Упорядочение элементов графа. Алгоритм Фалкерсона.
12. Потоки на сетях. Задача о максимальном потоке. Алгоритм решения задач о максимальном потоке. Теорема Форда-Фалкерсона.
13. Основные понятия сетевого планирования. Расчет параметров сетевого графика. Анализ сетевого графика.
14. Матричные игры с нулевой суммой. Чистые и смешанные стратегии, их свойства. Простейшие способы решения.
15. Приведение матричной игры к задаче линейного программирования.
16. Понятие об играх с ненулевой суммой. Применение аппарата теории игр для анализа проблем микроэкономики.
17. Статистические игры. Критерии для принятия решений.

ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Задание 1. Найти графическим способом максимальное и минимальное значения целевой функции $\mathbb{Z}$ при заданных ограничениях на переменные.

Вариант 1.
$$\mathbb{Z} = 2x + y$$
$$\begin{cases} -x + 3y \le 9, \\ 4x - y \le 8, \\ 3x + 2y \ge 6, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 2.
$$\mathbb{Z} = x - 2y$$
$$\begin{cases} -2x + 3y \le 6, \\ 4x + y \le 16, \\ x + 2y \ge 4, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 3.
$$\mathbb{Z} = 5x + 10y$$
$$\begin{cases} 5x + 2y \le 70, \\ x + y \le 20, \\ 2x + y \ge 10, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 4.
$$\mathbb{Z} = 4x + 2y$$
$$\begin{cases} -x + 2y \le 6, \\ x + y \le 12, \\ x + 4y \ge 18, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 5.
$$\mathbb{Z} = -2x + 2y$$
$$\begin{cases} 4x - 3y \le 12, \\ x + y \le 10, \\ 2x + y \ge 6, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 6.
$$\mathbb{Z} = 3x + y$$
$$\begin{cases} x + 3y \le 15, \\ 2x + y \ge 4, \\ 4x - y \le 8, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 7.
$$\mathbb{Z} = 2x + 3y$$
$$\begin{cases} -2x + 9y \le 54, \\ 2x + 3y \ge 18, \\ 2x - y \le 10, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 8.
$$\mathbb{Z} = -2x + y$$
$$\begin{cases} 4x + 3y \le 24, \\ 2x + 3y \ge 12, \\ -2x + 5y \le 20, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 9.
$$\mathbb{Z} = 5x - 3y$$
$$\begin{cases} -2x + 5y \le 15, \\ 3x + 8y \ge 24, \\ 7x - 2y \le 30, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 10.
$$\mathbb{Z} = -x + 5y$$
$$\begin{cases} -3x + 8y \le 36, \\ 8x - 3y \le 14, \\ 4x + 5y \ge 20, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 11.
$$\mathbb{Z} = x + 2y$$
$$\begin{cases} 4x + y \ge 8, \\ x + 2y \le 9, \\ 2x - y \le 8, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 12.
$$\mathbb{Z} = -4x - y$$
$$\begin{cases} 5x + 2y \ge 10, \\ 6x - y \le 30, \\ -x + 6y \le 30, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 13.
$$\mathbb{Z} = 3x + 2y$$
$$\begin{cases} -5x + 6y \le 12, \\ 9x + 4y \le 45, \\ x + 2y \ge 4, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 14.
$$\mathbb{Z} = 2x - y$$
$$\begin{cases} -2x + 7y \le 21, \\ 5x - 3y \le 20, \\ x + y \ge 3, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 15.
$$\mathbb{Z} = x + 3y$$
$$\begin{cases} -2x + 3y \le 6, \\ 4x - y \le 8, \\ 4x + 3y \ge 12, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 16.

$$\mathbb{Z} = -3x + 2y$$

$$\begin{cases} x + 6y \le 30, \\ x - y \le 2, \\ 9x - 2y \ge 18, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 17.

$$\mathbb{Z} = 3x - 3y$$

$$\begin{cases} 3x + 2y \ge 6, \\ -5x + 8y \le 7, \\ x - y \le 1, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 18

$$\mathbb{Z} = -x + 4y$$

$$\begin{cases} -x + 4y \le 16, \\ 5x + 3y \le 35, \\ 10x + 26y \ge 65, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 19.

$$\mathbb{Z} = x + y$$

$$\begin{cases} x + 4y \le 16, \\ 4x + y \ge 4, \\ 3x - 2y \le 6, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 20.

$$\mathbb{Z} = 2x + 5y$$

$$\begin{cases} -x + 4y \le 8, \\ 3x + y \le 15, \\ x + 2y \ge 4, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 21.

$$\mathbb{Z} = -2x + 8y$$

$$\begin{cases} 7x + 3y \ge 24, \\ 2x - 3y \le 3, \\ x + 3y \le 15, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 22.

$$\mathbb{Z} = 4x + 2y$$

$$\begin{cases} -3x + 5y \le 16, \\ 5x + 3y \ge 30, \\ 4x - y \le 24, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 23.

$$\mathbb{Z} = 3x - y$$

$$\begin{cases} x + 2y \le 14, \\ 3x + 2y \ge 18, \\ x + 4y \ge 16, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 24.

$$\mathbb{Z} = 2x - 5y$$

$$\begin{cases} -x + y \le 5, \\ x + 4y \ge 35, \\ x + y \le 14, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 25.

$$\mathbb{Z} = -2x + 3y$$

$$\begin{cases} -x + 4y \le 18, \\ 5x - 2y \le 18, \\ 2x + y \ge 9, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 26.

$$\mathbb{Z} = x - 3y$$

$$\begin{cases} -x + 3y \le 15, \\ 3x + y \le 15, \\ x + y \ge 2, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 27.

$$\mathbb{Z} = 3x - 6y$$

$$\begin{cases} -x + y \le 1, \\ x + 2y \ge 2, \\ x + y \le 5, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 28.

$$\mathbb{Z} = -2x + 3y$$

$$\begin{cases} 3x + y \ge 5, \\ 2x + 3y \le 15, \\ x + 5y \ge 11, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 29.

$$\mathbb{Z} = x + 2y$$

$$\begin{cases} 2x + y \ge 4, \\ -2x + 3y \le 6, \\ 2x - y \le 2, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 30.

$$\mathbb{Z} = 4x + 6y$$

$$\begin{cases} x + 3y \le 15, \\ 2x - 3y \le 3, \\ 4x + 3y \ge 15, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Задание 2. Найти симплексным методом ***максимум*** (в ***нечетных*** вариантах) или ***минимум*** (в ***четных*** вариантах) целевой функции Z

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \quad \text{при ограничениях} \quad \begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 \le d_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 \le d_2, \\ a_3x_1 + b_3x_2 \le d_3, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант	c_1	c_2	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	d_1	d_2	d_3
1.	16	8	1	-1	4	1	2	1	6	6	18
2.	10	-15	-1	-1	5	1	3	1	2	10	30
3.	3	2	-2	1	5	1	2	-2	2	9	15
4.	-3	4	-1	1	1	2	1	-2	6	6	3
5.	6	6	1	2	1	3	1	-2	12	9	2
6.	-5	-5	-1	1	3	3	2	-2	9	11	9
7.	9	6	-1	1	2	1	2	-1	3	9	8
8.	4	-10	-1	1	5	2	2	-2	2	10	20
9.	7	7	-3	1	4	2	3	-1	4	17	16
10.	-8	4	-2	3	1	3	4	-1	9	29	5
11.	4	2	1	-2	3	1	3	-2	8	9	9
12.	-6	-4	1	2	1	2	1	-1	8	7	2
13.	9	9	2	1	0	3	-1	1	16	3	4
14.	-2	-8	-1	3	1	3	2	0	9	17	5
15.	3	8	1	2	1	3	1	-1	12	9	3
16.	-4	-2	-1	3	7	1	4	2	4	23	28
17.	5	2	-2	2	4	5	3	-5	15	17	12
18.	2	-8	-3	3	5	4	5	1	10	26	25
19.	2	3	-3	1	2	4	3	1	6	11	12
20.	-3	2	-2	1	1	3	1	-1	6	7	5
21.	4	3	2	6	1	14	10	0	49	51	6
22.	-3	-2	-3	1	3	4	4	-2	10	18	12
23.	1	3	3	2	0	2	-1	1	16	6	5
24.	-2	-3	1	8	6	4	6	-4	16	37	15
25.	1	2	-2	4	4	2	7	-1	15	34	18
26.	1	-4	-1	6	2	3	5	-1	9	38	10
27.	1	5	-1	1	7	2	2	-2	6	14	42
28.	-2	-3	-4	2	3	3	5	2	6	23	18
29.	3	1	1	1	4	4	1	-3	20	8	18
30.	-1	-3	-4	4	5	6	6	2	15	39	35

Задание 3. Составить план перевозок однородной продукции из трех пунктов A_1, A_2, A_3 отправления в три пункта B_1, B_2, B_3 назначения. План должен обеспечить минимальные транспортные издержки и полностью удовлетворить спрос потребителей. Запасы a_i, потребности b_j и стоимости $c_{ij}(i, j = 1,2,3)$ перевозки единицы продукции известны.

Вариант 1. $a_1 = 25;\ a_2 = 55;\ a_3 = 60;$ $b_1 = 40;\ b_2 = 20;\ b_3 = 80;$ $\left\Vert c_{ij} \right\Vert = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$	**Вариант 2.** $a_1 = 70;\ a_2 = 100;\ a_3 = 110;$ $b_1 = 80;\ b_2 = 50;\ b_3 = 150;$ $\left\Vert c_{ij} \right\Vert = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$	**Вариант 3.** $a_1 = 15;\ a_2 = 25;\ a_3 = 30;$ $b_1 = 20;\ b_2 = 10;\ b_3 = 40;$ $\left\Vert c_{ij} \right\Vert = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$
Вариант 4. $a_1 = 25;\ a_2 = 30;\ a_3 = 40;$ $b_1 = 35;\ b_2 = 15;\ b_3 = 45;$ $\left\Vert c_{ij} \right\Vert = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$	**Вариант 5.** $a_1 = 70;\ a_2 = 40;\ a_3 = 90;$ $b_1 = 30;\ b_2 = 50;\ b_3 = 120;$ $\left\Vert c_{ij} \right\Vert = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$	**Вариант 6.** $a_1 = 90;\ a_2 = 200;\ a_3 = 100;$ $b_1 = 140;\ b_2 = 100;\ b_3 = 150;$ $\left\Vert c_{ij} \right\Vert = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$
Вариант 7. $a_1 = 50;\ a_2 = 30;\ a_3 = 60;$ $b_1 = 20;\ b_2 = 40;\ b_3 = 80;$ $\left\Vert c_{ij} \right\Vert = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$	**Вариант 8.** $a_1 = 50;\ a_2 = 120;\ a_3 = 30;$ $b_1 = 40;\ b_2 = 70;\ b_3 = 90;$ $\left\Vert c_{ij} \right\Vert = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$	**Вариант 9.** $a_1 = 126;\ a_2 = 44;\ a_3 = 30;$ $b_1 = 40;\ b_2 = 112;\ b_3 = 48;$ $\left\Vert c_{ij} \right\Vert = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$
Вариант 10. $a_1 = 16;\ a_2 = 22;\ a_3 = 12;$ $b_1 = 18;\ b_2 = 12;\ b_3 = 20;$ $\left\Vert c_{ij} \right\Vert = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$	**Вариант 11.** $a_1 = 25;\ a_2 = 30;\ a_3 = 45;$ $b_1 = 20;\ b_2 = 40;\ b_3 = 40;$ $\left\Vert c_{ij} \right\Vert = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \\ 8 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$	**Вариант 12.** $a_1 = 50;\ a_2 = 100;\ a_3 = 130;$ $b_1 = 70;\ b_2 = 90;\ b_3 = 120;$ $\left\Vert c_{ij} \right\Vert = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$

Вариант 13.

$a_1 = 40;\ a_2 = 20;\ a_3 = 80;$

$b_1 = 25;\ b_2 = 55;\ b_3 = 60;$

$$\left\| c_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 14.

$a_1 = 35;\ a_2 = 65;\ a_3 = 70;$

$b_1 = 50;\ b_2 = 30;\ b_3 = 90;$

$$\left\| c_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 15.

$a_1 = 65;\ a_2 = 95;\ a_3 = 105;$

$b_1 = 75;\ b_2 = 45;\ b_3 = 145;$

$$\left\| c_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вариант 16.

$a_1 = 90;\ a_2 = 200;\ a_3 = 110;$

$b_1 = 140;\ b_2 = 100; b_3 = 160;$

$$\left\| c_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вариант 17.

$a_1 = 35;\ a_2 = 70;\ a_3 = 55;$

$b_1 = 40;\ b_2 = 60;\ b_3 = 60;$

$$\left\| c_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Вариант 18.

$a_1 = 50;\ a_2 = 100;\ a_3 = 50;$

$b_1 = 40;\ b_2 = 130;\ b_3 = 30;$

$$\left\| c_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Вариант 19.

$a_1 = 45;\ a_2 = 75;\ a_3 = 60;$

$b_1 = 70;\ b_2 = 80;\ b_3 = 30;$

$$\left\| c_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вариант 20.

$a_1 = 60; a_2 = 90; a_3 = 130;$

$b_1 = 100; b_2 = 70; b_3 = 110;$

$$\left\| c_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вариант 21.

$a_1 = 180; a_2 = 120; a_3 = 200;$

$b_1 = 160; b_2 = 230; b_3 = 110;$

$$\left\| c_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Вариант 22.

$a_1 = 96;\ a_2 = 130;\ a_3 = 74;$

$b_1 = 108;\ b_2 = 72;\ b_3 = 120;$

$$\left\| c_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Вариант 23.

$a_1 = 43;\ a_2 = 59;\ a_3 = 78;$

$b_1 = 58;\ b_2 = 38;\ b_3 = 84;$

$$\left\| c_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 24.

$a_1 = 45;\ a_2 = 80;\ a_3 = 75;$

$b_1 = 50;\ b_2 = 65;\ b_3 = 85;$

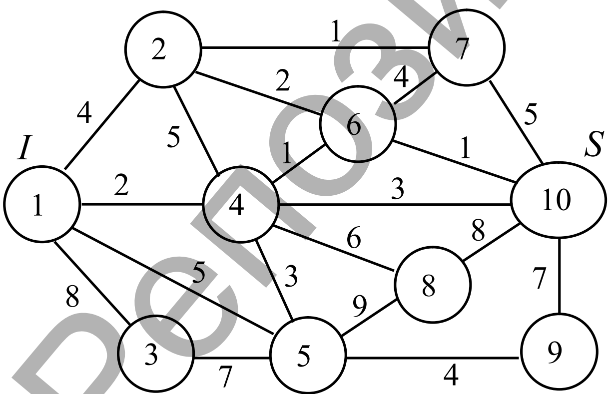
$$\left\| c_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 25.	Вариант 26.	Вариант 27.
$a_1 = 45;\ a_2 = 50;\ a_3 = 60;$ $b_1 = 55;\ b_2 = 35;\ b_3 = 65;$ $\left\lVert c_{ij} \right\rVert = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$	$a_1 = 80;\ a_2 = 160;\ a_3 = 90;$ $b_1 = 130;\ b_2 = 60;\ b_3 = 140;$ $\left\lVert c_{ij} \right\rVert = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$	$a_1 = 42;\ a_2 = 26;\ a_3 = 88;$ $b_1 = 27;\ b_2 = 60;\ b_3 = 69;$ $\left\lVert c_{ij} \right\rVert = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$

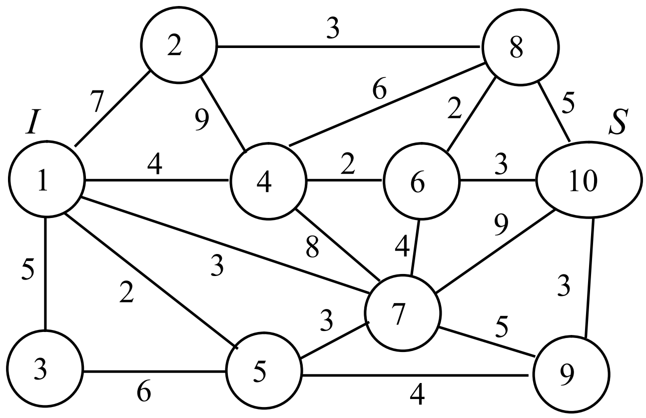
Вариант 28.	Вариант 29.	Вариант 30.
$a_1 = 130;\ a_2 = 30;\ a_3 = 30;$ $b_1 = 30;\ b_2 = 120;\ b_3 = 40;$ $\left\lVert c_{ij} \right\rVert = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$	$a_1 = 20;\ a_2 = 10;\ a_3 = 40;$ $b_1 = 15;\ b_2 = 25;\ b_3 = 30;$ $\left\lVert c_{ij} \right\rVert = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$	$a_1 = 80;\ a_2 = 50;\ a_3 = 100;$ $b_1 = 40;\ b_2 = 60;\ b_3 = 130;$ $\left\lVert c_{ij} \right\rVert = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$

Задание 4. На заданной сети указаны пропускные особенности ребер (одинаковые в обоих направлениях). Сформировать на сети поток максимальной мощности, направленный из истока I в сток S.

