МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕРАЛЫ

Методические рекомендации и варианты контрольной работы
по дисциплине “Высшая математика” для студентов
технических специальностей заочной формы обучения

Брест 2009

УДК 519.2.(076)

В настоящей методической разработке приведены вопросы программы и варианты контрольной работы № 2 по разделам «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл», «Дифференциальные уравнения», «Кратные интегралы» и «Криволинейные интегралы» дисциплины «Высшая математика», изучаемых студентами технических специальностей заочной формы обучения во втором семестре. Приведено решение типового варианта, а также даны некоторые методические рекомендации, полезные для успешного выполнения контрольной работы. В организационно-методических указаниях приведены правила оформления контрольной работы.

Составители: И.И. Гладкий, старший преподаватель,
И.В. Лизунова, доцент,
Л.Т. Мороз, доцент;
ВП. Черненко, доцент.

Рецензент: Савчук В.Ф., зав. кафедрой информатики и прикладной математики учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н., доцент.

Организационно-методические указания

В контрольную работу № 2 включены 8 заданий по разделам «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл», «Дифференциальные уравнения», «Кратные интегралы» и «Криволинейные интегралы» дисциплины «Высшая математика».

Нумерация задач состоит из двух чисел: первое число – номер задания, второе (после точки) – номер варианта.

Правила оформления контрольной работы:

1) контрольная работа выполняется в отдельной (тонкой) ученической тетради с отчерченными полями;

2) на обложке обязательно должен быть указан шифр (номер зачетной книжки);

3) контрольная работа выполняется студентом в соответствии со своим вариантом, который определяется двумя последними цифрами шифра;

4) каждое задание начинается на новой странице с обязательной записью его полного условия. Если задача имеет общую формулировку, то ее условие переписывают, заменяя общие данные конкретными, соответствующими номеру варианта;

5) решения всех заданий должены быть подробными и аккуратными, содержать достаточные пояснения, необходимые рисунки и таблицы;

6) завершает работу список используемой литературы и роспись студента;

7) после рецензии исправления в тексте работы недопустимы;

8) исправление ошибок, указанных рецензентом, выполняют в той же тетради после росписи студента.

Контрольные вопросы курса «Высшая математика»
II семестр

1. Комплексные числа.
2. Различные формы записи комплексных чисел. Геометрическое изображение комплексного числа.
3. Действия над комплексными числами. Понятие комплексной функции действительного аргумента.
4. Первообразная функции.
5. Неопределенный интеграл и его свойства.
6. Табличное интегрирование.
7. Интегрирование подстановкой.
8. Интегрирование по частям.
9. Интегрирование простейших дробей.
10. Интегрирование иррациональных выражений.
11. Интегрирование рациональных дробей.
12. Интегрирование тригонометрических выражений.

13. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции.
14. Задача о площади криволинейной трапеции.
15. Определенный интеграл, его геометрический и механический смыслы.
16. Основные свойства определенного интеграла.
17. Интегралы с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.
18. Замена переменных в определенном интеграле.
19. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
20. Несобственные интегралы первого рода. Признаки сходимости.
21. Несобственные интегралы второго рода. Признаки сходимости.
22. Площадь плоской фигуры в декартовой системе координат.
23. Площадь плоской фигуры в полярных координатах.
24. Вычисление объема тела по параллельным сечениям. Вычисление объемов тел вращения.
25. Дифференциал длины дуги. Вычисление длины дуги кривой.
26. Кривизна плоской кривой. Радиус и круг кривизны. Эволюта и эвольвента кривой.
27. Работа переменной силы.
28. Масса неоднородного стержня.
29. Статические моменты и координаты центра тяжести гладкой кривой. Моменты инерции плоской кривой.
30. Центр масс плоской пластинки.
31. Понятие дифференциального уравнения. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям первого порядка. Задача Коши.
32. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Понятие общего решения. Особое решение.
33. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
34. Однородные дифференциальные уравнения и уравнения, приводящие к ним.
35. Линейные дифференциальные уравнения.
36. Уравнение Бернулли.
37. Понятие дифференциального уравнения высшего порядка. Задача Коши.
38. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка. Задачи о второй космической скорости и изгибе стержня.
39. Однородные линейные дифференциальные уравнения.
40. Линейный дифференциальный оператор, его свойства.
41. Свойства решений однородных дифференциальных уравнений.
42. Линейная независимость функций. Определитель Вронского. Теорема о структуре общего решения однородного дифференциального уравнения.

43. Структура общего решения неоднородного дифференциального уравнения. Принцип суперпозиции решений.
44. Метод Лагранжа (метод вариации произвольных постоянных).
45. Понижение порядка неоднородных дифференциальных уравнений.
46. Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
47. Метод Эйлера.
48. Однородные линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами.
49. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка со специальной правой частью.
50. Системы дифференциальных уравнений: общие понятия, фазовая плоскость, фазовые траектории. Метод исключения.
51. Линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
52. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.
53. Определение, свойства и вычисление двойного интеграла.
54. Двойной интеграл в полярных координатах.
55. Вычисление объемов.
56. Масса тонкой пластинки.
57. Статические моменты и координаты центра тяжести пластинки. Момент инерции пластинки.
58. Задачи, приводящие к понятию тройного интеграла.
59. Определение и свойства тройного интеграла.
60. Вычисление тройного интеграла.
61. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.
62. Объем и масса тела.
63. Статические моменты и координаты центра тяжести тела. Моменты инерции тела.
64. Задача, приводящая к понятию криволинейного интеграла по дуге.
65. Определение и свойства криволинейного интеграла первого рода.
66. Вычисление криволинейного интеграла первого рода.
67. Приложения криволинейного интеграла первого рода.
68. Работа переменной силы. Линейный интеграл.
69. Определение, свойства и вычисление линейного интеграла.
70. Связь линейного интеграла с криволинейным интегралом первого рода.
71. Независимость линейного интеграла от пути интегрирования.
72. Приложения линейного интеграла. Формула Грина.

Контрольная работа №2

Задание 1. Найти неопределенные интегралы (результаты в случаях а), б) и в) проверить дифференцированием).

1.1. а) $\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}$; в) $\int x e^{2x}dx$;

г) $\int \cos^4 3x \cdot \sin^2 3x\, dx$; д) $\int \frac{3x+1}{x^2-4x-2}dx$.

1.2. а) $\int \frac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{2x}dx$; б) $\int (5x-2)\cdot \ln x dx$; в) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{1-e^x}}$;

г) $\int \sqrt[5]{\sin^4 x}\cdot \cos^3 x dx$; д) $\int \frac{x+2}{3x^2-x+5}dx$.

1.3. а) $\int \frac{3\sqrt{x}+4x^2-5}{2x^2}dx$; б) $\int \frac{(\mathrm{arctg}\, x)^2 dx}{1+x^2}$; в) $\int x^2 \ln x dx$;

г) $\int \cos^3 x \cdot \sin^8 x\, dx$; д) $\int \frac{x-5}{2x^2+x-4}dx$.

1.4. а) $\int \frac{2\sqrt{x}-x^2+3}{\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\int (3x+1)\cos x\, dx$; в) $\int \frac{(1-\mathrm{tg}\, x)dx}{\cos^2 x}$;

г) $\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x\, dx$; д) $\int \frac{2x+3}{3x^2+2x-7}dx$.

1.5. а) $\int \frac{\sqrt[4]{x}-2x+5}{x^2}dx$; б) $\int (2-x)\sin x\, dx$; в) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$;

г) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}dx$; д) $\int \frac{8-13x}{x^2+5x-1}dx$.

1.6. а) $\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int x\cdot \arcsin x\, dx$; в) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$;

г) $\int \sqrt[5]{\sin^3 2x}\cdot \cos^3 2x\, dx$; д) $\int \frac{3-5x}{4x^2+2x-3}dx$.

1.7. а) $\int \left(\sqrt[3]{x}-\frac{2\sqrt[4]{x}}{x}+3\right)dx$; б) $\int (3x+4)\cos x\, dx$; в) $\int x\sqrt{3-x^2}dx$;

г) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx$; д) $\int \frac{3x-2}{x^2+5x-1}dx$.