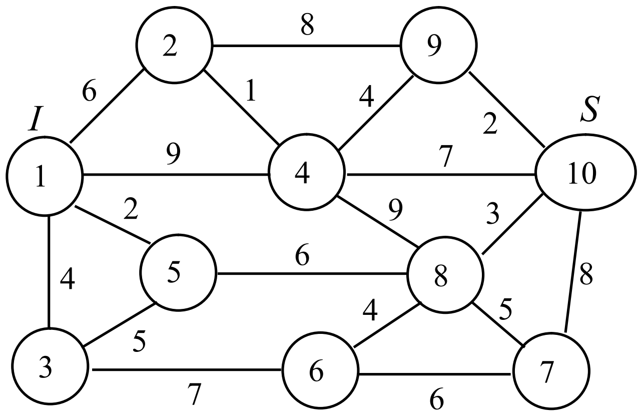
Вариант 1.



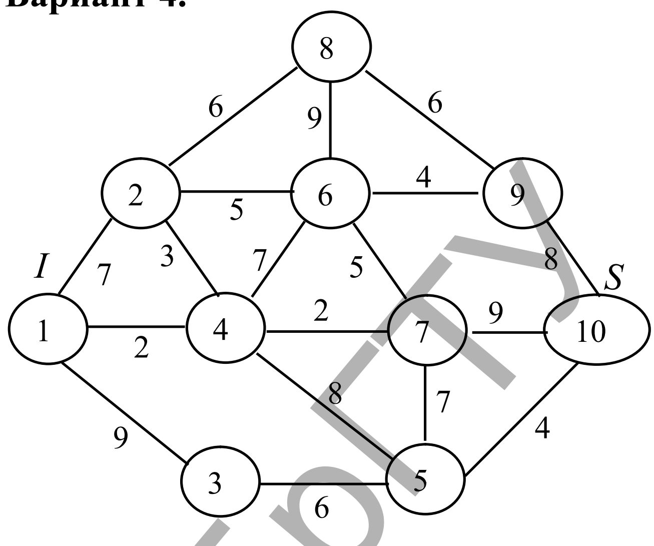
Вариант 2.



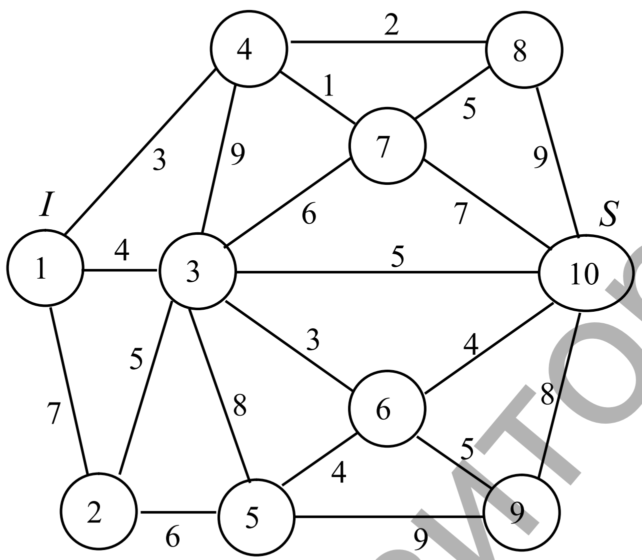
Вариант 3.



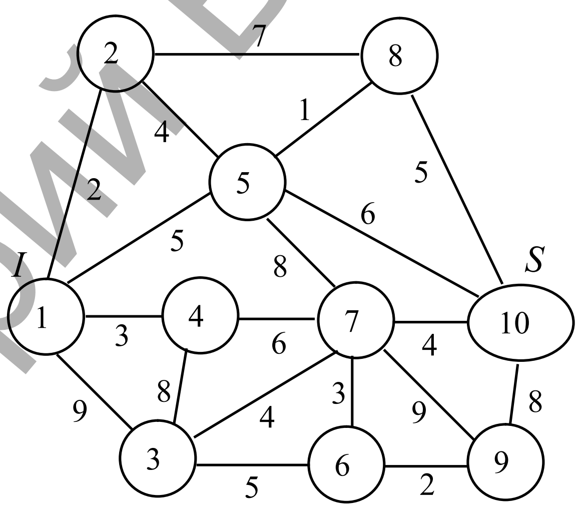
Вариант 4.



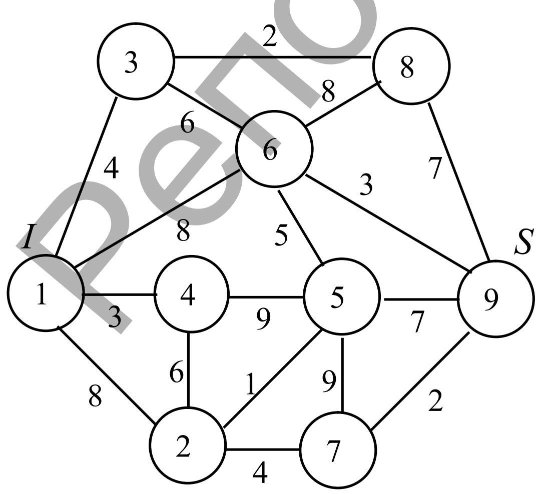
Вариант 5.



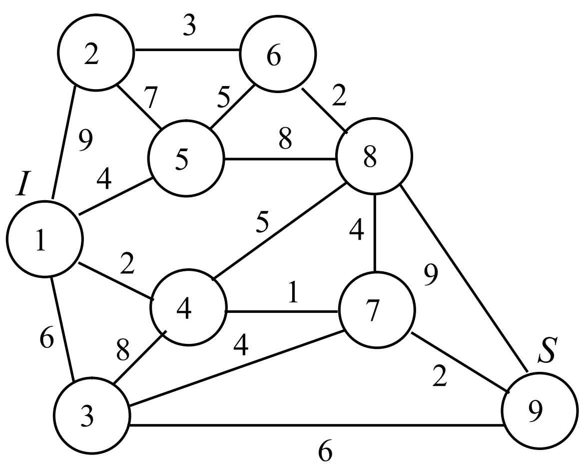
Вариант 6.



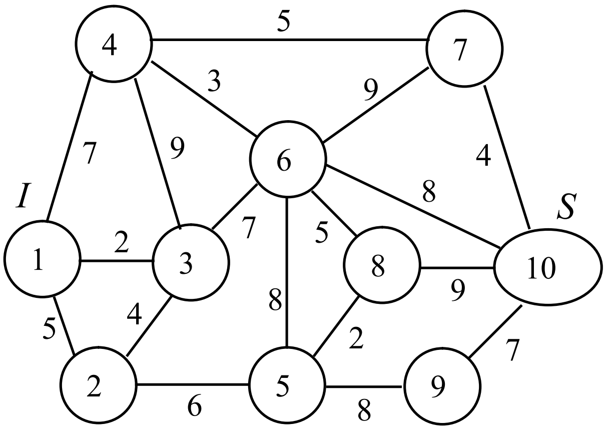
Вариант 7.



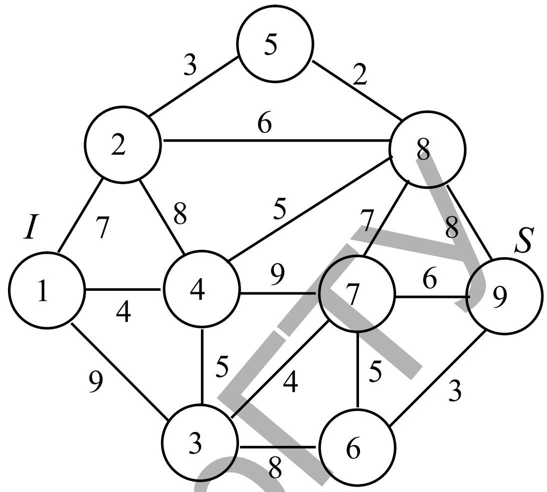
Вариант 8.



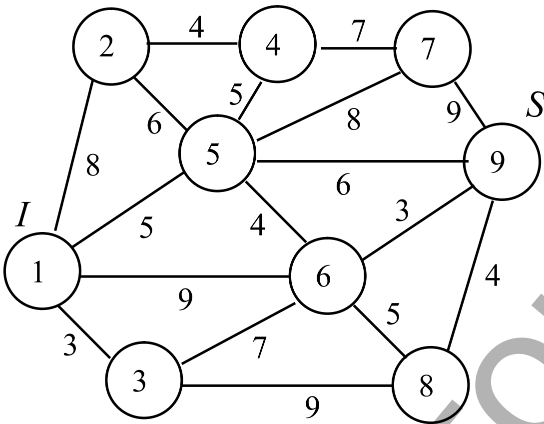
Вариант 9.



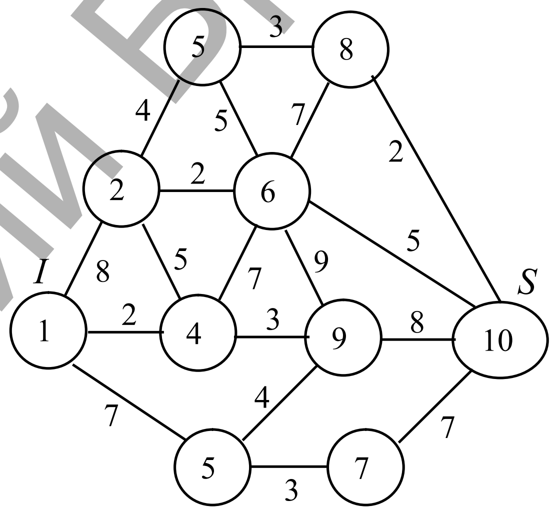
Вариант 10.



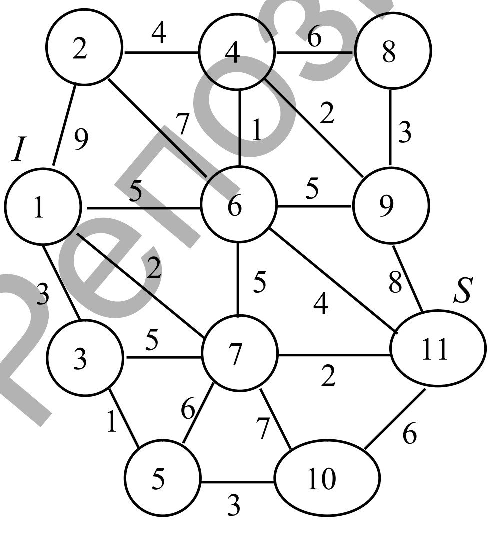
Вариант 11.



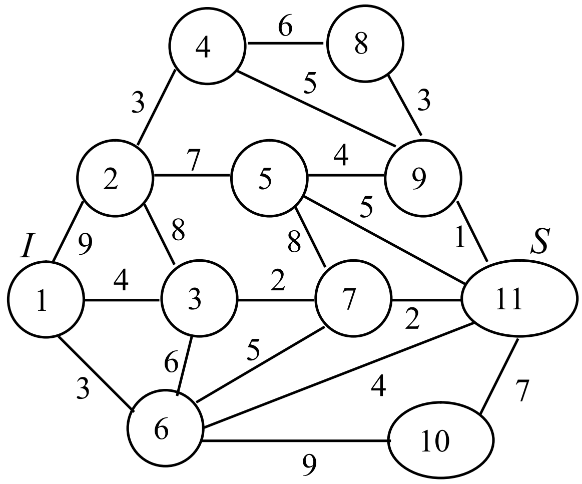
Вариант 12.



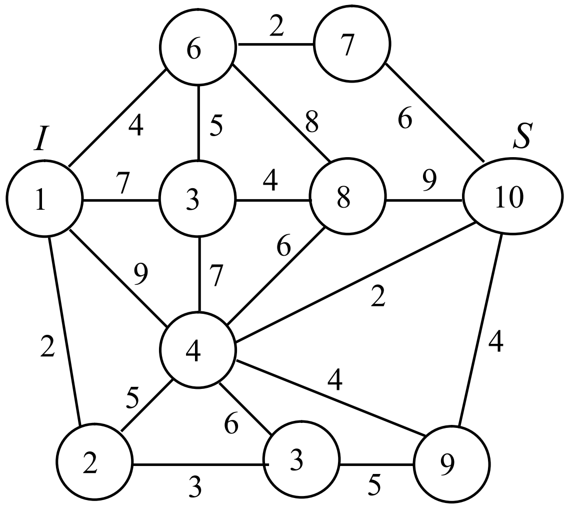
Вариант 13.



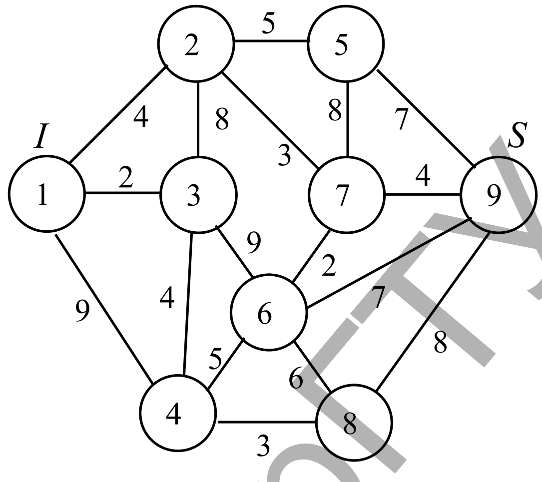
Вариант 14.



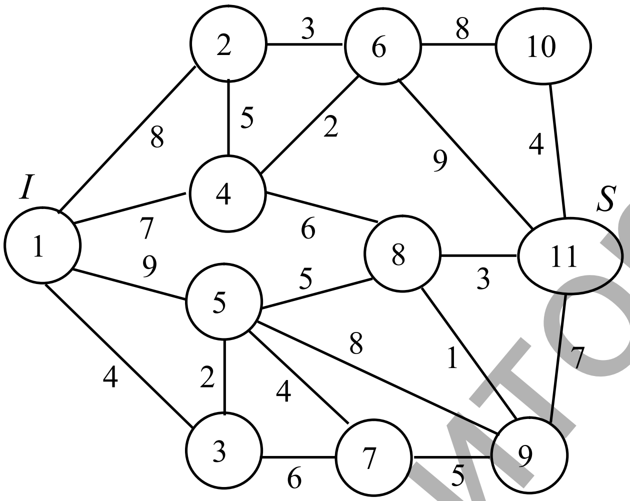
Вариант 15.



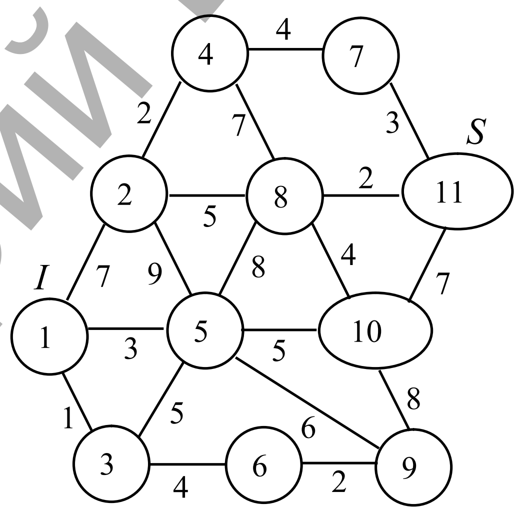
Вариант 16.



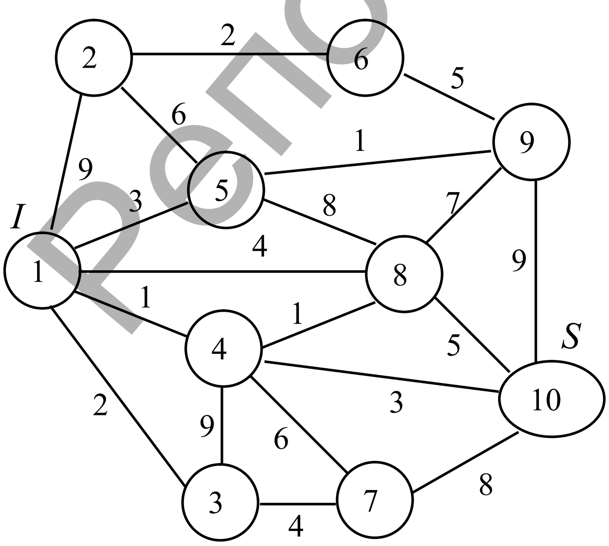
Вариант 17.



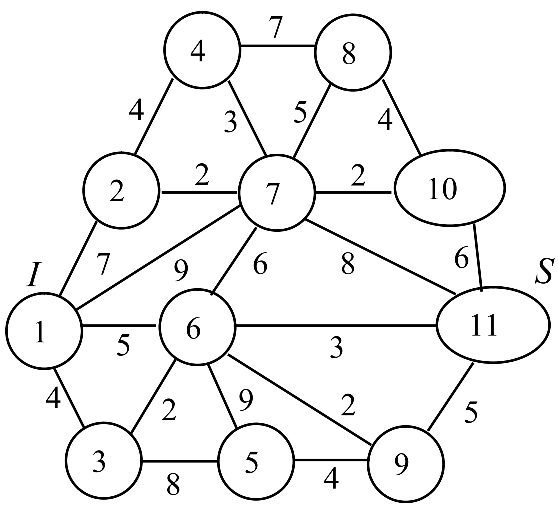
Вариант 18.



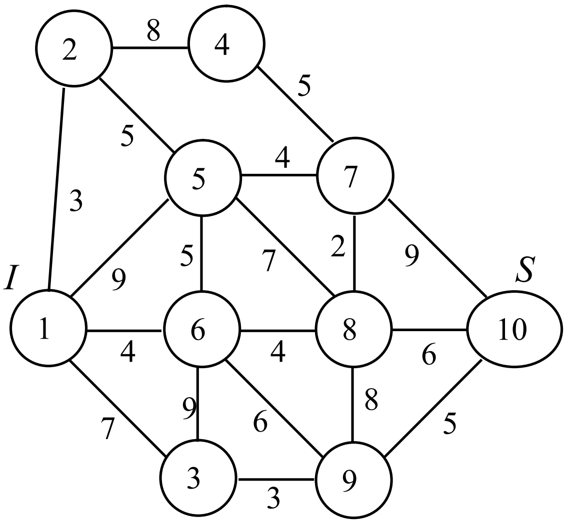
Вариант 19.



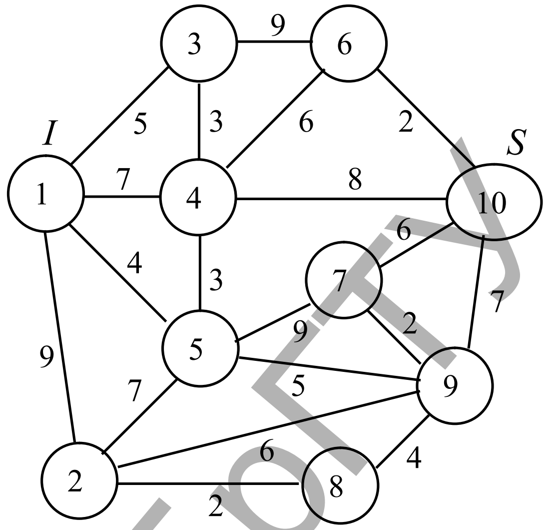
Вариант 20.



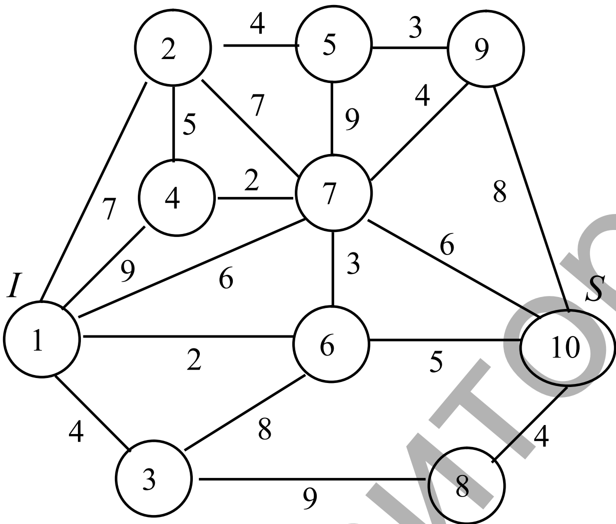
Вариант 21.



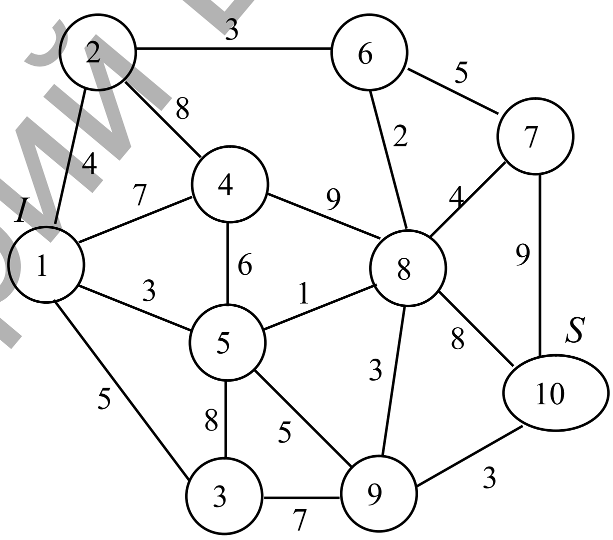
Вариант 22.



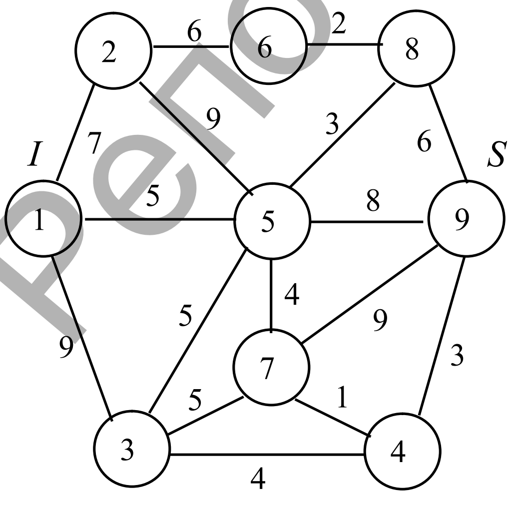
Вариант 23.



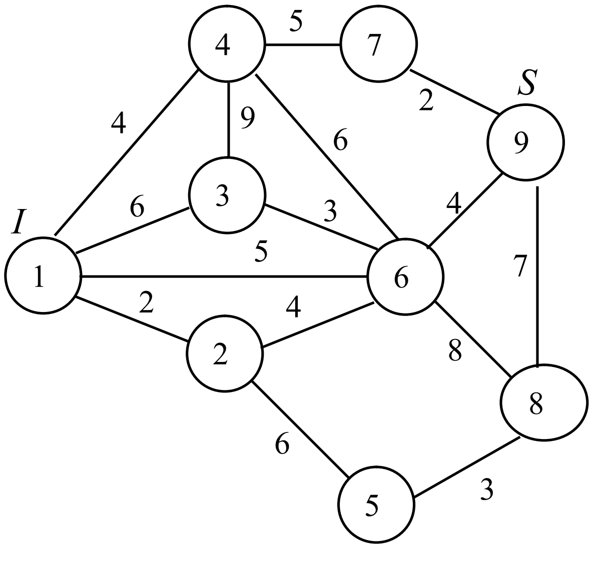
Вариант 24.



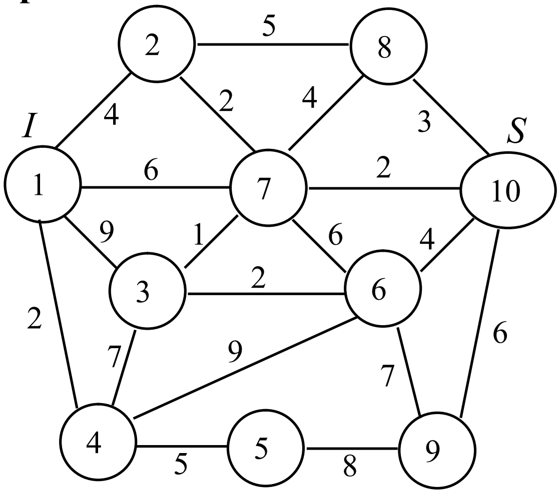
Вариант 25.



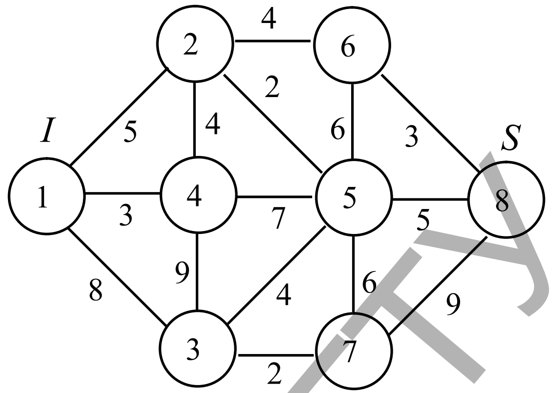
Вариант 26.



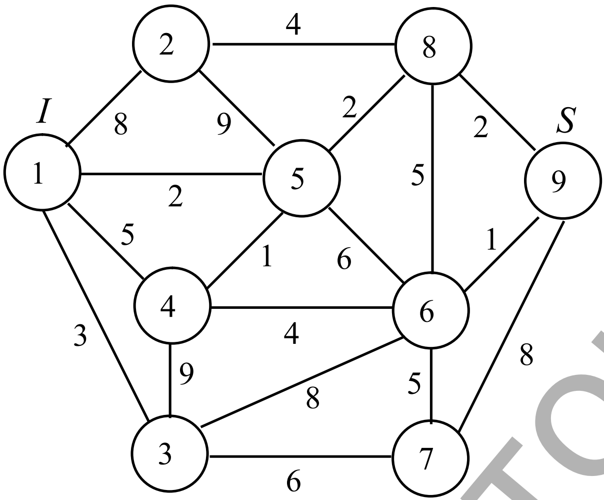
Вариант 27.



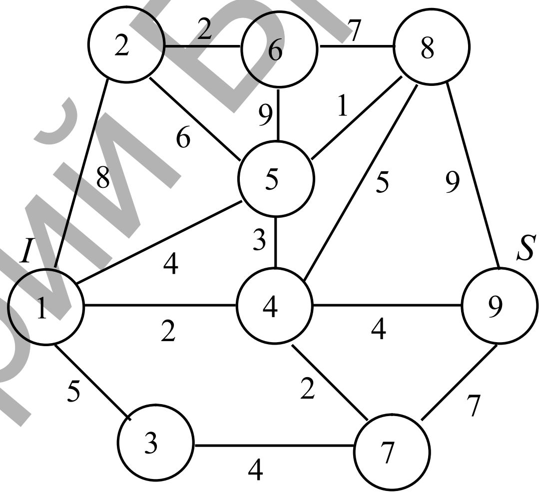
Вариант 28.



Вариант 29.



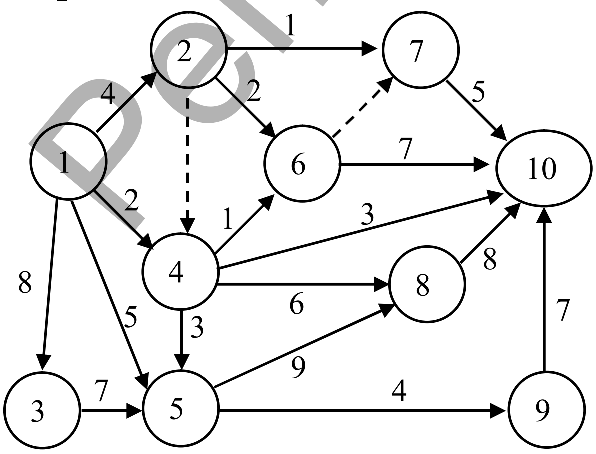
Вариант 30.



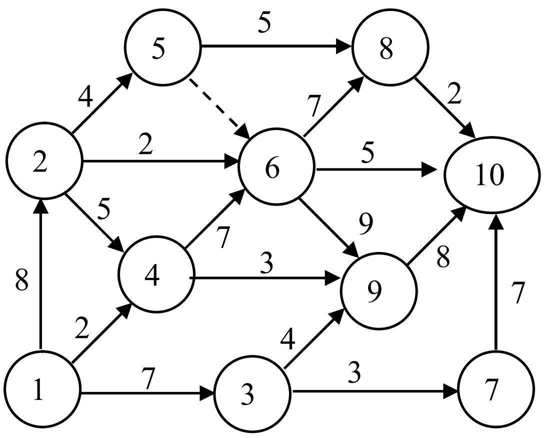
Задание 5. Для данного сетевого графика комплекса работ рассчитать:

1. ранние сроки свершения событий;
2. поздние сроки свершения событий;
3. резервы времени событий;
4. время выполнения комплекса и критический путь.

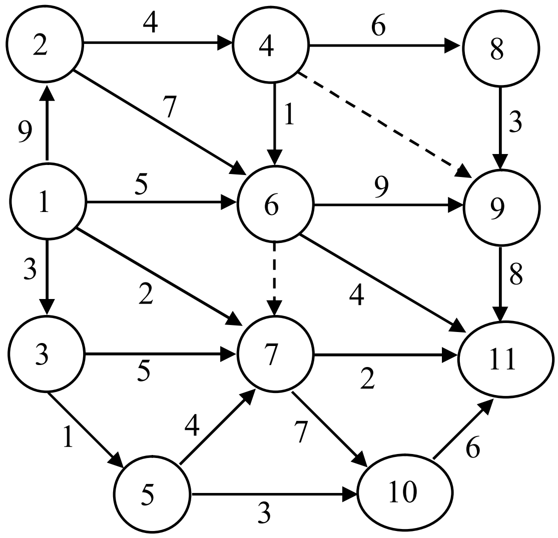
Вариант 1.



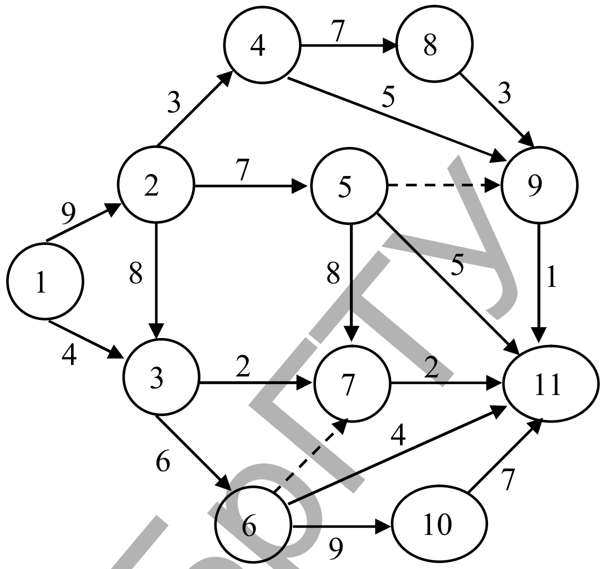
Вариант 2.



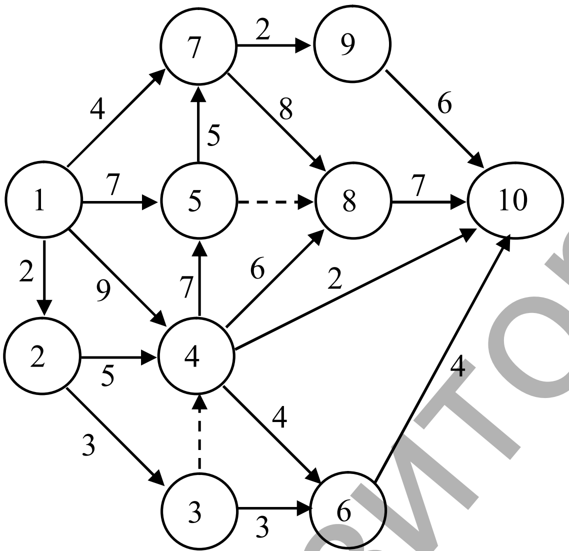
Вариант 3.



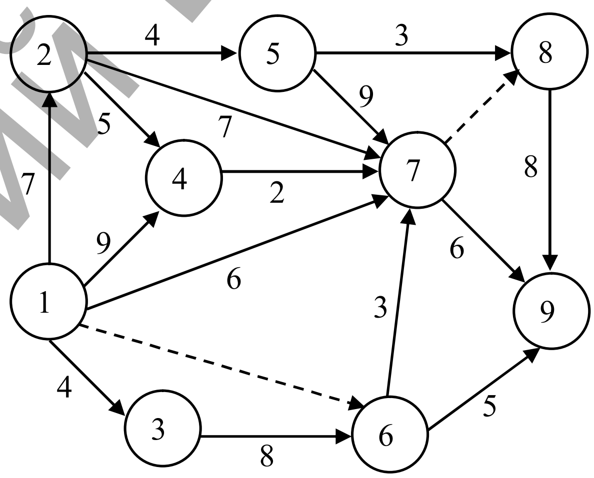
Вариант 4.



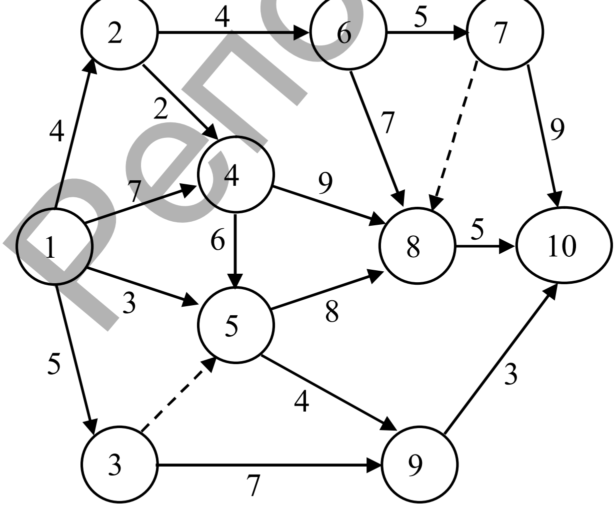
Вариант 5.