1.8. а) $\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{x^2}dx$; б) $\int x\sin 3x\, dx$; в) $\int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x}dx$;

г) $\int \sin^4 3x \cdot \cos^5 3x\, dx$; д) $\int \frac{dx}{4x^2-5x+4}$.

1.9. а) $\int \frac{3x^2-\sqrt[5]{x}+2}{x}dx$; б) $\int \frac{\cos 3x}{4+\sin 3x}dx$; в) $\int x\sin 2x\,dx$;

г) $\int \sin^4 2x\cdot\cos^2 2x\,dx$; д) $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+1}dx$.

1.10. а) $\int \frac{2x^3-\sqrt{x^5}+1}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int x\sin(x-5)\,dx$; в) $\int \frac{\sin x}{1-\cos x}dx$;

г) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx$; д) $\int \frac{x+1}{2x^2+3x-4}dx$.

1.11. а) $\int \frac{\sqrt[6]{x^5}-5x^2+3}{x}dx$; б) $\int x\cdot\operatorname{arctg}2x\,dx$; в) $\int \frac{x}{2x^2-7}dx$;

г) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}dx$; д) $\int \frac{x+6}{3x^2+x+1}dx$.

1.12. а) $\int\left(x\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}+1\right)dx$; б) $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^2(x+1)}}{x+1}dx$; в) $\int \arccos 2x dx$;

г) $\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\cdot\sin^3 x\,dx$; д) $\int \frac{2x-1}{3x^2-2x+6}dx$.

1.13. а) $\int\left(x^2-\frac{\sqrt[6]{x}}{x}-3\right)dx$; б) $\int \frac{\sqrt{\ln^7(x+1)}}{x+1}dx$; в) $\int \operatorname{arctg}x\,dx$;

г) $\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cdot\cos^3 dx$; д) $\int \frac{x}{2x^2+x+5}dx$.

1.14. а) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-2x^5+5}{x}dx$; б) $\int x\cdot\ln x\,dx$; в) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$;

г) $\int \sqrt[5]{\cos^3 2x}\cdot\sin^3 2x\,dx$; д) $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx$.

1.15. а) $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}+2x^3-4\right)dx$; б) $\int (x^2+2)e^{-x}dx$; в) $\int \frac{\arcsin^3 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

г) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}dx$; д) $\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}dx$.

1.16. а) $\int \frac{\sqrt{x^3}-3x^4+2}{x}dx$; б) $\int x^2\cdot\sin^2 x\,dx$; в) $\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx$;

г) $\int \sin^2 2x\cdot\cos^4 2x\,dx$; д) $\int \frac{x+4}{2x^2-6x-8}$.

1.17. а) $\int\left(2x^3-3\sqrt{x^5}+\frac{4}{x}\right)dx$; б) $\int x^2(\cos 2x+3)dx$; в) $\int x e^{7x^2+2}dx$;

г) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$; д) $\int \frac{x+4}{2x^2-7x+1}dx$.

1.18. а) $\int \frac{2x^3-\sqrt{x^5}+5}{x^2}dx$; б) $\int e^{4\sin x}\cdot\cos x\,dx$; в) $\int \frac{x^2+2}{e^x}dx$;

г) $\int \sqrt[5]{\cos^4 x}\cdot\sin^3 x\,dx$; д) $\int \frac{5x-2}{2x^2-5x+2}dx$.

1.19. а) $\int \frac{3x^2-\sqrt{x^3}+7}{x^3}dx$; б) $\int \frac{dx}{(x+5)\ln^3(x+5)}$; в) $\int \arcsin 2x\,dx$;

г) $\int \sin^4 2x\cdot\cos^3 2x\,dx$; д) $\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5}$.

1.20. а) $\int \frac{3x^4-\sqrt[3]{x^2}+1}{x^2}dx$; б) $\int (x^2-3)\cos x\,dx$; в) $\int \frac{\ln^3(x-5)}{x-5}dx$;

г) $\int \frac{\cos^3 2x}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}}dx$; д) $\int \frac{x+1}{2x^2+x+1}dx$.

1.21. а) $\int \left(\sqrt[5]{x^2}-\frac{2}{x^3}+4\right)dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(x+4)}}{x+4}dx$; в) $\int \frac{x^2+1}{e^x}dx$;

г) $\int \frac{\sin^3 2x}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}}dx$; д) $\int \frac{x+1}{3x^2-2x-3}dx$.

1.22. а) $\int \frac{\sqrt{x}-2x^3+6}{x}dx$; б) $\int (x^2-1)e^x dx$; в) $\int \frac{\ln^5(x-7)}{x-7}dx$;

г) $\int \sin^4 3x\cdot\cos^5 3x dx$; д) $\int \frac{4x+8}{4x^2+6x-13}dx$.

1.23. а) $\int \frac{\sqrt[5]{x}-2x^3+4}{x^2}dx$; б) $\int x^2\cos^2 x\,dx$; в) $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{tg}^2 3x}}{\cos^2 3x}dx$;

г) $\int \sqrt[5]{\sin^4 x}\cdot\cos^3 x\,dx$; д) $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+1}dx$.

1.24. а) $\int \left(\sqrt{x}-\frac{3x^2}{\sqrt{x}}+2\right)dx$; б) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^3 5x}}{\sin^2 5x}dx$; в) $\int \ln(x-5)dx$;

г) $\int \sin^3 x\cdot\cos^8 x\,dx$; д) $\int \frac{x}{2x^2+2x+5}dx$.

1.25. а) $\int \left(\sqrt[5]{x}-\frac{4}{x^5}+2\right)dx$; б) $\int (x^2+x)\cos x dx$; в) $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg}^4 x}}{\sin^2 x}dx$;

г) $\int \sin^4 2x\cdot\cos^5 2x\,dx$; д) $\int \frac{x-3}{x^2-5x+4}dx$.

1.26. а) $\int \frac{\sqrt[7]{x^6}-2x^2+3}{x}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}\arcsin 5x}$; в) $\int \frac{3\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$;

г) $\int (x^2+2)e^x dx$; д) $\int \frac{2x-1}{2x^2+8x-6}dx$.

1.27. а) $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}-\frac{2}{x^3}+1\right)dx$; б) $\int(x^2-1)e^{-x}\,dx$; в) $\int\frac{x^4}{e^{x^5+1}}dx$;

г) $\int\sin^5 x\cdot\sqrt[5]{\cos^3 x}\,dx$; д) $\int\frac{2-x}{4x^2+16x-12}dx$.

1.28. а) $\int\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x}+6\right)dx$; б) $\int x\cdot\sin^2 x\,dx$; в) $\int x^2\cdot e^{3x^3}dx$;

г) $\int\sin^4 x\cdot\cos^7 x\,dx$; д) $\int\frac{2x-1}{3x^2-6x-9}dx$.

1.29. а) $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}-\frac{7}{x^3}+5\right)dx$; б) $\int\arcsin 9x\,dx$; в) $\int\frac{x}{e^{2x^2+1}}dx$;

г) $\int\sin^6 3x\cdot\cos^3 3x\,dx$; д) $\int\frac{2x-1}{3+x-2x^2}dx$.

1.30. а) $\int\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x}+6\right)dx$; б) $\int x\cdot\operatorname{arctg}2x\,dx$; в) $\int xe^{4-5x^2}dx$;

г) $\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx$; д) $\int\frac{x-4}{3x^2+x-1}dx$.

Задание 2. Вычислить определенный интеграл.

2.1. $\int_0^4\frac{\sqrt{x}}{4+x}dx$. **2.11.** $\int_0^4\frac{1+x}{x+\sqrt{x}}dx$. **2.21.** $\int_{-1}^2\frac{x^3}{\sqrt{x+2}}dx$.

2.2. $\int_4^{12}\frac{\sqrt{x-3}}{x}dx$. **2.12.** $\int_2^5\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$. **2.22.** $\int_0^9\frac{\sqrt{x}}{x+10}dx$.

2.3. $\int_0^3\frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}dx$. **2.13.** $\int_4^9\frac{\sqrt{x}}{x-1}dx$. **2.23.** $\int_4^{16}\frac{dx}{\sqrt{x}\cdot(x-1)}$.

2.4. $\int_3^6\frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}}dx$. **2.14.** $\int_4^{11}\frac{dx}{3+\sqrt{x+5}}$. **2.24.** $\int_2^3\frac{dx}{1+\sqrt{x-2}}$.

2.5. $\int_{25}^{49}\frac{\sqrt{x}}{x-6}dx$. **2.15.** $\int_5^{17}\frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}$. **2.25.** $\int_6^{18}\frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$.

2.6. $\int_1^9\frac{x}{\sqrt{2x+7}}dx$. **2.16.** $\int_8^{11}\frac{dx}{x\sqrt{x-7}}$. **2.26.** $\int_3^6\frac{x^2}{\sqrt{x-2}}dx$.

2.7. $\int\limits_{-8}^{0} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}+3}\,dx$.

2.8. $\int\limits_{4}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$.

2.9. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{2+\sqrt{x-1}}$.

2.10. $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}+5}$.

2.17. $\int\limits_{2}^{5} \frac{x+1}{x\cdot\sqrt{x-1}}\,dx$.

2.18. $\int\limits_{8}^{23} \frac{x^3}{\sqrt{x-7}}\,dx$.

2.19. $\int\limits_{5}^{8} \frac{x^2}{\sqrt{x-4}}\,dx$.

2.20. $\int\limits_{-4}^{-3} \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$.

2.27. $\int\limits_{3}^{11} \frac{x-1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$.

2.28. $\int\limits_{-5}^{-2} \frac{x^3}{\sqrt{x+6}}\,dx$.

2.29. $\int\limits_{6}^{10} \frac{dx}{3+\sqrt{x-6}}$.

2.30. $\int\limits_{8}^{24} \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}$.

Задание 3. Найти общее решение дифференциального уравнения

3.01. $y' + \sin x \cdot y = (2x-1)\cdot e^{\cos x}$.

3.02. $y' + \frac{2}{x}\cdot y = 3x^2 + 4x + 2$.

3.03. $x\cdot y' + y = e^x$.

3.04. $x^2 \cdot y' - 2xy = 3$.

3.05. $x\cdot y' - y = 2x\ln x$.

3.06. $x\cdot y' + y = 3x^2$.

3.07. $y' + \mathrm{tg}\, x \cdot y = \left(6x^2+1\right)\cos x$.

3.08. $x\cdot y' - 2y = 2x^4$.

3.09. $\cos x \cdot y' - \sin x \cdot y = e^{-x}$.

3.10. $y' + \cos x \cdot y = \cos x$.

3.11. $x\cdot y' + 3y = 12(1+x)$.

3.12. $x\cdot y' - 2y = x^3\cos x$.

3.13. $x\cdot\ln x \cdot y' - y = 3x^3\ln^2 x$.

3.14. $(x+1)\cdot y' - y = e^x(x+1)^2$.

3.15. $y' - \frac{2y}{x+1} = \frac{(x+1)^2}{\cos^2 x}$.

3.16. $y' + \frac{2x}{1+x^2}\cdot y = \frac{2\sin 2x}{1+x^2}$.

3.17. $y' - \mathrm{ctg}\, x \cdot y = 2x\sin x$.

3.18. $x\cdot y' + y = -2\ln x$.

3.19. $y' + 2x\cdot y = 2xe^{-x^2}$.

3.20. $(x^2+1)\cdot y' + 4x\cdot y = 3$.

3.21. $y' - 3x^2\cdot y = 3x^2e^{x^3}$.

3.22. $(x+1)\cdot y' + y = x^3 + x^2$.

3.23. $x^2\cdot y' + x\cdot y = -1$.

3.24. $y' + 2y = e^{-x}$.

3.25. $y' - 2x\cdot y = 3x\cdot\sqrt{x}\cdot e^{x^2}$.

3.26. $\cos x\cdot y' - \sin x \cdot y = 2x$.

3.27. $y' - \mathrm{tg}\, x\cdot y = \frac{2}{\cos^3 x}$.

3.28. $y' - \frac{2}{x-2}\cdot y = 4(x-2)^3$.

3.29. $y' - \cos x\cdot y = (2x+\cos x)e^{\sin x}$.

3.30. $(x+1)^2\cdot y' + (x+1)\cdot y = 2$.

Задание 4. Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям.

4.1.	$y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 2$.
4.2.	$y'' - y = 9e^{2x}$,	$y(0) = 0$,	$y'(0) = -5$.
4.3.	$y'' - 3y' + 2y = 3 - 4x$,	$y(0) = 0$,	$y'(0) = 0$.
4.4.	$y'' + 4y = 8\sin 2x$,	$y(0) = 0$,	$y'(0) = 0$.
4.5.	$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 0$.
4.6.	$y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 2$.
4.7.	$y'' + y' = e^{-x}$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = -1$.
4.8.	$y'' - 4y' + 4y = 2\sin 2x$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 0$.
4.9.	$y'' - y' = 2(1 - x)$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 1$.
4.10.	$y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1$,	$y(0) = 2$,	$y'(0) = 2$.
4.11.	$y'' - 2y' - 8y = 16x^2 + 2$,	$y(0) = 0$,	$y'(0) = 5$.
4.12.	$y'' + 4y = 3\cos x$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 2$.
4.13.	$y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$,	$y(0) = 2$,	$y'(0) = 5$.
4.14.	$y'' - 2y' = 2x + 1$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 1$.
4.15.	$y'' - 2y' + y = 9e^{-2x}$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 1$.
4.16.	$y'' - 4y = 4\sin 2x$,	$y(0) = 2$,	$y'(0) = 7$.
4.17.	$y'' + y' = 3\cos x$,	$y(0) = 0$,	$y'(0) = 1$.
4.18.	$y'' - y' - 6y = 6x^2 - 4x - 3$,	$y(0) = 3$,	$y'(0) = 5$.
4.19.	$y'' - 3y' = 3e^{3x}$,	$y(0) = 4$,	$y'(0) = 4$.
4.20.	$y'' - 4y' + 5y = 5x - 4$,	$y(0) = 0$,	$y'(0) = 3$.
4.21.	$y'' + y' - 2y = 3\sin x$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 2$.
4.22.	$y'' - 4y = 2e^{-x}$,	$y(0) = 0$,	$y'(0) = -4$.
4.23.	$y'' + y = 6\sin 2x$,	$y(\pi) = -1$,	$y'(\pi) = -4$.
4.24.	$y'' - 5y' = 10x + 3$,	$y(0) = 2$,	$y'(0) = 4$.
4.25.	$y'' + y' - 2y = 4e^{2x}$,	$y(0) = 3$,	$y'(0) = 5$.
4.26.	$y'' - 2y' = 6x^2 - 6x - 2$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 1$.
4.27.	$y'' - 4y' + 3y = 8e^{5x}$,	$y(0) = 3$,	$y'(0) = 7$.
4.28.	$y'' + 16y = 7\cos 3x$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 4$.
4.29.	$y'' + 6y' + 9y = 2e^{-3x}$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = -3$.
4.30.	$y'' + 2y' + y = x + 2$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 2$.

Задание 5. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений методом исключения.