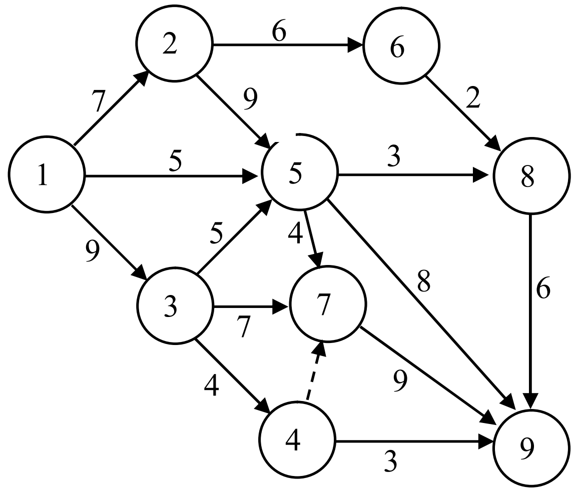
Вариант 6.



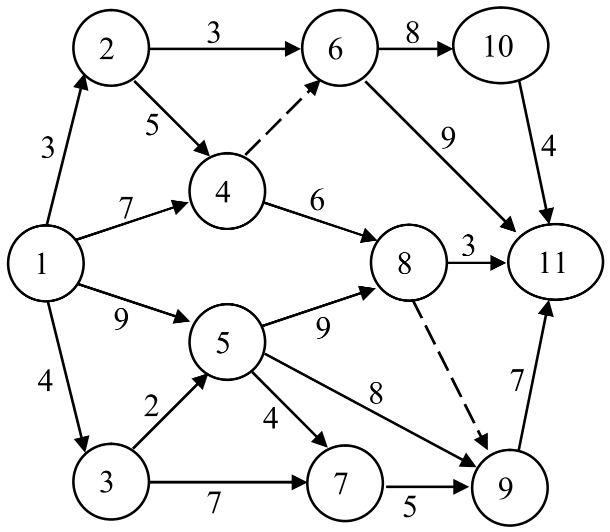
Вариант 7.



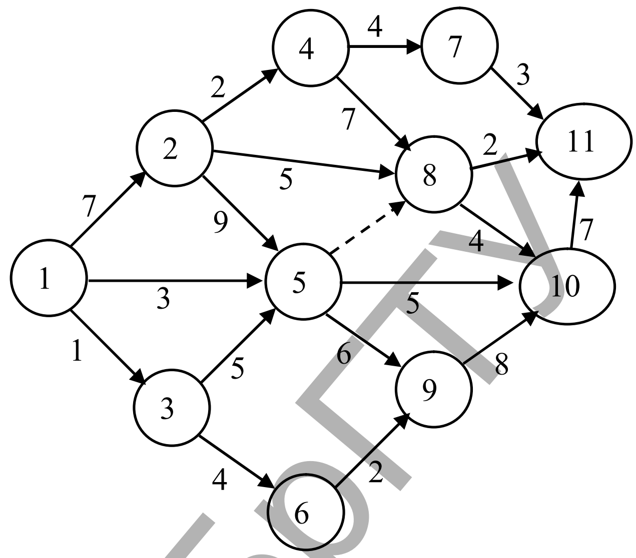
Вариант 8.



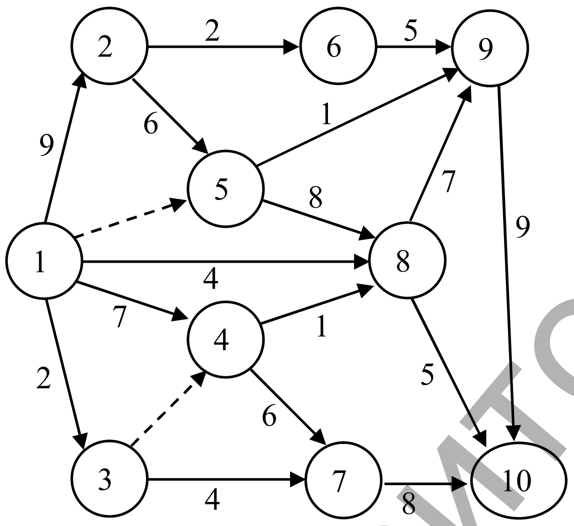
Вариант 9.



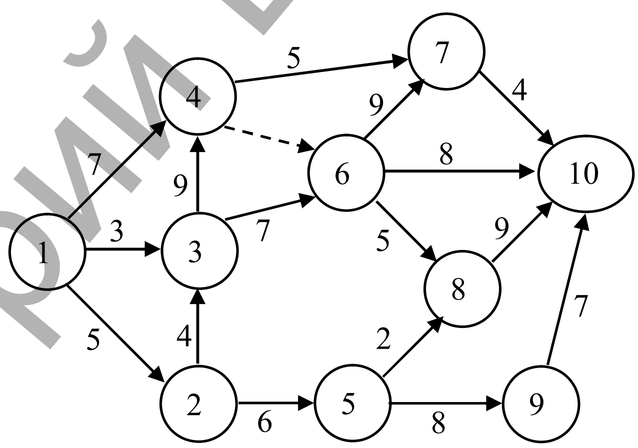
Вариант 10.



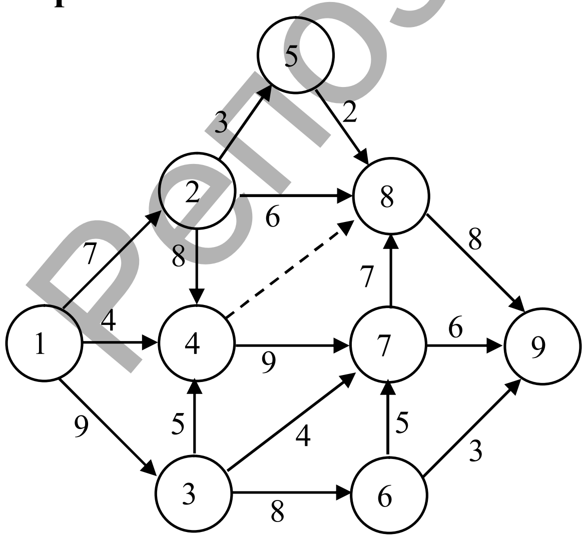
Вариант 11.



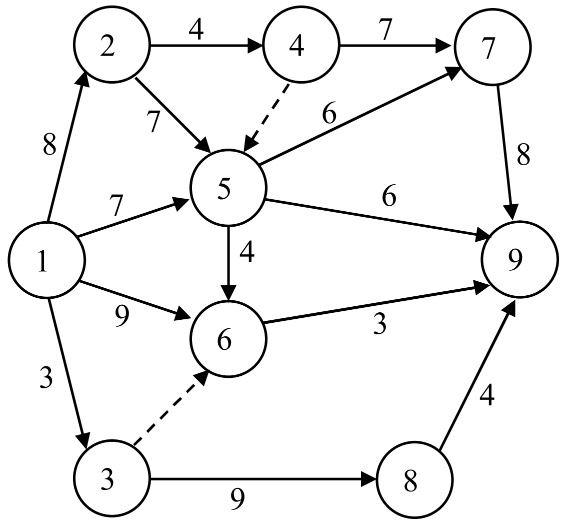
Вариант 12.



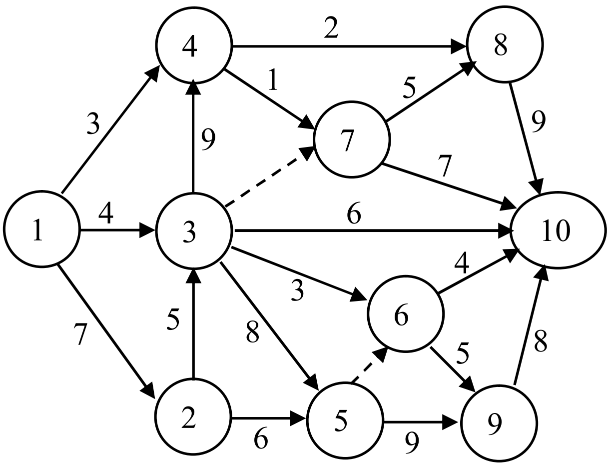
Вариант 13.



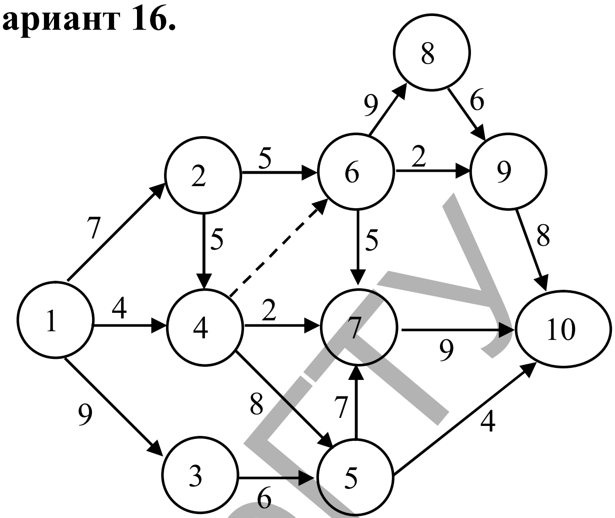
Вариант 14.



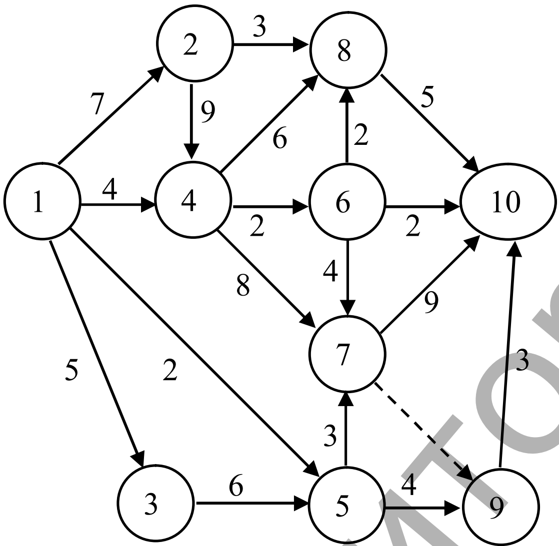
Вариант 15.



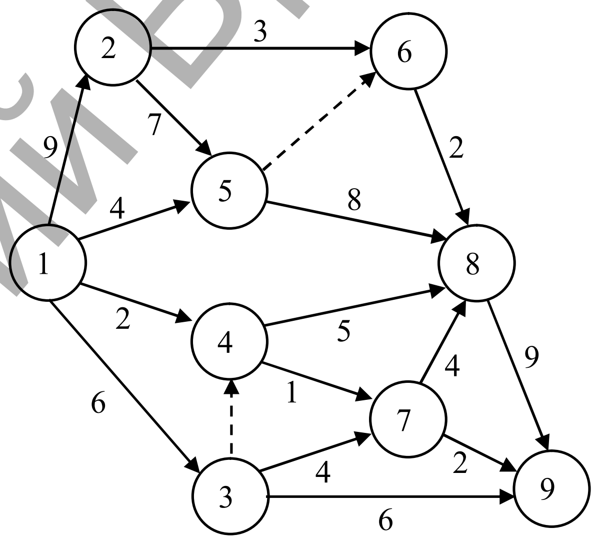
Вариант 16.



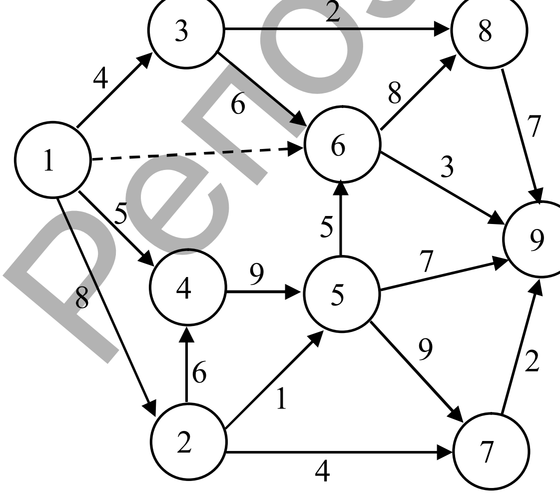
Вариант 17.



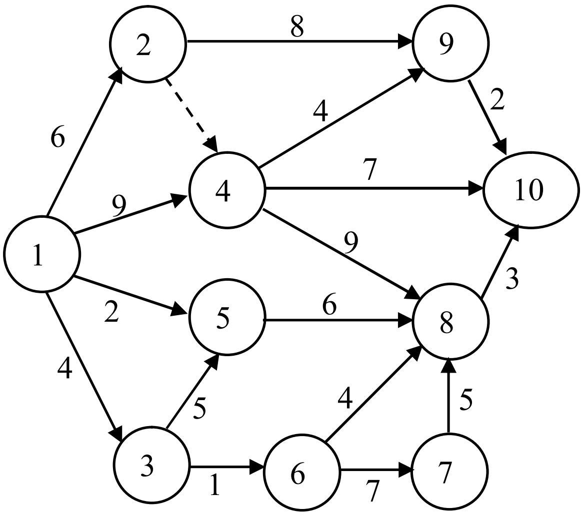
Вариант 18.



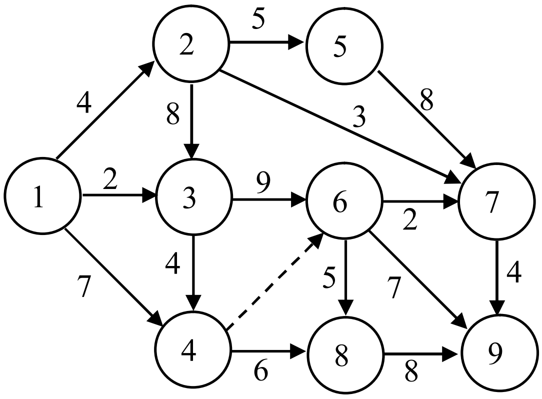
Вариант 19.



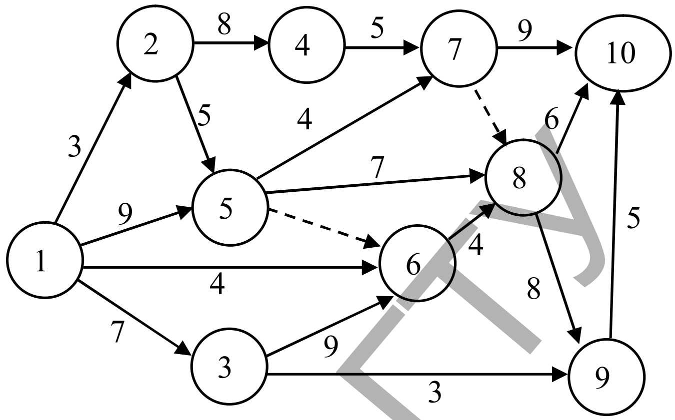
Вариант 20.



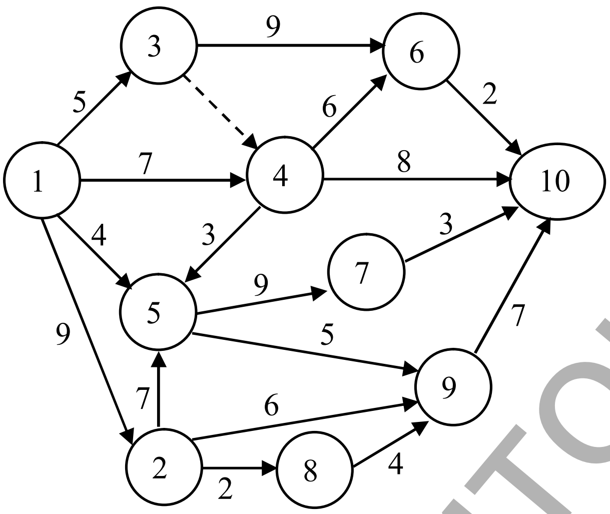
Вариант 21.



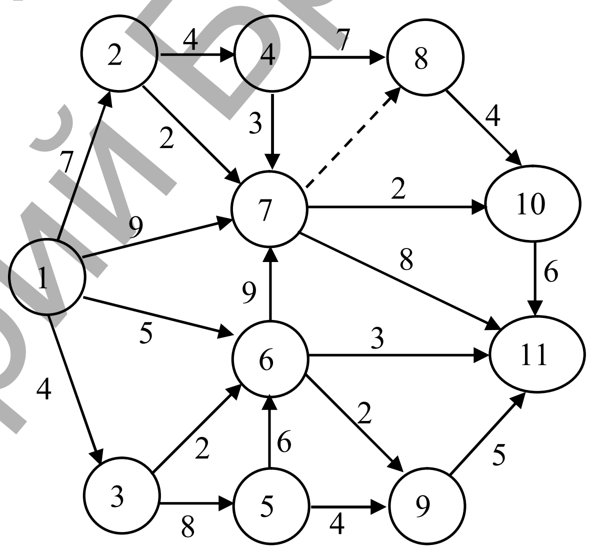
Вариант 22.