5.1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

5.2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 5x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y. \end{cases}$

5.4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 6y. \end{cases}$

5.5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

5.6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 4y. \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y. \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 4y. \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

5.12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 4x. \end{cases}$

5.13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8y - x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

5.14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y - 2x. \end{cases}$

5.15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 3y. \end{cases}$

5.16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

5.17. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - x. \end{cases}$

5.18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y. \end{cases}$

5.21. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y. \end{cases}$

5.22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y. \end{cases}$

5.23. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 7y. \end{cases}$

5.24. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 6y. \end{cases}$

5.25. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y. \end{cases}$

5.26. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y. \end{cases}$

5.27. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y. \end{cases}$

5.28. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + y. \end{cases}$

5.9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$ **5.19.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 3x, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 2x. \end{cases}$ **5.29.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 5y. \end{cases}$ **5.20.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - y. \end{cases}$ **5.30.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 5y. \end{cases}$

Задание 6. Вычислить массу материальной пластины, занимающей область D плоскости xOy, если поверхностная плотность $\rho(x,y)$ и границы области D заданы уравнениями:

6.1. $\rho(x,y) = x^2 + y$, D: $y = x^2$, $x = y^2$.
6.2. $\rho(x,y) = xy^2$, D: $y = x^2$, $y = 2x$.
6.3. $\rho(x,y) = x + y$, D: $y^2 = x$, $y = x$.
6.4. $\rho(x,y) = yx^2$, D: $y = 2 - x$, $y = x$, $x \ge 0$.
6.5. $\rho(x,y) = x^3 + 2y$, D: $y = x^2 - 1$, $x \ge 0$, $y \le 0$.
6.6. $\rho(x,y) = y + x$, D: $y = x$, $y = x^2$.
6.7. $\rho(x,y) = 1 + y$, D: $y^2 = x$, $x = 5y$.
6.8. $\rho(x,y) = x + y$, D: $y = -x^2 + 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.
6.9. $\rho(x,y) = x(y+1)$, D: $y = 5x$, $y = x$, $x = 3$.
6.10. $\rho(x,y) = (x+2)y$, D: $y = x$, $x = 2y$, $x = 2$.
6.11. $\rho(x,y) = x + y^2$, D: $y = x^2$, $y = 1$.
6.12. $\rho(x,y) = yx^2$, D: $y = 2x^3$, $y = 0$, $x = 1$.
6.13. $\rho(x,y) = x^2 + y^2$, D: $x = y^2$, $x = 1$.
6.14. $\rho(x,y) = xy$, D: $y = x^3$, $y = 0$, $x \le 2$.
6.15. $\rho(x,y) = x + y$, D: $y = x^3$, $y = 8$, $y = 0$, $x = 3$.
6.16. $\rho(x,y) = x(2x + y)$, D: $y = 1 - x^2$, $y \ge 0$, $x \ge 0$.
6.17. $\rho(x,y) = y(1 - x)$, D: $y^3 = x$, $y = x$.
6.18. $\rho(x,y) = xy^2$, D: $y^2 = 1 - x$, $x \ge 0$.
6.19. $\rho(x,y) = x(y + 5)$, D: $y = -x + 5$, $x - y = 0$, $y \ge 0$.
6.20. $\rho(x,y) = x + y$, D: $y = x^2$, $y = 3$.
6.21. $\rho(x,y) = (x+1)y^2$, D: $y = 3x^2$, $y = 3$.

6.22. $\rho(x,y) = xy^2$, D: $y = x$, $y = 0$, $x = 1$.

6.23. $\rho(x,y) = x^3 + y$, D: $x + y = 1$, $x + y = 2$, $x \le 1$, $x \ge 0$.

6.24. $\rho(x,y) = xy^3$, D: $y = x^3$, $y \ge 0$, $y = 4x$.

6.25. $\rho(x,y) = x^3 + 3y$, D: $x + y = 1$, $y = x^2$, $x \ge 0$.

6.26. $\rho(x,y) = xy$, D: $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x + y = 2$.

6.27. $\rho(x,y) = x^2y^2$, D: $y = x$, $xy = 1$, $y = 2$.

6.28. $\rho(x,y) = y\left(1 + x^2\right)$, D: $y = x^3$, $y = 3x$.

6.29. $\rho(x,y) = y^2(1 + 2x)$, D: $x = 2 - y^2$, $x = 0$.

6.30. $\rho(x,y) = xy$. D: $y = x$, $y = 0$, $x = 2$.

Задание 7. Используя кратные интегралы, вычислить объём тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертёж.

7.1. $z = 4 - x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $z = 0$.

7.2. $z = 4 - y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $z \ge 0$.

7.3. $z = 2 - x - y$, $x^2 + y^2 = 1$, $z \ge 0$.

7.4. $z = y^2$, $x + y = 2$, $x \ge 0$, $z \ge 0$.

7.5. $z = x$, $x = \sqrt{9 - y^2}$, $x = \sqrt{25 - y^2}$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

7.6. $z = 4 - x - y$, $x^2 + y^2 = 4$, $z \ge 0$.

7.7. $z = x^2$, $x - 2y + 2 = 0$, $x + y = 7$, $z \ge 0$.

7.8. $y = \sqrt{25 - x^2}$, $x = 4$, $z = y$, $x \ge 0$, $z \ge 0$.

7.9. $x = 2\sqrt{y}$, $y = 2\sqrt{x}$, $z = 4 - x$, $z \ge 0$.

7.10. $z = x^2$, $x + y = 9$, $2x - y = 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

7.11. $z = x^2$, $y = 2x$, $x = 4$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

7.12. $z = \sqrt{y}$, $y = 2x$, $y = 3$, $x \ge 0$, $z \ge 0$.

7.13. $z = y^2$, $y = 2x$, $x = 3$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

7.14. $y^2 = 2 - x$, $z = 3x$, $z \ge 0$.

7.15. $y = \sqrt{9 - x^2}$, $z = 2y$, $z \ge 0$.

7.16. $z = x^2 + y^2$, $x + y = 2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

7.17. $x^2 + y^2 = 9$, $z = 5 - x - y$, $z \ge 0$.

7.18. $x = \sqrt{4 - y^2}$, $z = x$, $z \ge 0$.

7.19. $z = x^2$, $x + y = 2$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

7.20. $x=\sqrt{25-y^2}$, $z=x$, $y=4$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

7.21. $x^2+y^2=9$, $z=y^2$, $z\ge 0$.

7.22. $z=1-x^2-y^2$, $y\ge x$, $x\ge 0$, $z\ge 0$.

7.23. $x^2+y^2=4$, $z=x^2+y^2$, $z\ge 0$.

7.24. $z=x^2$, $y=x$, $y=2$, $z\ge 0$.

7.25. $x^2+y^2=4$, $y+z=2$, $z\ge 0$.

7.26. $4z=y^2$, $2x+y=2$, $x-y=0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

7.27. $z=y^2$, $2x+y=2$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

7.28. $x=2y^2+1$, $z=1-y^2$, $x=y^2$, $z\ge 0$.

7.29. $z=9-x^2$, $y=3-x$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

7.30. $z=4\sqrt{y}$, $x+y=4$, $x\ge 0$, $z\ge 0$.

Задание 8. Вычислить данный криволинейный интеграл вдоль линии L. Сделать чертёж.

8.1. $\int\limits_L \left(xy-y^2\right)dx+xdy$,

где L – дуга параболы $y=2x^2$ от точки $O(0{,}0)$ до точки $A(1{,}2)$.

8.2. $\int\limits_L 2xydx-x^2dy$,

где L – ломаная OBA, если $O(0{,}0)$, $B(2{,}0)$ и $A(2{,}1)$.

8.3. $\int\limits_L \frac{x}{y}dx+\frac{1}{y-a}dy$,

где L – дуга циклоиды $\begin{cases} x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$, при $\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{\pi}{3}$.

8.4. $\int\limits_L \left(x^2-y\right)dx+\left(y^2-x\right)dy$,

где L – дуга окружности $\begin{cases} x=5\cos t\\ y=5\sin t\end{cases}$, от точки $A(5{,}0)$ до точки $B(0{,}5)$.

8.5. $\int\limits_L 2xydx-x^2dy$,

где L – дуга параболы $y=\frac{x^2}{4}$ от точки $O(0{,}0)$ до точки $A(2{,}1)$.

8.6. $\int\limits_L \left(x-\frac{1}{y}\right)dy$,

где L – дуга параболы $y=x^2$ от точки $A(1,1)$ до точки $B(2,4)$.

8.7. $\int\limits_L \cos y\,dx-\sin x\,dy$,

где L – отрезок прямой, соединяющий точки $B(-2,0)$ и $A(2,0)$.

8.8. $\int\limits_L y\,dx-x\,dy$,

где L – четверть дуги окружности $\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases}$, лежащая в первом квадранте и «пробегаемая» против хода часовой стрелки.

8.9. $\int\limits_L (xy-x)\,dx+\frac{x^2}{y}dy$,

где L – дуга параболы $y=2\sqrt{x}$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,2)$.