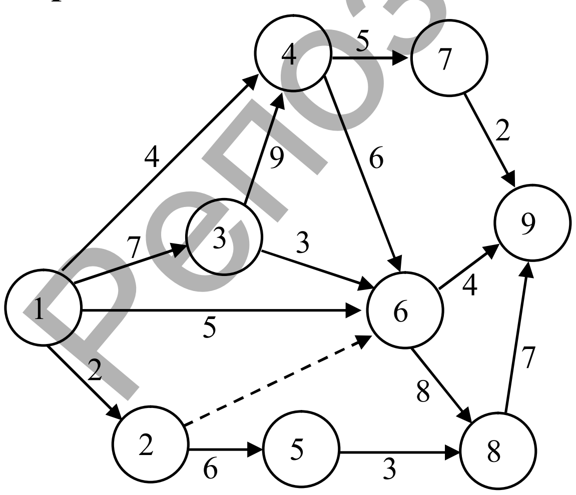
Вариант 23.



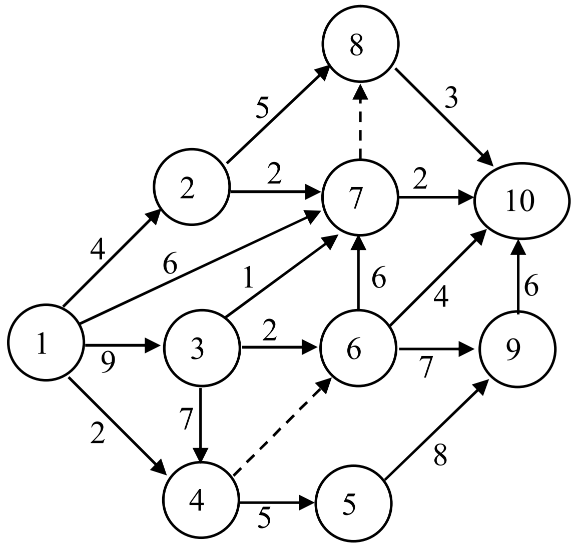
Вариант 24.



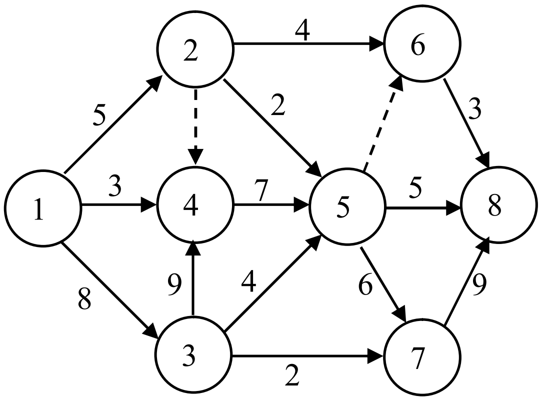
Вариант 25.



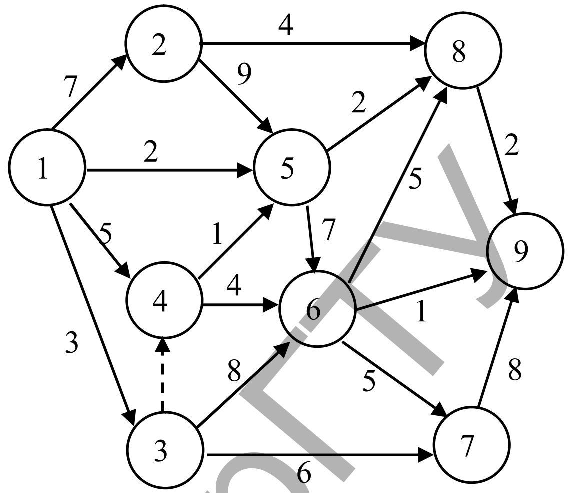
Вариант 26.



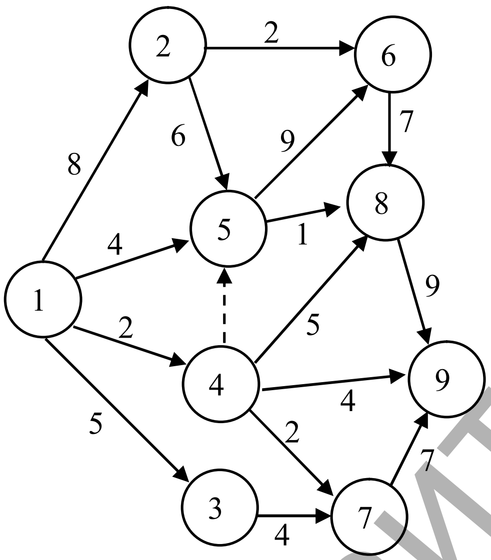
Вариант 27.



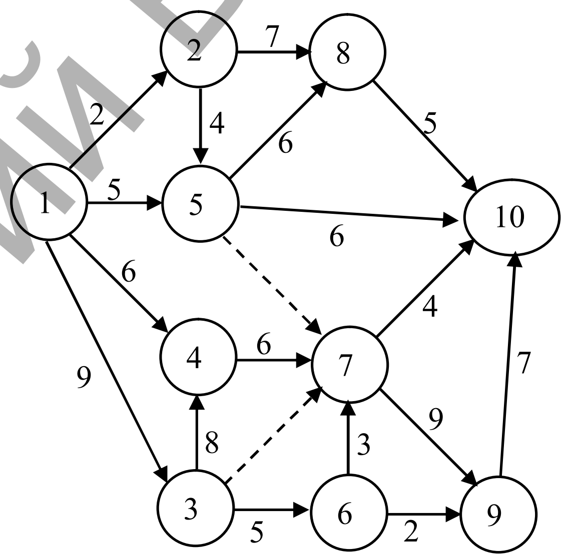
Вариант 28.



Вариант 29.



Вариант 30.



РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

Задание 1. Найти графическим способом максимальное и минимальное значения целевой функции $\mathbb{Z}$ при заданных ограничениях на переменные.

$$\min(\max)\ \mathbb{Z} = 3x + y \tag{1}$$

$$\begin{cases} -3x + 2y \le 4, \\ 2x + 3y \ge 6, \\ 4x - y \le 16, \\ x + 3y \le 17, \end{cases} \tag{2}$$

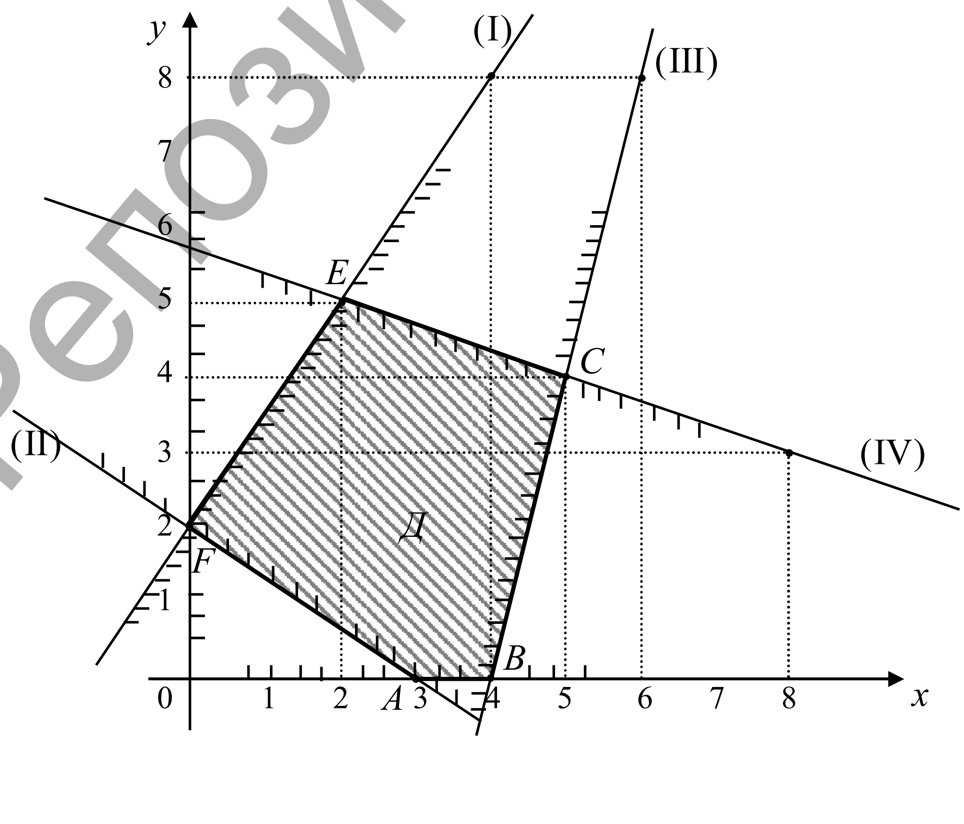
$$x \ge 0,\ y \ge 0. \tag{3}$$

Данный метод основывается на возможности графически изобразить область допустимых решений задачи и найти среди них оптимальное решение.

Область допустимых решений задачи строится как пересечение областей решений каждого из заданных ограничений (2) и (3).

В прямоугольной системе координат строим прямую $-3x + 2y = 4$. Она разбивает координатную плоскость на две полуплоскости. Берем некоторую точку, не лежащую на прямой, например, $O(0;0)$. Подставляем ее координаты в неравенство $-3x + 2y < 4$, получаем неравенство $-3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 < 4$, $0 < 4$ (да), т.е. точка $O(0;0)$ лежит в полуплоскости решений, отмечаем данную полуплоскость.

Таким образом поступим с каждым неравенством из системы (2)



$(\mathrm{I}): -3x + 2y = 4$

x	0	4
y	2	8

$O(0;0)$ $0 < 4$ (да)

$(\mathrm{II}): 2x + 3y = 6$

x	0	3
y	2	0

$O(0;0)$ $0 > 6$ (нет)

$(\mathrm{III}): 4x - y = 16$

x	5	6
y	4	8

$M(2;4)$ $8 - 4 < 16$ (да)

$(\mathrm{IV}): x + 3y = 17$

x	8	2
y	3	5

$O(0;0)$ $0 < 17$ (да)

Находим общую часть полуплоскостей решений с учетом условий не отрицательности (3). Областью допустимых решений данной задачи линейного программирования (ЗЛП) является выпуклый пятиугольник с вершинами $A(3;0)$, $B(4;0)$, $C(5;4)$, $E(2;5)$ и $F(0;2)$.

Координаты вершин определяем как точки пересечения соответствующих прямых. Например, точка $C(5;4)$ является точкой пересечения прямых $4x - y = 16$ и $x + 3y = 17$.

$$\begin{cases} x + 3y = 17, \\ 4x - y = 16, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 - 3y, \\ 4(17 - 3y) - y = 16, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 - 3y, \\ -13y = -52, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ y = 4. \end{cases} \Leftrightarrow C(5;4).$$

Замечание. Если область допустимых решений является пустым множеством, то ЗЛП не имеет решения в виду несовместности системы ограничений.

Для нахождения оптимального решения среди допустимых решений используют линии уровня, опорные прямые и градиент целевой функции *Z*.

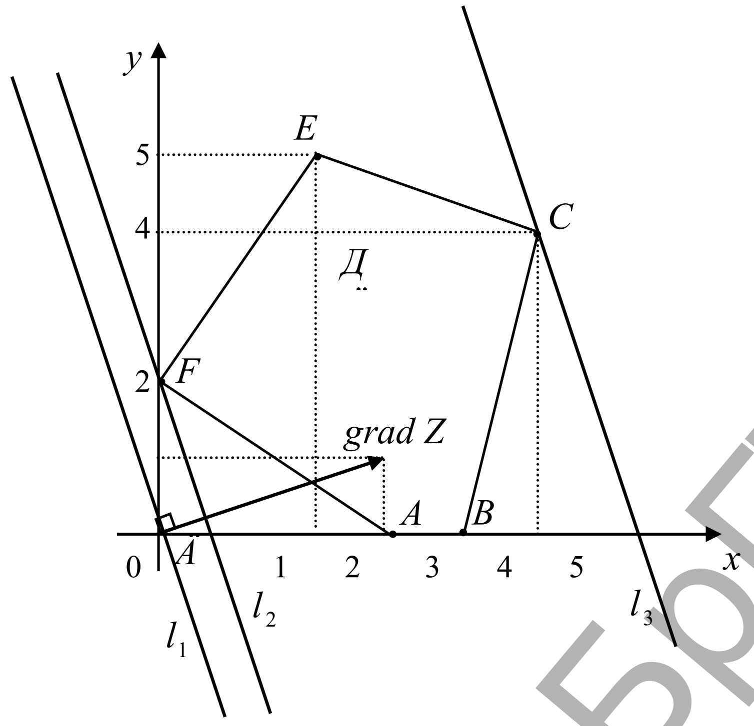
Линией уровня называется прямая, на которой целевая функция ЗЛП имеет постоянное значение. Уравнение линии уровня в общем случае имеет вид $c_1 x + c_2 y = c_0$, где $c_0 = const$. Все линии уровня параллельны между собой.

Опорной прямой называется линия уровня, которая имеет хотя бы одну общую точку с областью *Д* допустимых решений и по отношению к которой область *Д* находится в одной из полуплоскостей. Область *Д* имеет не более двух опорных прямых.

Направление возрастания (убывания) целевой функции *Z* определяем с помощью вектора $grad\ Z = \left(Z'_x; Z'_y\right)$. Вектор $grad\ Z$ показывает направление наискорейшего возрастания целевой функции (1). Вектор - $grad\ Z$ указывает направление наискорейшего убывания функции *Z*.

Итак, строим линию уровня, проходящую через начало координат $l_1 : 3x + y = 0$, находим $grad\ Z = (3;1)$. Перемещаем линию $Z = 0$ в направлении $grad\ Z$, строим 2 опорные прямые l_2 и l_3.

Значения целевой функции *Z* в направлении $grad\ Z$ возрастают и $Z(C) = \max$, а в направлении $(-grad\ Z)$ убывают и $Z(F) = \min$.



$\min Z = Z(0;2) = 3\cdot 0 + 1\cdot 2 = 2$; $\max Z = Z(5;4) = 3\cdot 5 + 1\cdot 4 = 19$;
$Z(A) = 3\cdot 3 + 1\cdot 0 = 9$; $Z(E) = 3\cdot 2 + 1\cdot 5 = 11$; $Z(B) = 12$.

В данном случае ЗЛП имеет единственный оптимальный план, как для $\max\ Z$ и для $\min\ Z$.

Если опорная прямая совпадет со стороной многоугольника ограничений, то оптимальных планов может быть бесконечное множество.

Задание 2. Найти симплексным методом оптимальное решение ЗЛП.

Симплексный метод является общим методом решения задач ЛП. Он основан на следующем:

1. область *Д* допустимых решений ЗЛП является выпуклым множеством с конечным числом угловых точек;
2. оптимальным решением ЗЛП является одна из угловых точек области *Д*;
3. за конечное число шагов расчета находится оптимальное решение или устанавливается его отсутствие.

Задача ЛП должна быть записана в канонической форме: в системе ограничений – уравнения, правые части которых неотрицательны.

а) Решить симплексным методом задачу ЛП:

$$\max\ Z = -3x_1 + 5x_2;$$

$$\left\{\begin{array}{l|l} -8x_1 + 6x_2 \le 15, & +\ x_3 \\ 8x_1 + 10x_2 \le 57, & +\ x_4 \\ 2x_1 - 10x_2 \le 8, & +\ x_5 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. & \end{array}\right.$$

Приводим задачу к каноническому виду. Для этого в левую часть ограничений – неравенств типа "$\le$" вводим дополнительные переменные x_3, x_4 и x_5 с коэффициентом (+1). В целевую функцию эти переменные входят с нулевым коэффициентом. Получаем задачу ЛП в виде

$$\max \mathbb{Z} = -3x_1 + 5x_2 + 0 \cdot x_3 + 0x_4 + 0 \cdot x_5, \tag{1}$$

$$\begin{cases} -8x_1 + 6x_2 + x_3 = 15, \\ 8x_1 + 10x_2 + x_4 = 57, \\ 2x_1 - 10x_2 + x_5 = 8, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Выпишем коэффициенты системы (2) в виде расширенной матрицы

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -8 & 6 & 1 & 0 & 0 & 15 \\ 8 & 10 & 0 & 1 & 0 & 57 \\ 2 & -10 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right).$$

Обозначаем соответственно столбцы матрицы через A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_0. В системе (2) выбираем три переменные, определитель из коэффициентов при которых, равен 1. Это x_3, x_4, x_5, их называют базисными переменными, а переменные x_1 и x_2 - свободными. Начальное опорное решение получим, полагая $x_1 = x_2 = 0$, а остальные переменные определяем из системы (2): $x_3 = 15$, $x_4 = 57$, $x_5 = 8$. $X_0 = (0;0;15;57;8)$, $Z(X_0) = 0$.

X_0 – неоптимальное решение (не оптимальный план), т.к. из (1) видно, что с увеличением переменной x_2 функция Z будет увеличиваться.

Значит, надо выбрать другое допустимое решение. Дальнейшие рассуждения будем вести с использованием симплексных таблиц.