8.10. $\oint\limits_L y\,dx-x\,dy$,

где L – дуга эллипса $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=6\sin t \end{cases}$, «пробегаемая» против хода часовой стрелки.

8.11. $\int\limits_L \left(x^2-2xy\right)dx+\left(2xy+y^2\right)dy$,

где L – дуга параболы $y=x^2$ от точки $A(1,1)$ до точки $B(2,4)$.

8.12. $\int\limits_L x\,dy$,

где L – дуга синусоиды $y=\sin x$ от точки $A(\pi,0)$ до точки $O(0,0)$.

8.13. $\int\limits_L y^2\,dx+x^2\,dy$,

где L – верхняя половина эллипса $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$ $(a>0, b>0)$, «пробегаемая» по ходу часовой стрелки.

8.14. $\int\limits_L \left(xy-y^2\right)dx+x\,dy$,

где L – дуга параболы $y=2\sqrt{x}$ от точки $O(0,0)$ до точки $B(1,2)$.

8.15. $\int_L x\,dx + xy\,dy$,

где L – дуга верхней половины окружности $x^2+y^2=2x$ при положительном направлении обхода.

8.16. $\int_L (x-y)\,dx + dy$,

где L – дуга верхней половины окружности $x^2+y^2=R^2$, «пробегаемая» в положительном направлении.

8.17. $\int_L xy\,dx + (y-x)\,dy$,

где L – дуга кривой $y=x^3$ от точки $O(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

8.18. $\int_L 4x\sin^2 y\,dx + y\cos 2x\,dy$,

где L – отрезок прямой. соединяющий точки $O(0,0)$ и $A(3,6)$.

8.19. $\oint_L y\,dx - x\,dy$,

где L – дуга эллипса $\begin{cases} x=6\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}$ при положительном направлении обхода контура.

8.20. $\int_L \left(x^2y-3x\right)dx + \left(y^2x+2y\right)dy$,

где L – верхняя половина эллипса $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$, $0\le t\le\pi$.

8.21. $\int_L y\,dx + \frac{x}{y}\,dy$,

где L – дуга кривой $y=e^{-x}$ от точки $A(0,1)$ до точки $B(-1,e)$.

8.22. $\int_L \frac{y^2+1}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy$,

где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1,2)$ и $A(2,4)$.

8.23. $\int_L \frac{y}{x}\,dx + x\,dy$,

где L – дуга кривой $y=\ln x$ от точки $A(1,0)$ до точки $B(e,1)$.

8.24. $\int\limits_L \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy$,

где L – граница треугольника ABC, если $A(1,0)$, $B(1,1)$ и $C(0,1)$, при обходе её против хода часовой стрелки.

8.25. $\int\limits_L \left(x^2-2xy\right)dx + \left(y^2-2xy\right)dy$,

где L – дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(-1,1)$ до точки $B(1,1)$.

8.26. $\int\limits_L \left(xy - y^2\right)dx + x\,dy$,

где L – отрезок прямой, соединяющий точки $O(0,0)$ и $A(1,2)$.

8.27. $\int\limits_L x\,dy - y\,dx$,

где L – дуга кривой $y = x^3$ от точки $O(0,0)$ до точки $B(2,8)$.

8.28. $\int\limits_L \left(x^2+y\right)dx + \left(y^2+x\right)dy$,

где L – дуга окружности $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$, от точки $A(4,0)$ до точки $B(0,4)$.

8.29. $\int\limits_L x\,dy$,

где L – дуга правой половины окружности $x^2+y^2=a^2$ от точки $A(0,-a)$ до точки $B(0,a)$, $(a>0)$.

8.30. $\int\limits_L y\,dx + x\,dy$, где L – верхняя половина эллипса $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$, «пробегаемая» по ходу часовой стрелки.

Рекомендации к выполнению контрольной работы №2

Задание 1. Найти неопределенные интегралы (результаты в случаях а), б), в) проверить дифференцированием)

а) $\int \frac{3-2x^4+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}dx$; б) $\int x\cdot\sqrt{x^2+3}\,dx$; в) $\int (2x+3)\cos 4x\,dx$;

г) $\int \frac{\cos^3 4x}{\sqrt[5]{\sin 4x}}dx$; д) $\int \frac{3x-6}{2-5x-x^2}dx$.

Решение

а) $\int \frac{3-2x^4+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}dx = 3\cdot\int x^{-1/4}dx - 2\cdot\int x^{15/4}dx + \int x^{5/12}dx =$

$$= 4\cdot x^{3/4} - \frac{8}{19}\cdot x^{19/4} + \frac{12}{17}\cdot x^{17/12} + C = 4\cdot\sqrt[4]{x^3} - \frac{8}{19}\cdot\sqrt[4]{x^{19}} + \frac{12}{17}\cdot\sqrt[12]{x^{17}} + C.$$

Проверка:

$$\left(4\cdot x^{3/4} - \frac{8}{19}\cdot x^{19/4} + \frac{12}{17}\cdot x^{17/12} + C\right)' =$$

$$= 4\cdot\frac{3}{4}\cdot x^{-1/4} - \frac{8}{19}\cdot\frac{19}{4}\cdot x^{15/4} + \frac{12}{17}\cdot\frac{17}{12}\cdot x^{5/12} = 3\cdot x^{-1/4} - 2\cdot x^{15/4} + x^{5/12} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt[4]{x}} - 2\cdot\sqrt[4]{x^{15}} + \sqrt[12]{x^5} = \frac{3-2\cdot\sqrt[4]{x^{16}}+\sqrt[12]{x^8}}{\sqrt[4]{x}} = \frac{3-2x^4+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}.$$

б) $\int x\cdot\sqrt{x^2+3}\,dx$.

Занесем под знак дифференциала функцию $y=x$ и воспользуемся свойствами дифференциала, получим

$$x\,dx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}d\left(x^2\right) = \frac{1}{2}d\left(x^2+3\right).$$

Тогда

$$\int x\cdot\sqrt{x^2+3}\,dx = \int\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}d\left(x^2+3\right) = \frac{1}{2}\cdot\int\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{2}}d\left(x^2+3\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2+3\right)^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3}\left(x^2+3\right)^{3/2} + C = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+3\right)^3} + C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+3\right)^3}+C\right)' = \frac{1}{3}\cdot\left(\left(x^2+3\right)^{\frac{3}{2}}\right)' + (C)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+3\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{x^2+3}\cdot 2x = x\cdot\sqrt{x^2+3}\,.$$

в) $\int (2x+3)\cos 4x\,dx$.

Воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du\,.$$

$$\int (2x+3)\cos 4x\,dx = \left|\begin{matrix} u = 2x+3, & du = d(2x+3) = (2x+3)'dx = 2dx, \\ dv = \cos 4x\,dx, & v = \frac{1}{4}\int \cos 4x\,d(4x) = \frac{1}{4}\sin 4x \end{matrix}\right| =$$

$$= (2x+3)\cdot\frac{\sin 4x}{4} - \int \frac{\sin 4x}{4}\cdot 2dx = \frac{(2x+3)\sin 4x}{4} - \frac{1}{2}\int \sin 4x\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}(2x+3)\sin 4x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(-\cos 4x) + C = \frac{1}{4}(2x+3)\cdot\sin 4x + \frac{1}{8}\cos 4x + C\,.$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{4}(2x+3)\cdot\sin 4x + \frac{1}{8}\cos 4x + C\right)' =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left((2x+3)\cdot\sin 4x\right)' + \frac{1}{8}\cdot(\cos 4x)' + (C)' =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left((2x+3)'\cdot\sin 4x + (2x+3)\cdot(\sin 4x)'\right) + \frac{1}{8}\cdot(-\sin 4x)\cdot(4x)' =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot\sin 4x + (2x+3)\cdot\cos 4x\cdot(4x)'\right) - \frac{1}{8}\cdot\sin 4x\cdot 4 =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot\sin 4x + (2x+3)\cdot\cos 4x\cdot 4\right) - \frac{1}{2}\cdot\sin 4x =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sin 4x + (2x+3)\cdot\cos 4x - \frac{1}{2}\cdot\sin 4x = (2x+3)\cdot\cos 4x\,.$$

г) $\int \frac{\cos^3 4x}{\sqrt[5]{\sin 4x}} dx = \int \frac{\cos^2 4x \cdot \cos 4x}{\sqrt[5]{\sin 4x}} dx = \int \frac{\left(1 - \sin^2 4x\right) \cdot \cos 4x}{\sqrt[5]{\sin 4x}} dx$.

Применим в интеграле замену

$$\left| \begin{aligned} & t = \sin 4x, \\ & dt = d\left(\sin 4x\right) = \left(\sin 4x\right)' dx = \cos 4x \cdot \left(4x\right)' dx = 4\cos 4x\, dx, \\ & \cos 4x dx = \frac{1}{4} dt. \end{aligned} \right|$$

Тогда

$$\int \frac{1 - t^2}{\sqrt[5]{t}} \cdot \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{\sqrt[5]{t}} dt - \frac{1}{4} \cdot \int \frac{t^2}{\sqrt[5]{t}} dt = \frac{1}{4} \cdot \int t^{-1/5} dt - \frac{1}{4} \cdot \int t^{9/5} dt =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{5}+1}}{-\frac{1}{5}+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{\frac{9}{5}+1}}{\frac{9}{5}+1} + C = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot t^{\frac{4}{5}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{14} \cdot t^{14/5} + C.$$

Вернемся к исходной переменной

$$\int \frac{\cos^3 4x}{\sqrt[5]{\sin 4x}} dx = \frac{5}{16} \sqrt[5]{\sin^4 4x} - \frac{5}{56} \sqrt[5]{\sin^{14} 4x} + C.$$

д) $\int \frac{3x - 6}{2 - 5x - x^2} dx$.

Так как степень числителя и знаменателя отличается на единицу, то выделим в числителе подынтегральной функции слагаемое, равное производной знаменателя.

$$\left(2 - 5x - x^2\right)' = -5 - 2x.$$

$$3x - 6 = 3(x - 2) = -\frac{3}{2}(-2x + 4) = -\frac{3}{2}(-2x - 5 + 5 + 4) = -\frac{3}{2}\left((-2x - 5) + 9\right).$$

Тогда

$$\int \frac{3x - 6}{2 - 5x - x^2} dx = \int \frac{-\frac{3}{2}\left((-2x - 5) + 9\right)}{2 - 5x - x^2} dx =$$

$= -\frac{3}{2}\left(\int \frac{-2x - 5}{2 - 5x - x^2} dx + \int \frac{9}{2 - 5x - x^2} dx \right) = -\frac{3}{2}\left(I_1 + I_2\right)$, где

$I_1 = \int \frac{-2x - 5}{2 - 5x - x^2} dx$ и $I_2 = \int \frac{9}{2 - 5x - x^2} dx$.

Найдем I_1:

$$I_1 = \int \frac{-2x-5}{2-5x-x^2}dx = \int \frac{\left(2-5x-x^2\right)'}{2-5x-x^2}dx = \int \frac{d\left(2-5x-x^2\right)}{2-5x-x^2} = \ln\left|2-5x-x^2\right|.$$

Найдем I_2:

$$I_2 = \int \frac{9}{2-5x-x^2}dx = -9\int \frac{dx}{x^2+5x-2} = -9\int \frac{dx}{x^2+2\cdot x\cdot \frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2-2} =$$

$$= -9\int \frac{dx}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}-2} = -9\int \frac{dx}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{33}{4}} = -9\int \frac{d\left(x+\frac{5}{2}\right)}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{33}}{2}\right)^2} =$$

$$= -9\cdot \frac{1}{2\cdot \frac{\sqrt{33}}{2}}\cdot \ln\left|\frac{x+\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}}{x+\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}}\right| = -\frac{9}{\sqrt{33}}\cdot \ln\left|\frac{2x+5-\sqrt{33}}{2x+5+\sqrt{33}}\right|.$$

Следовательно,

$$\int \frac{3x-6}{2-5x-x^2}dx = -\frac{3}{2}\left(\ln\left|2-5x-x^2\right| - \frac{9}{\sqrt{33}}\cdot \ln\left|\frac{2x+5-\sqrt{33}}{2x+5+\sqrt{33}}\right|\right)+C$$

Ответ. **а)** $4\cdot\sqrt[4]{x^3}-\frac{8}{19}\cdot\sqrt[4]{x^{19}}+\frac{12}{17}\cdot\sqrt[12]{x^{17}}+C$.

б) $\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+3\right)^3}+C$.

в) $\frac{1}{4}(2x+3)\cdot\sin 4x+\frac{1}{8}\cos 4x+C$.

г) $\frac{5}{16}\sqrt[5]{\sin^4 4x}-\frac{5}{56}\sqrt[5]{\sin^{14} 4x}+C$.

д) $-\frac{3}{2}\left(\ln\left|2-5x-x^2\right|-\frac{9}{\sqrt{33}}\cdot\ln\left|\frac{2x+5-\sqrt{33}}{2x+5+\sqrt{33}}\right|\right)+C$.

Задание 2. Вычислить

$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx.$$

Решение

Воспользуемся формулой замены переменной в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = F(t)\Bigg|_\alpha^\beta = F(\beta)-F(\alpha),$$

где $x=\varphi(t)$, $\varphi(a)=\alpha$, $\varphi(b)=\beta$.

$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx = \left| \begin{array}{l} t=\sqrt{1+x},\ x=t^2-1, \\ dx=\left(t^2-1\right)'dt=2t\,dt, \\ x=3 \ \Rightarrow\ t=2, \\ x=8 \ \Rightarrow\ t=3, \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{t^2-1}{t}\cdot 2t\,dt = 2\cdot\int_2^3 \left(t^2-1\right)dt =$$

$$= 2\cdot\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_2^3 = 2\cdot\left(\frac{27}{3}-3-\frac{8}{3}+2\right) = 2\cdot\left(\frac{19}{3}-1\right) = 2\cdot\frac{16}{3} = \frac{32}{3} \approx 10{,}67.$$

Ответ. 10,67.

Задание 3.

а) Найти общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка и частное решение, удовлетворяющее начальному условию

$$(1+y)dx + xdy = 0,\ y(1)=0.$$

Решение

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$(1+y)dx = -xdy,$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{1+y},$$

$$\int\frac{dx}{x} = -\int\frac{dy}{1+y},$$

$$\ln|x| = -\ln|1+y| + \ln|C|.$$

Выразим y:

$$\ln|x| + \ln|1+y| = \ln|C|,$$

$$\ln|x(1+y)| = \ln|C|,$$

$$x(1+y) = C,$$

$$1+y = \frac{C}{x}, \text{ при } x \neq 0,$$

$$y = \frac{C}{x} - 1.$$

Если $x = 0$ подставить в исходное уравнение, то убедимся, что оно является решением дифференциального уравнения.

Следовательно, общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = \frac{C}{x} - 1,\ x = 0.$$

Найдем частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$.

Из начального условия $y(1) = 0$ следует, что $x_0 = 1$ и $y_0 = 0$. Подставим эти значения в общее решение и вычислим C:

$$0 = \frac{C}{1} - 1,$$

$$C = 1.$$

Значит, частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию, имеет вид:

$$y = \frac{1}{x} - 1.$$

Ответ. $y = \dfrac{C}{x} - 1,\ x = 0$ - общее решение;

$y = \dfrac{1}{x} - 1$ - частное решение.

б) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' - \frac{3}{x}y = x.$$

Решение

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно y, т.к. y и y' входят в это уравнение в первой степени и оно имеет вид:

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Решение будем искать в виде произведения двух функций

$$y = uv,$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — неизвестные функции от переменной x. Тогда $y' = u'v + v'u$. Подставив y и y' в исходное уравнение, получим

$$u'v + v'u - \frac{3}{x}uv = x,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{3v}{x}\right) = x.$$

Функцию v найдем так, чтобы выражение в скобках равнялось нулю:

$$v' - \frac{3v}{x} = 0 \text{ или } \frac{dv}{dx} - \frac{3v}{x} = 0.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем. Частное решение уравнения имеет вид:

$$v = x^3.$$

Подставим найденную функцию v в уравнение

$$u'v + u\left(v' - \frac{3v}{x}\right) = x,$$

$$u' \cdot x^3 + u \cdot 0 = x,$$

$$u' = \frac{1}{x^2} \text{ или } \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем. Общее решение уравнения имеет вид:

$$u = -\frac{1}{x} + C, \text{ где } C = const.$$

Тогда общее решение исходного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$y = uv = \left(C - \frac{1}{x}\right)x^3 = C\,x^3 - x^2.$$

Ответ. $y = C\,x^3 - x^2$ - общее решение.