Табл. 1.

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Симплексные отношения
			$c_1 = -3$	$c_2 = 5$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$	
x_3	0	15	-8	$\boxed{6}$	1	0	0	$2{,}5 \leftarrow$
x_4	0	57	8	10	0	1	0	5,7
x_5	0	8	2	-10	0	0	1	–
Индексные оценки, Δ_j		$\Delta_0 = 0$	$\Delta_1 = 3$	$\Delta_2 = -5$ $\uparrow$	$\Delta_3 = 0$	$\Delta_4 = 0$	$\Delta_5 = 0$	

Столбец БП базисных переменных, $C_Б$ - коэффициенты при базисных переменных в целевой функции (1), A_0 - столбец свободных членов в системе (2), далее в таблице записаны по столбцам коэффициенты при переменных x_j, т.е. A_j, $j = \overline{1,5}$.

Заполняем строку индексных оценок:

$\Delta_0 = \boldsymbol{C_Б} \cdot \boldsymbol{A}_0 = 0 \cdot 15 + 0 \cdot 57 + 0 \cdot 8 = 0 = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{X}_0)$,

$\Delta_1 = \boldsymbol{C_Б} \cdot \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{c}_1 = 0 \cdot (-8) + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 2 - (-3) = 3$,

$\Delta_2 = \boldsymbol{C_Б} \cdot \boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{c}_2 = 0 \cdot 6 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot (-10) - 5 = -5$,

$\Delta_3 = \boldsymbol{C_Б} \cdot \boldsymbol{A}_3 - \boldsymbol{c}_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0$,

$\Delta_4 = \boldsymbol{C_Б} \cdot \boldsymbol{A}_4 - \boldsymbol{c}_4 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 = 0$,

$\Delta_5 = \boldsymbol{C_Б} \cdot \boldsymbol{A}_5 - \boldsymbol{c}_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0$.

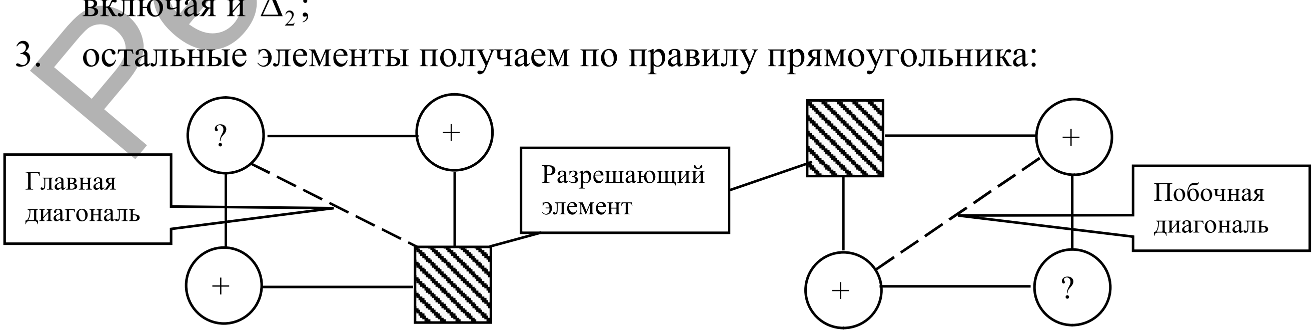
В случае $\max Z$ все Δ_j $(j = \overline{1,5})$ должны быть не отрицательны, $\Delta_j \geq 0$. Т.к. $\Delta_2 = -5$, то $X_0 = (0;0;15;57;8)$ - не оптимальный план. Значит, x_2 войдет в новый базис. Определим с помощью симплексных отношений, какую переменную в прежнем базисе заменит x_2. Разрешающим является второй столбец.

Делим соответственно элементы A_0 на положительные коэффициенты A_2 и выбираем наименьшее число $\theta = \min\left(\frac{15}{6}; \frac{57}{10}; -\right) = \min(2,5;\ 5,7) = 2,5$.

Это число соответствует первой строке, она будет разрешающей. Значит, 6 – разрешающий элемент, переменная x_2 заменит переменную x_3. Базисными переменными становятся x_2, x_4 и x_5 а свободными - x_1 и x_3.

Составляем новую симплексную таблицу (табл. 2) по правилу:

1. элементы разрешающей строки делим на разрешающий элемент; т.е элементы первой строки делим на 6 и записываем первой строкой новой таблицы;
2. все остальные элементы разрешающего (второго) столбца равны 0, включая и Δ_2;
3. остальные элементы получаем по правилу прямоугольника:



Элемент **?** = (*произведению элементов по главной диагонали минус произведение элементов по побочной диагонали*), *деленному на разрешающий элемент*.

Табл. 2.

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Симплексные отношения
			$c_1=-3$	$c_2=5$	$c_3=0$	$c_4=0$	$c_5=0$	
x_2	5	$5/2$	$-4/3$	1	$1/6$	0	0	–
x_4	0	32	$\boxed{64/3}$	0	$-5/3$	1	0	$3/2$ ←
x_5	0	33	$-34/3$	0	$5/3$	0	1	–
Индексные оценки		$\Delta_0=\frac{25}{2}$	$\Delta_1=-\frac{11}{3}$ ↑	$\Delta_2=0$	$\Delta_3=5/6$	$\Delta_4=0$	$\Delta_5=0$	

Отметим, что индексные оценки базисных переменных равны 0 и элементы столбцов $A_4(0;\,1;\,0)$ и $A_5(0;\,0;\,1)$ остаются прежними. Остальные элементы считаем по правилу прямоугольника.

Столбец A_0: второй элемент $=\frac{1}{6}\left(57\cdot6-15\cdot10\right)=57-5\cdot5=57-25=32$;

третий элемент $=\frac{1}{6}\left(8\cdot6+15\cdot10\right)=8+25=33$;

$\Delta_0=\frac{1}{6}\left(0\cdot6+15\cdot5\right)=\frac{25}{2}$.

Столбец A_1: второй элемент $=\frac{1}{6}(8\cdot6+80)=\frac{64}{3}$;

третий элемент $=\frac{1}{6}(2\cdot6-80)=-\frac{34}{3}$

и т. д.

Новый опорный план $X_1=\left(0;\,\frac{5}{2};\,0;\,32;\,33\right)$, (свободные переменные $x_1=0$ и $x_3=0$, а базисные x_2, x_4 и x_5 равны соответственно элементам столбца A_0), $Z(X_1)=\Delta_0=\frac{25}{2}=12,5$.

Так как $\Delta_1=-\frac{11}{3}<0$, то план X_1 - не оптимальный, составляем симплексные отношения (Табл.2): $\theta=\min\left(-;\,\left(32:\frac{64}{3}\right);\,-\right)=\frac{3}{2}\;\Rightarrow$ вторая строка разрешающая, $64/3$ - разрешающий элемент, x_1 войдет в новый базис, заменив x_4. Переходим к таблице 3.

Табл. 3.

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
			$c_1=-3$	$c_2=5$	$c_3=0$	$c_4=0$	$c_5=0$	
x_2	5	$\frac{9}{2}$	0	1	$\frac{1}{16}$	$1/16$	0	
x_1	-3	$3/2$	1	0	$-5/64$	$3/64$	0	
x_5	0	10	0	0	$\frac{25}{32}$	$17/32$	1	
Δ_j		$\Delta_0=18$	$\Delta_1=0$	$\Delta_2=0$	$\Delta_3=\frac{35}{64}$	$\Delta_4=\frac{11}{64}$	$\Delta_5=0$	$\Delta_j\geq 0$

Все $\Delta_j \geq 0$, значит, $X_2=\left(3/2;\, 9/2;\, 0;\, 0;\, 10\right)=X^*$ - оптимальный план, $Z\left(X^*\right)=Z\left(X_2\right)=\max=18.$

Ответ на исходную задачу: $\max Z=18$ при $x_1=1{,}5$ и $x_2=4{,}5$.

б) В случае решения задачи на $\min Z$ все рассуждения надо повторить, при этом индексные оценки должны быть неположительны, $\Delta_j \leq 0$.

$$\min Z=-3x_1+5x_2+0x_3+0x_4+0x_5,$$

$$\begin{cases}-8x_1+6x_2+x_3=15,\\ 8x_1+10x_2+x_4=57,\\ 2x_1-10x_2+x_5=8,\end{cases}$$

$$x_j\geq 0, \quad j=\overline{1,5}.$$

Табл. 4.

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Симплексные отношения
			$c_1=-3$	$c_2=5$	$c_3=0$	$c_4=0$	$c_5=0$	
x_3	0	15	-8	6	1	0	0	–
x_4	0	57	8	10	0	1	0	$\theta_2=7{,}125$
x_5	0	8	$\boxed{2}$	-10	0	0	1	$\theta_3=4$
Δ_j		$\Delta_0=0$	$\Delta_1=3$	$\Delta_2=-5$	$\Delta_3=0$	$\Delta_4=0$	$\Delta_5=0$	

Аналогичным образом заполнили симплексную таблицу, начальный опорный план $X_0=(0;0;15;57;8)$, $Z(X_0)=0=\Delta_0$. В строке индексных оценок есть положительная, $\Delta_1 = 3$. Значит, X_0 - не оптимальный план. В новый базис войдет переменная x_1. Составляем симплексные отношения: θ_1 составить нельзя, $\theta_2 = \dfrac{57}{8}$ и $\theta_3 = \dfrac{8}{2} = 4$. Тогда $\theta = \min(-;\ 7{,}125;\ 4) = 4$. Число 4 соответствует третьей строке, x_1 заменит x_5 в старом базисе, число 2 – разрешающий элемент. Базисными переменными будут x_3, x_4 и x_1, а свободными - x_2 и x_5.

Табл.5.

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
			$c_1 = -3$	$c_2 = 5$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$	
x_3	0	47	0	-34	1	0	4	–
x_4	0	25	0	50	0	1	- 4	$\theta_2 = 0{,}5$
x_1	-3	4	1	-5	0	0	0,5	–
Δ_j		$\Delta_0 = -12$	$\Delta_1 = 0$	$\Delta_2 = 10$	$\Delta_3 = 0$	$\Delta_4 = 0$	$\Delta_5 = -1{,}5$	

Заполняем таблицу 5 по сформулированному ранее правилу:

1. элементы третьей строки таблицы 4 делим на 2 и записываем в третью строку таблицы 5;
2. все остальные элементы столбца A_1 равны 0;
3. остальные элементы считаем по правилу прямоугольника.

Столбец A_0: первый элемент $= \dfrac{15 \cdot 2 - 8 \cdot (-8)}{2} = 15 + 32 = 47$;

второй элемент $= \dfrac{57 \cdot 2 - 8 \cdot 8}{2} = 57 - 32 = 25$;

$$\Delta_0 = \frac{0 \cdot 2 - 8 \cdot 3}{2} = -12.$$

Аналогично заполняем остальные столбцы (Табл.5). Опорный план этой итерации $X_1 = (4;0;47;25;0)$, $Z(X_1) = \Delta_0 = -12$, т.к. $\Delta_2 = 10 > 0$, то план X_1 не оптимальный. В новый базис войдет переменная x_2, она заменит переменную x_4, разрешающий элемент равен 50.

Табл. 6.

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			$c_1 = -3$	$c_2 = 5$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$
x_3	0	64	0	0	1	0,68	1,28
x_2	5	0,5	0	1	0	0,02	0,08
x_1	-3	6,5	1	0	0	0,1	0,1
Δ_j		$\Delta_0 = -17$	$\Delta_1 = 0$	$\Delta_2 = 0$	$\Delta_3 = 0$	$\Delta_4 = -0{,}2$	$\Delta_5 = -0{,}7$

Напоминаем, что индексные оценки базисных переменных равны нулю. Все индексные оценки в таблице 6 неположительны, $\Delta_j \le 0 \left(j = \overline{1,5} \right)$. Следовательно, опорный план второй итерации $X_2 = (6,5;\ 0,5;\ 64;\ 0;\ 0)$ является оптимальным и $Z(X_2) = -17 = \min$.

Легко проверить, что $Z = -3x_1 + 5x_2$ при $x_1 = 6,5$ и $x_2 = 0,5$ принимает значение, равное (–17).

Данные значения удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{cases} -8 \cdot 6,5 + 6 \cdot 0,5 = -52 + 3 = -49 < 15, \\ 8 \cdot 6,5 + 10 \cdot 0,5 = 52 + 5 = 57, \\ 2 \cdot 6,5 - 10 \cdot 0,5 = 13 - 5 = 8, \\ 6,5 > 0;\ 0,5 > 0. \end{cases}$$

Задание 3. (***Транспортная задача***) Известны запасы продукции поставщиков A_1, A_2 и A_3: $a_1 = 23$, $a_2 = 37$, $a_3 = 40$ (усл.ед.); потребности в продукции в трех пунктах назначения B_1, B_2 и B_3: $b_1 = 30$, $b_2 = 50$, $b_3 = 20$ (усл.ед.), а также матрица $\left\| C_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} = C$. $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$.

Условие задачи запишем в распределительную таблицу.

Табл. 7

Поставщики	Потребители			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	3 x_{11}	4 x_{12}	3 x_{13}	23
A_2	1 x_{21}	3 x_{22}	5 x_{23}	37
A_3	2 x_{31}	6 x_{32}	2 x_{33}	40
Потребность в продукции	30	50	20	100

Матрица *C* называется матрицей транспортных расходов (издержек) или матрицей тарифов. Матрица *X* называется матрицей перевозок. Ее надо найти при условии минимума суммарной стоимости транспортных расходов.

Данная задача является задачей закрытого типа:

запасы 23+37+40=100 (ед) равны **потребностям** 30+50+20=100 (ед).

Строим так называемый начальный опорный план X по методу «северо – западного угла».

В клетку *(1,1)* заносим $x_{11} = \min(23;30) = 23$. Запасы поставщика A_1 исчерпаны. Потребителю B_1 нужны еще 7 ед. продукции, он их получит от поставщика A_2: $x_{21} = 7$. Остаток ресурсов от поставщика A_2, неиспользованный потребителем B_1, отправляем потребителю B_2. В клетке *(2;2)* $x_{22} = 30$. Потребности B_2 не удовлетворены полностью, 20 ед. продукции поставит третий A_3: $x_{32} = 20$. Таким образом, исчерпаны запасы у A_1 и A_2 и удовлетворены запросы B_1 и B_2. Потребителю B_3 надо еще 20 ед. продукции, которые остались у поставщика A_3: $x_{33} = 20$.

Первый план перевозок

Табл.8

X_1	$B_1 - 30$	$B_2 - 50$	$B_3 - 20$
$A_1 - 23$	3 23	4	3
$A_2 - 37$	1 7	3 30	5
$A_3 - 40$	2	6 20	2 20

При составлении плана перевозок надо проверять условие невырожденности транспортной задачи: число заполненных клеток должно быть равно $m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$.

Заполненные клетки определяют базисные переменные опорного решения, а пустым клеткам соответствуют свободные переменные.

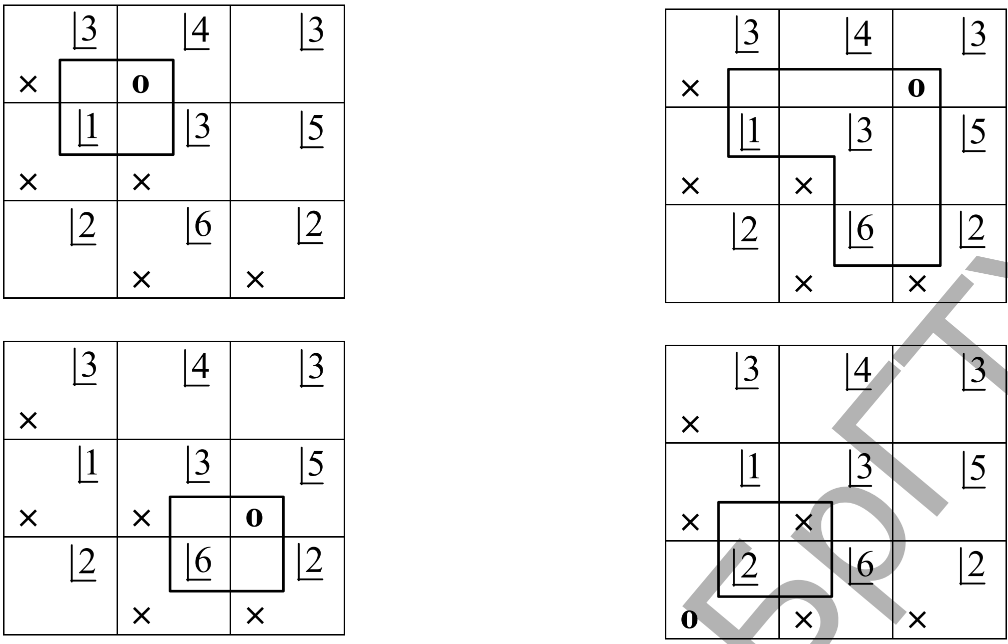
Подсчитаем общую стоимость перевозки:

$$Z(X_1) = 3 \cdot 23 + 1 \cdot 7 + 3 \cdot 30 + 6 \cdot 20 + 2 \cdot 20 = 69 + 7 + 90 + 120 + 40 = 326 \text{ (ден.ед.)}$$

Полученный начальный опорный план проверяем на оптимальность. Для каждой пустой клетки строим цепь, т.е. замкнутую ломаную, у которой все ее звенья – вертикальные или горизонтальные отрезки, а вершины цепи лежат в заполненных клетках, кроме одной, принадлежащей пустой клетке.