Задание 4.

а) Решить задачу Коши

$$y'' + 3y' - 4y = 0,\ y(0) = 4,\ y'(0) = -1.$$

Решение

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Составим характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению,

$$k^2 + 3k - 4 = 0.$$

Корнями характеристического уравнения являются значения

$$k_1 = -4 \text{ и } k_2 = 1.$$

Так как корни характеристического уравнения действительные не совпадающие числа, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{k_1 \cdot x} + C_2 e^{k_2 \cdot x} = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x}.$$

Неизвестные константы C_1 и C_2 найдем из условий $\begin{cases} y(0) = 4, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$

Найдем y':

$$y'(x) = \left(C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x}\right)' = -4C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x}.$$

Тогда, подставляя начальные условия в $y(x)$ и $y'(x)$, получим

$$\begin{cases} C_1 e^{-4\cdot 0} + C_2 e^{0} = 4, \\ -4C_1 e^{-4\cdot 0} + C_2 e^{0} = -1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} C_1 + C_2 = 4, \\ -4C_1 + C_2 = -1. \end{cases}$$

Решая систему, найдем, что $C_1 = 1$ и $C_2 = 3$.

Значит, решение задачи Коши имеет вид:

$$y(x) = e^{-4x} + 3e^{x}$$

Ответ. $y(x) = e^{-4x} + 3e^{x}$.

б) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 10y' + 25y = 0.$$

Решение

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Составим характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению,

$$k^2 + 10k + 25 = 0.$$

Корнями характеристического уравнения являются значения

$$k_1 = k_2 = -5.$$

Так как корни характеристического уравнения действительные совпадающие числа, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = \left(C_1 x + C_2\right) e^{k\cdot x} = \left(C_1 x + C_2\right) e^{-5x}.$$

Ответ. $y(x) = \left(C_1 x + C_2\right) e^{-5x}$.

в) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Решение

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Составим характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению,

$$k^2 - 4k + 5 = 0.$$

Корнями характеристического уравнения являются значения

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i = \alpha \pm \beta i,$$

где $D = 4^2 - 4 \cdot 5 = -4 = 4 \cdot i^2$, так как $i^2 = -1$. Откуда имеем $\alpha = 2$ и $\beta = 1$.

Так как корни характеристического уравнения пара комплексно сопряженных чисел, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\alpha \cdot x}\left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right) = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right).$$

Ответ. $y(x) = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$.

г) Решить задачу Коши

$$y'' - 4y' + 5y = 2x e^x, \; y(0) = 2, \; y'(0) = 3.$$

Решение

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

Общее решение исходного дифференциального уравнения будем искать в виде суммы двух функций

$$y(x) = \bar{y}(x) + y^*(x),$$

где $\bar{y}(x)$ – общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 5y = 0$, $y^*(x)$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 5y = 2x e^x$.

Общим решением однородного дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

будет функция $\bar{y}(x) = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$.

Найдем $y^*(x)$.

Рассмотрим правую часть исходного дифференциального уравнения

$$f(x) = 2x e^x = e^x(2x) = e^{1 \cdot x}\left(2x \cos(0 \cdot x) + 2x \sin(0 \cdot x)\right).$$

Правая часть уравнения является функцией специального вида

$$f(x) = e^{\alpha \cdot x}\left(P_n(x) \cos(\beta x) + Q_m(x) \sin(\beta x)\right)$$

Значит, частное решение $y^*(x)$ будет иметь вид

$$y^*(x) = x^t \cdot e^{\alpha \cdot x}\left(\bar{P}_s(x) \cos(\beta x) + \bar{Q}_s(x) \sin(\beta x)\right).$$

По условию имеем $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $P_n(x) = 2x$ и $Q_m(x) = 2x$.

Параметр t равен количеству совпадений числа $z = \alpha + \beta i$ с корнями характеристического уравнения.

В данном случае $z = 1$ и $k_{1,2} = 2 \pm i$. Так как совпадений нет, то $t = 0$.

Степень многочленов $\bar{P}_s(x)$ и $\bar{Q}_s(x)$ определяется из условия $s = \max\{n, m\}$.

В данном примере $P_n(x) = 2x$ и $Q_m(x) = 2x$, значит, $n = 1$ и $m = 1$. Тогда $s = \max\{1,1\} = 1$. Откуда, $\bar{P}_s(x) = Ax + B$ и $\bar{Q}_s(x) = Cx + D$.

Подставляя найденные параметры, получим

$$y^*(x) = x^0 \cdot e^{1\cdot x}\left((Ax + B)\cos(0 \cdot x) + (Cx + D)\sin(0 \cdot x)\right),$$

$$y^*(x) = 1 \cdot e^x\left((Ax + B) \cdot 1 + (Cx + D) \cdot 0\right) = (Ax + B)e^x.$$

Вычислим неизвестные коэффициенты A и B по методу неопределенных коэффициентов. Для этого найдем $(y^*)'$ и $(y^*)''$

$$(y^*)' = \left((Ax + B)e^x\right)' = (Ax + B + A)e^x,$$

$$(y^*)'' = \left((Ax + B + A)e^x\right)' = (Ax + B + 2A)e^x.$$

Так как $y^*(x)$ это решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 5y = 2x\,e^x,$$

то подставляя в уравнение вместо y^*, $(y^*)'$ и $(y^*)''$ найденные выражения, получим

$$(Ax + B + 2A)e^x - 4(Ax + B + A)e^x + 5(Ax + B)e^x = 2x\,e^x.$$

Перегруппировав слагаемые, приравняем коэффициенты в левой и правой частях уравнения при одинаковых функциях.

$$(2A)x\,e^x + (-2A + 2B)e^x = 2x\,e^x + 0 \cdot e^x.$$

$$\begin{array}{r|l} x\,e^x & \quad 2A = 2, \\ e^x & -2A + 2B = 0. \end{array}\Bigg\}$$

Решением системы являются значения $A = 1$ и $B = 1$.

Следовательно, частное решение исходного дифференциального уравнения примет вид

$$y^*(x) = (x + 1)e^x.$$

Тогда общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) + (x + 1)e^x.$$

Найдем частное решение дифференциального уравнения удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0)=2,\ y'(0)=3.$$

Найдем $y'(x)$

$$y'(x)=\left(e^{2x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)+(x+1)e^{x}\right)'=$$

$$=e^{2x}\left(2C_1\cos x+2C_2\sin x-C_1\sin x+C_2\cos x\right)+(x+2)e^{x}.$$

Подставляя начальные условия в $y(x)$ и $y'(x)$, получим

$$\begin{cases} y(0)=e^{2\cdot 0}\left(C_1\cos 0+C_2\sin 0\right)+(0+1)e^{0}=2, \\ y'(0)=e^{2\cdot 0}\left(2C_1\cos 0+2C_2\sin 0-C_1\sin 0+C_2\cos 0\right)+(0+2)e^{0}=3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1+1=2, \\ 2C_1+C_2+2=3. \end{cases}$$

Откуда, $C_1=1$ и $C_2=-1$.

Значит, решением задачи Коши является функция

$$y(x)=e^{2x}\left(\cos x-\sin x\right)+(x+1)e^{x}.$$

Ответ. $y(x)=e^{2x}\left(\cos x-\sin x\right)+(x+1)e^{x}$.