Пустые клетки (1,2), (1,3), (2,3), (3,1).

Построим соответствующие цепи. Будем обозначать через **о** пустую клетку, × – заполненную.



Считаем характеристику γ_{ij} каждой пустой клетки, она равна алгебраической сумме стоимостей клеток, в которых находятся вершины цепи. Обход цепи начинаем с пустой клетки, ее стоимость берем со знаком (+), затем знаки чередуются.

$\gamma_{12} = 4 - 3 + 1 - 3 = -1$; $\gamma_{13} = 3 - 2 + 6 - 3 + 1 - 3 = 2$;

$\gamma_{23} = 5 - 2 + 6 - 3 = 6$; $\gamma_{31} = 2 - 1 + 3 - 6 = -2$.

Характеристика пустой клетки показывает, как изменится суммарная стоимость перевозки, если по цепи этой клетки передвинуть поставку в единицу продукции.

Если $\gamma_{ij} > 0$, то стоимость перевозки возрастет, при $\gamma_{ij} = 0$ стоимость не изменится, а при $\gamma_{ij} < 0$ - уменьшится.

Так как $\gamma_{12} < 0$ и $\gamma_{31} < 0$, то план X_1 – не оптимальный, его можно улучшить, произведя сдвиг в цепи клетки *(3,1)* на величину Δ, равную минимальной из поставок в клетках с отрицательной стоимостью:

$$\Delta = \min(20; 7) = 7.$$

−	|1 7	|3 30	+
+	|2	|6 20	−

|1	|3 37
|2 7	|6 13

Эту величину $\Delta = 7$ прибавим к поставкам в клетках с «положительной» стоимостью:

$$x_{31} + \Delta = 0 + 7 = 7, \qquad x_{22} + \Delta = 30 + 7 = 37$$

и вычтем из поставок в клетках с «отрицательной» стоимостью:

$$x_{21} - \Delta = 7 - 7 = 0, \qquad x_{32} - \Delta = 20 - 7 = 13.$$

Получаем второй план X_2:

Табл.9

X_2	$B_1 - 30$	$B_2 - 50$	$B_3 - 20$
$A_1 - 23$	3 23	4	3
$A_2 - 37$	1	3 37	5
$A_3 - 40$	2 7	6 13	2 20

$$m + n - 1 = 5.$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 23 & 0 & 0 \\ 0 & 37 & 0 \\ 7 & 13 & 20 \end{pmatrix};$$

$$Z(X_2) = 3 \cdot 23 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 37 + 6 \cdot 13 + 2 \cdot 20 = 69 + 14 + 111 + 78 + 40 = 312 \text{ (ден. ед)}$$

$$Z(X_1) - Z(X_2) = 326 - 312 = 14 = |\gamma_{31}| \cdot \Delta = 2 \cdot 7 = 14 \text{ (ден. ед.)}$$

Проверяем опорный план X_2 на оптимальность. Для облегчения расчета характеристик γ_{ij} пустых клеток вводят потенциалы строк u_i и потенциалы столбцов v_j.

Эти числа определяются из условий

$$u_i + v_j = c_{ij}, \tag{3}$$

где c_{ij} - стоимость (цена) заполненных клеток, причем $u_1 = 0$.

Характеристики пустых клеток находим по формулам:

$$\gamma_{ij} = c_{ij} - \left(u_i + v_j\right). \tag{4}$$

Составим систему (3) для заполненных клеток:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 3, \\ u_2 + v_2 = 3, \\ u_3 + v_1 = 2, \\ u_3 + v_2 = 6, \\ u_3 + v_3 = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0,\ v_1 = 3; \\ u_2 = 3 - v_2 = 3 - 7 = -4; \\ u_3 = 2 - v_1 = 2 - 3 = -1; \\ v_2 = 6 - u_3 = 6 + 1 = 7; \\ v_3 = 2 - u_3 = 2 + 1 = 3. \end{cases}$$

Второй план перевозок:

Табл.10.

X_2	B_1-30	B_2-50	B_3-20	Потенциалы строк, u_i
A_1-23	$\lfloor 3$ 23	$\lfloor 4$	$\lfloor 3$	$u_1=0$
A_2-37	$\lfloor 1$	$\lfloor 3$ 37	$\lfloor 5$	$u_2=-4$
A_3-40	$\lfloor 2$ 7	$\lfloor 6$ 13	$\lfloor 2$ 20	$u_3=-1$
Потенциалы столбцов, v_j	$v_1=3$	$v_2=7$	$v_3=3$	

Находим характеристики пустых клеток по формулам (4):

$\gamma_{12}=4-(7+0)=-3$; $\gamma_{13}=3-(3+0)=0$;

$\gamma_{21}=1-(3-4)=2$; $\gamma_{23}=5-(3-4)=6$.

План X_2 не оптимален, т.к. $\gamma_{12}=-3$. Строим для клетки *(1,2)* цепь, находим $\Delta=\min(23;13)=13$.

Производим перемещение по цепи

$x_{11}-\Delta=23-13=10$; $x_{12}+\Delta=0+13=13$;

$x_{31}+\Delta=0+13=13$; $x_{32}-\Delta=13-13=0$.

Третий план перевозок:

Табл.11.

X_3	B_1-30	B_2-50	B_3-20	Потенциалы строк, u_i
A_1-23	$\lfloor 3$ 10	$\lfloor 4$ 13	$\lfloor 3$	$u_1=0$
A_2-37	$\lfloor 1$	$\lfloor 3$ 37	$\lfloor 5$	$u_2=-1$
A_3-40	$\lfloor 2$ 20	$\lfloor 6$	$\lfloor 2$ 20	$u_3=-1$
Потенциалы столбцов, v_j	$v_1=3$	$v_2=4$	$v_3=3$	

$$X_3=\begin{pmatrix}10 & 13 & 0\\ 0 & 37 & 0\\ 20 & 0 & 20\end{pmatrix},$$

$$Z(X_3) = 30 + 40 + 52 + 111 + 40 = 273 \text{ (ден. ед)}$$

$$Z(X_2) - Z(X_3) = 312 - 273 = 39 = |\gamma_{12}| \cdot \Delta = 3 \cdot 13 = 39 \text{ (ден. ед).}$$

Проверяем X_3 на оптимальность. Находим потенциалы u_i и v_j.

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 3, \\ u_1 + v_2 = 4, \\ v_2 + u_2 = 3, \\ v_1 + u_3 = 2, \\ v_3 + u_3 = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0,\ v_1 = 3, \\ v_2 = 4, \\ u_2 = 3 - v_2 = 3 - 4 = -1, \\ u_3 = 2 - v_1 = 2 - 3 = -1, \\ v_3 = 2 - u_3 = 2 + 1 = 3. \end{cases}$$

Находим характеристики пустых клеток:

$\gamma_{13} = 3 - (3 + 0) = 0$; $\gamma_{23} = 5 - (3 - 1) = 3$;
$\gamma_{21} = 1 - (3 - 1) = -1$; $\gamma_{32} = 6 - (4 - 1) = 3$.

X_3 - не оптимальный, $\gamma_{21} < 0$. Строим цепь клетки *(2,1)*, находим, $\Delta = \min(10; 37) = 10$. Переходим к X_4

Четвертый план перевозок:

Табл.12.

X_4	$B_1 - 30$	$B_2 - 50$	$B_3 - 20$	Потенциалы строк, u_i
$A_1 - 23$	3	4 23	3	$u_1 = 0$
$A_2 - 37$	1 10	3 27	5	$u_2 = -1$
$A_3 - 40$	2 20	6	2 20	$u_3 = 0$
Потенциалы столбцов, v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 4$	$v_3 = 0$	

$$X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 23 & 0 \\ 10 & 27 & 0 \\ 20 & 0 & 20 \end{pmatrix},$$

$$Z(X_4) = 10 + 40 + 92 + 81 + 40 = 263 \text{ (ден. ед),}$$

$$Z(X_3) - Z(X_4) = 273 - 263 = 10 = |\gamma_{21}| \cdot \Delta = 1 \cdot 10.$$

Находим потенциалы строк и столбцов, Считаем характеристики пустых клеток:

$\gamma_{11} = 3 - 2 = 1$; $\gamma_{23} = 5 + 1 = 6$;

$\gamma_{13} = 3 - 0 = 3$; $\gamma_{32} = 6 - 4 = 2$.

Все $\gamma_{ij} > 0$, значит, опорный план X_4 оптимальный и

$$\min Z = 263 \text{ (ден.ед.)},$$

Замечания.

1. Существуют и другие способы составления начального опорного плана, например, метод «наименьшей стоимости». Первой заполняется клетка, в которой наименьший тариф c_{ij}. Для данной задачи начальный план перевозок будет иметь вид

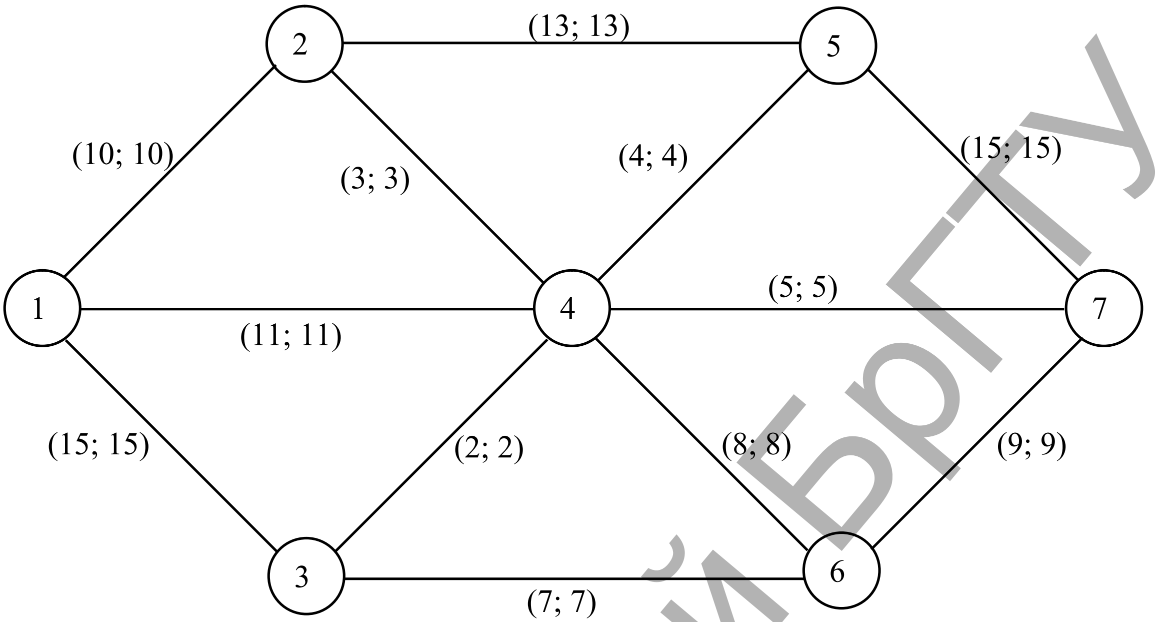
X_0	$B_1 - 30$	$B_2 - 50$	$B_3 - 20$
$A_1 - 23$	3	4 23	3
$A_2 - 37$	1 30	3 7	5
$A_3 - 40$	2	6 20	2 20

$$Z(X) = 303 \text{ (ден. ед)},$$

X_0 – не оптимальный план.

2. При составлении опорного плана может оказаться, что число заполненных клеток меньше, чем $m + n - 1$. В этом случае недостающее их число заполняется клетками с нулевыми поставками. Нулевые поставки размещают так, чтобы в каждой строке и столбце было не менее чем по одной заполняемой клетке (чтобы можно было найти потенциалы строк и столбцов).
3. О решении транспортной задачи открытого типа, о решении транспортной задачи в случае, когда существует альтернативный оптимум (несколько оптимальных планов с одной и той же суммарной стоимостью) можно познакомиться в учебниках, например [7], [8].

Задание 4. На сети, изображенной на рисунке, сформировать поток максимальной мощности, направленный из истока 1 в исток 7, при условии, что пропускные способности ребер в обоих направлениях одинаковы.



Вершина 1 – исток, вершина 7 – сток. Максимальное количество r_{ij} вещества, которое может пропустить за единицу времени ребро (i, j), называется его пропускной способностью. В данном случае, $r_{ij} = r_{ji}$, например, $r_{12} = r_{21} = 10$, $r_{47} = r_{74} = 5$ и т.д. Все $r_{ii} = 0$. Пропускные способности сети запишем матрицей R седьмого порядка.

R $i \backslash j$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	0	10	15	11	0	0	0
2	10	0	0	3	13	0	0
3	15	0	0	2	0	7	0
4	11	3	2	0	4	8	5
5	0	13	0	4	0	0	15
6	0	0	7	8	0	0	9
7	0	0	0	5	15	9	0

Количество x_{ij} вещества, проходящего через ребро (i, j) в единицу времени, называется ***потоком по ребру*** (i, j). Считают, что $x_{ij} = 0$, $x_{ji} = -x_{ij}$. Совокупность $X = \{x_{ij}\}$ потоков по всем ребрам сети называют ***потоком по сети***.

Если $x_{ij} < r_{ij}$, то ребро (i, j) ненасыщенное, если $x_{ij} = r_{ij}$, то ребро (i, j) насыщенное.

Поток по сети удовлетворяет ограничениям:

а) условие сохранения потока (в промежуточных вершинах потоки не создаются и не исчезают):

$$\sum_{j=1}^{7} x_{ij} = 0, \ (i \neq 1, \ i \neq 7)$$

б) общее количество вещества, вытекающего из истока 1, совпадает с общим количеством вещества, поступающего в сток 7, т.е.

$$f = \sum_{j=1}^{7} x_{1j} = \sum_{i=1}^{7} x_{i7}.$$

Линейную функцию f называют ***мощностью потока*** на сети.

Нам надо найти совокупность $\{x_{ij}\}$ потоков по ребрам, которая удовлетворяет всем требованиям для потоков и максимизирует функцию f.

Алгоритм построения максимального потока:

1. Сформируем начальный поток X_0. Сделаем это, например, так. По пути $L_1: 1-2-5-7$ пропустим 10 единиц (т.е. $\min(10,13,15) = 10$);

$L_2: 1-4-7$ пропустим 5 единиц ($\min(11,5) = 5$);

$L_3: 1-4-2-5-7$ $-$ 3 единицы,

$L_4: 1-3-6-7$ $-$ 7 единиц.

Потоки по ребрам

$x_{12} = 10$, $x_{25} = 10 + 3 = 13$, $x_{57} = 10 + 3 = 13$, $x_{14} = 5 + 3 = 8$, $x_{47} = 5$,
$x_{42} = 3$, $x_{13} = 7$, $x_{36} = 7$, $x_{67} = 7$.

Потоки по остальным ребрам равны нулю.

Совокупность перечисленных потоков по ребрам определяет начальный поток X_0 по сети, запишем его в виде матрицы

X^0 $i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
1	0	10	7	8				$\sum = f_0 = 25$
2	-10	0		-3	13			0
3	-7		0			7		0
4	-8	3		0			5	0
5		-13			0		13	0
6			-7			0	7	0
7				-5	-13	-7	0	–
$\sum$	–	0	0	0	0	0	$\sum = f_0 = 25$	

2. Составляем матрицу $R - X^0$, ее элементы $r_{ij} - x_{ij}$ позволяют судить о насыщенности ребер сети

$$r_{ij} - x_{ij} = \begin{cases} = 0, & \textit{ребро}\,(i, j)\ \textit{насыщено}, \\ \neq 0, & \textit{ребро}\,(i, j)\ \textit{ненасыщено}. \end{cases}$$

$R - X^0$ $i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	8	3	0	0	0
2	20	0	0	6	0	0	0
3	22	0	0	2	0	0	0
4	19	0	2	0	4	8	0
5	0	26	0	4	0	0	2
6	0	0	14	8	0	0	2
7	0	0	0	10	28	16	0

Рассмотрим возможность пройти по ненасыщенным ребрам из вершины 1 в вершину 7. Если такой путь отсутствует, то поток X^0 максимальный; если такой путь есть, то X^0 немаксимальный, его мощность можно увеличить: $L_5 : 1 - 4 - 5 - 7$.

Находим величину $\Delta = \min\limits_{(i,j)\in L_5}(r_{ij} - x_{ij}^0) = \min(3;\ 4;\ 2) = 2(ед)$, на которую нужно увеличить поток по ребрам $(1,4)$, $(4,5)$, $(5,7)$, чтобы получить более мощный поток

$x_{14}^1 = x_{14}^0 + 2 = 8 + 2 = 10$, $x_{45}^1 = x_{45}^0 + 2 = 0 + 2 = 2$, $x_{57}^1 = x_{57}^0 + 2 = 13 + 2 = 15$, $f_1 = f_0 + \Delta = 25 + 2 = 27(ед)$.

Составляем поток X^1 и проверяем его на оптимальность матрицей $R - X^1$

X^1

$i \backslash j$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	$\sum$
1	0	10	7	10	0	0	0	$f_1 = 27$
2	-10	0	0	-3	13	0	0	
3	-7	0	0	0	0	7	0	
4	-10	3	0	0	2	0	5	
5	0	-13	0	-2	0	0	15	
6	0	0	-7	0	0	0	7	
7	0	0	0	-5	-15	-7	0	
$\sum$							$f_1 = 27$	

$R - X^1$

$i \backslash j$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	0	0	8	1	0	0	0
2	20	0	0	6	0	0	0
3	22	0	0	2	0	0	0
4	21	0	2	0	2	8	0
5	0	26	0	6	0	0	0
6	0	0	14	8	0	0	2
7	0	0	0	10	30	16	0

Очевидно из матрицы $R - X^1$, что существует путь из истока 1 в 7 по ненасыщенным ребрам:

$$L_6 : 1 - 3 - 4 - 6 - 7,$$

$$\Delta = \min(8,\ 2,\ 8,\ 2) = 2,$$

X^1 – немаксимальный поток.

$$x_{13}^2 = 7 + 2,\ x_{34}^2 = 2,\ x_{46}^2 = 2,\ x_{67}^2 = 7 + 2,$$

$$f_2 = f_1 + \Delta = 27 + 2 = 29(ед).$$

X^2

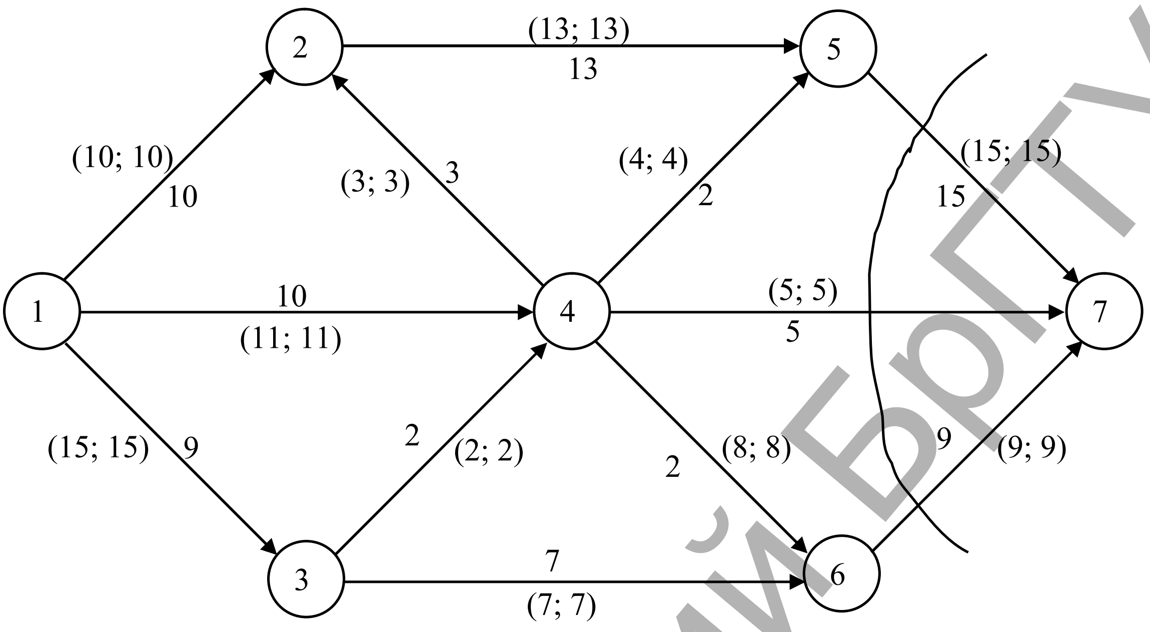
$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
1	0	10	9	10				$f_2 = 29$
2	-10	0		-3	13			
3	-9		0	2		7		
4	-10	3	-2	0		2	5	
5		-13			0		15	
6			-7	-2		0	9	
7				-5	-15	-9	0	
$\sum$							$f_2 = 29$	

$R - X^2$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	6	1	0	0	0
2	20	0	0	6	0	0	0
3	24	0	0	0	0	0	0
4	21	0	4	0	4	6	0
5		26		4	0	0	0
6			14	10	0	0	0
7	0	0	0	10	30	16	0

Из таблицы $R - X^2$ очевидно, что нет пути по ненасыщенным ребрам, ведущего из вершины 1 в вершину 7.

Значит, X^2 -максимальный поток, его мощность $f_{\max} = 29$. Наносим этот поток на сеть с указанием направления потоков по отдельным ребрам.



Можно проверить теорему Форда-Фалкерсона: максимальная величина потока из истока в сток равна минимальной пропускной способности разреза, отделяющего исток от стока. Ребра $(5,7)$, $(4,7)$ и $(6,7)$ образуют разрез

$$X(\textit{разреза}) = x_{57} + x_{47} + x_{67} = 15 + 5 + 9 = 29;$$

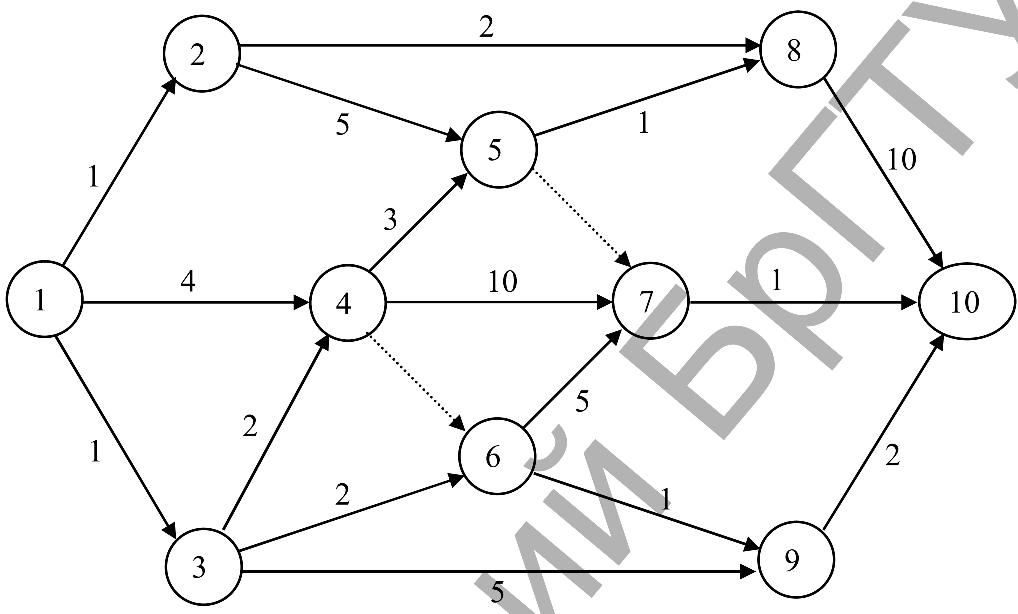
$$R(\textit{разреза}) = r_{57} + r_{47} + r_{67} = 15 + 5 + 9 = 29;$$

$$X(\textit{разреза}) = R(\textit{разреза}) = f_{\max}.$$

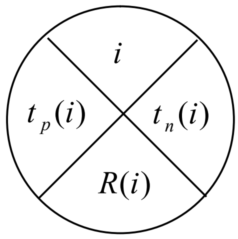
Задание 5.

По сетевому графику комплекса работ рассчитать:

1. ранние сроки свершения событий;
2. поздние сроки свершения событий;
3. резерв времени;
4. критический путь.



Каждое событие (в данном случае их 10) изобразим кружком, разделенным на 4 сектора: i - номер события, $t_p(i)$ – ранний срок свершения события, $t_n(i)$ – поздний срок свершения события i, $R(i)$ – резерв времени события i.



1. Вычислим ранние сроки свершения всех событий, перемещаемся от первого до десятого события по возрастанию номеров. *Ранний срок $t_p(i)$ свершения события i - это самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию.*

$$t_p(j) = \max_{(i,j)\in U_j^+} (t_p(i) + t(i,j)) \quad , \tag{5}$$

где U_j^+ - множество работ, входящих в j-ое событие; $t_p(i)$ - ранний срок свершения начального события работы (i,j); $t(i,j)$ - продолжительность работы (i,j)

$t_p(1) = 0$;

$t_p(2) = t_p(1) + t(1,2) = 0 + 1 = 1$;

$t_p(3) = t_p(1) + t(1,3) = 0 + 1 = 1$;

$$t_p(4) = \max(t_p(1) + t(1,4);\ t_p(3) + t(3,4)) = \max(0+4;\ 1+2) = 4;$$

$$t_p(5) = \max(t_p(2) + t(2,5);\ t_p(4) + t(4,5)) = \max(1+5;\ 4+3) = \max(6;7) = 7;$$

$$t_p(6) = \max(t_p(4) + t(4,6);\ t_p(3) + t(3,6)) = \max(4+0;\ 1+2) = \max(4;3) = 4;$$

$$t_p(7) = \max(t_p(5) + t(5,7);\ t_p(4) + t(4,7);\ t_p(6) + t(6,7)) =$$

$$= \max(7+0;\ 4+10;\ 4+5) = \max(7;\ 14;\ 9) = 14;$$

$$t_p(8) = \max(t_p(2) + t(2,8);\ t_p(5) + t(5,8)) = \max(1+2;\ 7+1) = \max(3;\ 8) = 8;$$

$$t_p(9) = \max(t_p(3) + t_p(3,9);\ t_p(6) + t(6,9)) = \max(1+5;\ 4+1) = \max(6;\ 5) = 6;$$

$$t_p(10) = \max(t_p(8) + t(8,10);\ t_p(7) + t(7,10);\ t_p(9) + t(9,10)) =$$

$$= \max(8+10;\ 14+1;\ 6+2) = \max(18;\ 15;\ 8) = 18.$$

2. Определяем поздние сроки свершения событий, расчет ведем от 10 события к первому.
Поздний срок $t_n(i)$ наступления события i - это предельный момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием

$$t_n(i) = \min_{(i,j)\in U_i^-} (t_n(j) - t(i,j)), \qquad (6)$$

где U_i^- - множество работ , начинающихся i событием, т.е. выходящих из i-ого события; $t_n(j)$ - поздний срок свершения конечного события работы (i,j). Считается, что $t_n(10) = t_p(10) = t_{крит} = 18$.

$$t_n(10) = 18;$$

$$t_n(9) = t_n(10) - t(9,10) = 18 - 2 = 16;$$

$$t_n(8) = t_n(10) - t(8,10) = 18 - 10 = 8;$$

$$t_n(7) = t_n(10) - t(7,10) = 18 - 1 = 17;$$

$$t_n(6) = \min(t_n(7) - t(6,7);\ t_n(9) - t(6,9)) = \min(17-5;\ 16-1) = \min(12;\ 15) = 12;$$

$$t_n(5) = \min(t_n(8) - t(5,8);\ t_n(7) - t(5,7)) = \min(8-1;\ 17-0) = \min(7;\ 17) = 7;$$

$$t_n(4) = \min(t_n(5) - t(4,5);\ t_n(7) - t(4,7);\ t_n(6) - t(4,6)) =$$

$$= \min(7-3;\ 17-10;\ 12-0) = \min(4;\ 7;\ 12) = 4;$$

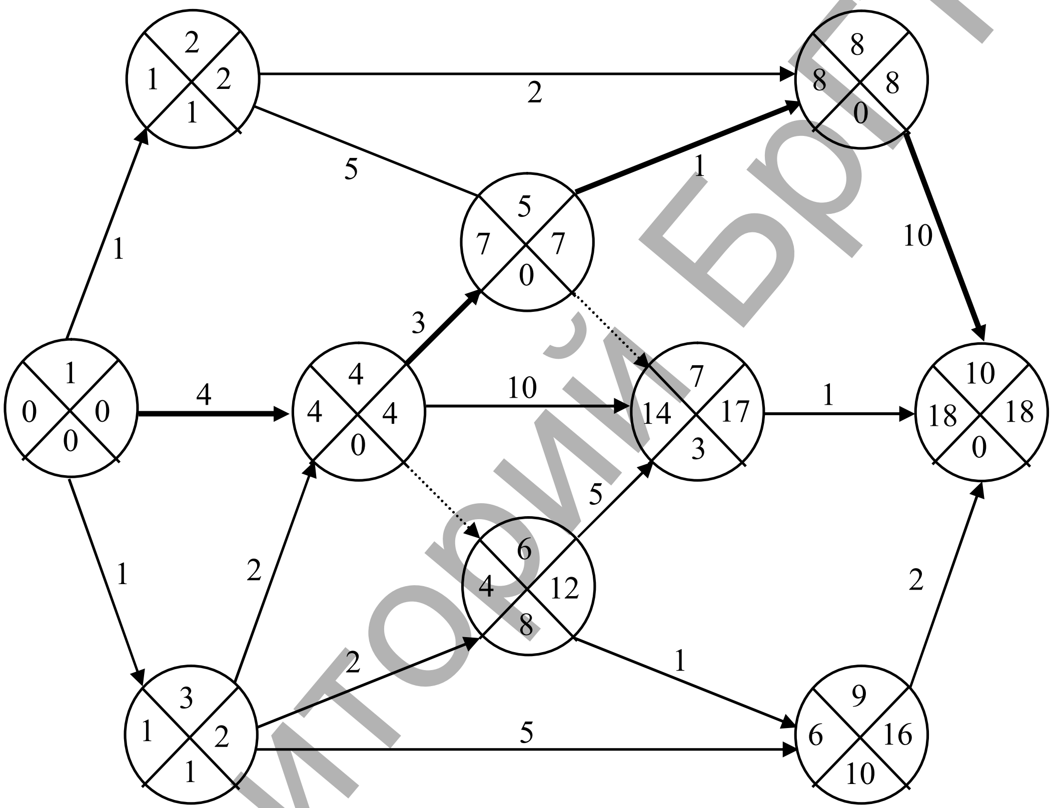
$$t_n(3) = \min(t_n(4) - t(3,4);\ t_n(6) - t(3,6);\ t_n(9) - t(3,9)) =$$

$$= \min(4-2;\ 12-2;\ 16-5) = \min(2;\ 10;\ 11) = 2\,;$$

$$t_n(2) = \min(t_n(8) - t(2,8);\ t_n(5) - t(2,5)) = \min(8-2;\ 7-5) = \min(6;\ 2) = 2\,;$$

$$t_n(1) = \min(t_n(2) - t(1,2);\ t_n(4) - t(1,4);\ t_n(3) - t(1,3)) =$$

$$= \min(2-1;\ 4-4;\ 2-1) = \min(1;\ 0;\ 1) = 0\,.$$



3. Резерв времени событий:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i)\,;$$

$R(1) = 0$;	$R(2) = 2 - 1 = 2$;	$R(3) = 1$;	$R(4) = 0$;	$R(5) = 0$;
$R(6) = 8$;	$R(7) = 3$;	$R(8) = 0$;	$R(9) = 10$;	$R(10) = 0$.

4. У критических событий резерв времени равен 0. Критический путь

$$L_{крит} : 1 - 4 - 5 - 8 - 10\,.$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика. Математическое программирование: Учебник для студентов экономических специальностей вузов. – Мн.: Выш. шк., 1994. – 286 с.

2. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. и др. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование: Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов. – Мн.: Выш. шк., 1995. – 382 с.

3. Балашевич В.А., Андронов А.М. Экономико-математическое моделирование производственных систем: Учебное пособие для студентов инженерно-экономических и экономических специальностей вузов. – Мн.: Университетское, 1995. –240с.

4. Костевич Л.С., Лапко А.А.. Теория игр. Исследование операций: Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов. – Мн., Выш. шк., 1981. – 231 с.

5. Сакович В.А. Исследование операций. – Мн.: Выш. шк., 1985. – 256 с.

6. Исследование операций в экономике. – под ред. Кремера Н.Ш. –М.: ЮНИТИ, 1997.

7. Красс И.С., Чупрынов Б.П.. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учебник. – 2-е изд., испр.– М.: «Дело», 2001. – 688 с.

8. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие. – под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2001. – 575 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Составители: ***Тузик Татьяна Александровна***
Рубанов Владимир Степанович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Методические указания и задания к контрольной работе
по курсу «Высшей математики» для студентов
экономических специальностей заочной формы обучения

Ответственный за выпуск: **В.С. Рубанов**
Редактор: **Т.В. Строкач**
Технический редактор: **А.Д. Никитчик**
Корректор: **Е.В. Никитчик**
Компьютерный набор: **И.И. Гладкий**

Подписано к печати 19.11.2003 г. Формат $60 \times 84/16$. Бумага писчая.
Усл. п. л. 1,86. Уч. изд. л. 2,0. Заказ № 865. Тираж 200 экз.

Отпечатано на ризографе
УО «Брестского государственного технического университета»
224017 , Брест, ул. Московская, 267.