Задание 5. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-2y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-3x-4y. \end{cases}$$

Решение

Система может быть записана в виде

$$\begin{cases} x'=x-2y, \\ y'=-3x-4y. \end{cases}$$

Продифференцируем первое уравнение системы. Получим

$$x''=x'-2y'.$$

Заменим в полученном уравнении y' выражением из второго уравнения системы

$$x''=x'-2\left(-3x-4y\right).$$

Выразим из первого уравнения y и подставим в полученное уравнение

$$y=\frac{1}{2}\left(-x'+x\right),$$

$$x''=x'-2\left(-3x-4\cdot\frac{1}{2}\left(-x'+x\right)\right).$$

Откуда

$$x'' + 3x' - 10x = 0.$$

Получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с коэффициентами. Общее решение которого имеет вид:

$$x(t) = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{2t}.$$

Найдем производную x':

$$x' = -5C_1 e^{-5t} + 2C_2 e^{2t}.$$

Подставляя значения x и x' в выражения для y, найдем

$$y = \frac{1}{2}\left(-\left(-5C_1 e^{-5t} + 2C_2 e^{2t}\right) + C_1 e^{-5t} + C_2 e^{2t}\right),$$

$$y(t) = 3C_1 e^{-5t} - \frac{1}{2}C_2 e^{2t}.$$

Таким образом, решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{2t}, \\ y(t) = 3C_1 e^{-5t} - \dfrac{1}{2}C_2 e^{2t}. \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{2t}, \\ y(t) = 3C_1 e^{-5t} - \dfrac{1}{2}C_2 e^{2t}. \end{cases}$

Задание 6. Вычислить массу материальной пластины, занимающей область D плоскости xOy, если поверхностная плотность $\rho(x,y) = y$ и границы области D заданы уравнениями $x = (y-1)^2$, $y = x - 1$.

Решение

Масса материальной пластины с поверхностной плотностью $\rho(x,y)$, занимающей область D, определяется по формуле:

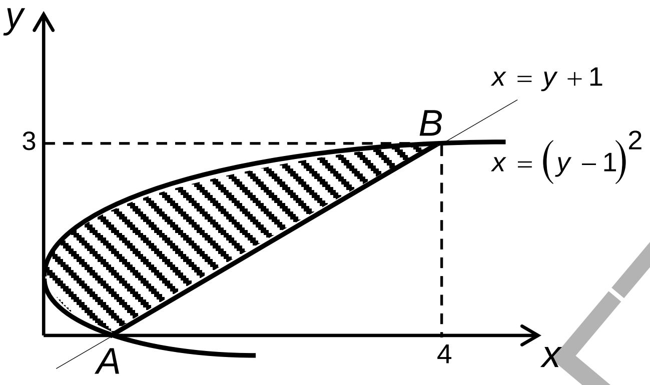
$$m = \iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy.$$

Построим область D.

Координаты точек пересечения линий найдем из системы:

$$\begin{cases} x = (y-1)^2, \\ y = x - 1. \end{cases}$$

Решением системы являются значения: $(1,0)$ и $(4,3)$. Значит, линии пресекаются в точках $A(1,0)$ и $B(4,3)$.



Область D – правильная относительно оси Ox.

Тогда

$$m=\iint_D y\,dx\,dy=\int_0^3 y\,dy\int_{(y-1)^2}^{y+1}dx=\int_0^3 y\,dy\cdot(x)\Big|_{(y-1)^2}^{y+1}=\int_0^3 y\left(y+1-(y-1)^2\right)dy=$$

$$=\int_0^3\left(-y^3+3y^2\right)dy=\left(-\frac{y^4}{4}+y^3\right)\Bigg|_0^3=-\frac{81}{4}+27=\frac{27}{4}=6,75.$$

Ответ. 6,75.

Задание 7. Используя кратные интегралы, вычислить объём тела, ограниченного указанными поверхностями: $2z=x^2+y^2$, $x+y=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$. Сделать чертёж.

Решение

Определим типы поверхностей, ограничивающих тело:

$2z=x^2+y^2$ – параболоид вращения;

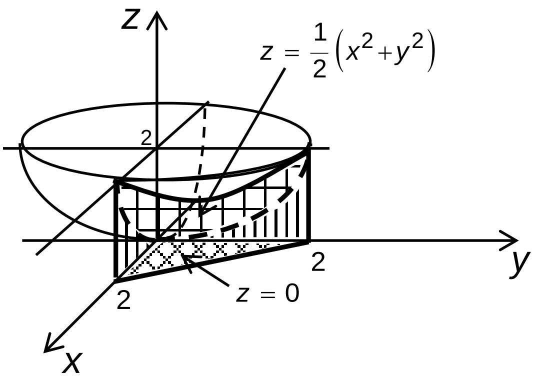
$x+y=2$ – плоскость, параллельная оси Oz;

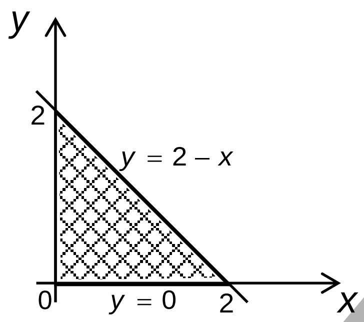
x=0 – плоскость yOz;

y=0 – плоскость xOz;

z=0 – плоскость xOy.

Изобразим данное тело





Вычислим объём с помощью тройного интеграла. Так как тело расположено правильно относительно оси Oz, то объем этого тела найдем по формуле:

$$V=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}dz.$$

Подставляя данные в формулу, получим:

$$V=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x}dy\int\limits_0^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}dz=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x}dy\,(z)\Big|_0^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x}\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 dx\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2-x}=\frac{1}{2}\int\limits_0^2\left(x^2(2-x)+\frac{(2-x)^3}{3}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{6}\int\limits_0^2\left(3x^2(2-x)+(2-x)^3\right)dx=-\frac{1}{3}\int\limits_0^2\left(2x^3-6x^2+6x-4\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{x^4}{2}-2x^3+3x^2-4x\right)\Bigg|_0^2=-\frac{1}{3}(8-16+12-8)=\frac{4}{3}\approx 1{,}3.$$

Ответ. 1,3.

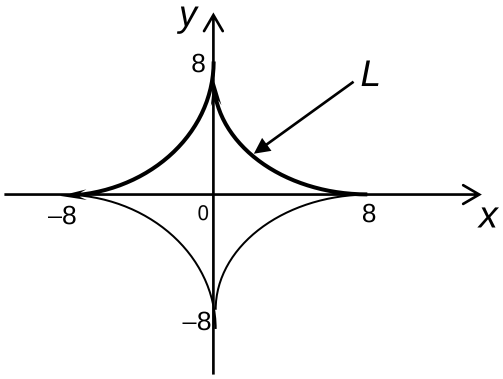
Задание 8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L\left(\sqrt[3]{x}+y\right)dx-\left(\sqrt[3]{y}+x\right)dy,$$

где $L-$ верхняя дуга астроиды $\begin{cases}x=8\cos^3 t,\\ y=8\sin^3 t,\end{cases}$ от точки $(8,0)$ до точки $(-8,0)$. Сделать чертёж.

Решение

Сделаем чертёж



При перемещении вдоль кривой L от точки $(8,0)$ до точки $(-8,0)$, параметр t будет изменяться от 0 до π: подставили координаты начальной и конечной точек дуги в уравнение астроиды.

Найдем dy и dx:

$$dx = \left(8\cos^3 t\right)' dt = 8\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t)\,dt = -24\cos^2 t\cdot \sin t\, dt,$$

$$dy = \left(8\sin^3 t\right)' dt = 8\cdot 3\sin^2 t\cdot \cos t\, dt = 24\sin^2 t\cdot \cos t\, dt.$$

Подставим найденные выражения в подынтегральное выражение

$$\left(\sqrt[3]{x}+y\right)dx-\left(\sqrt[3]{y}+x\right)dy=\left(\sqrt[3]{8\cos^3 t}+8\sin^3 t\right)\left(-24\cos^2 t\cdot\sin t\right)dt-$$

$$-\left(\sqrt[3]{8\sin^3 t}+8\cos^3 t\right)24\sin^2 t\cdot\cos t\,dt=-24\left(\sin 2t+2\sin^2 2t\right)dt.$$

Тогда

$$\int\limits_L\left(\sqrt[3]{x}+y\right)dx-\left(\sqrt[3]{y}+x\right)dy=-24\cdot\int\limits_0^{\pi}\left(\sin 2t+2\sin^2 2t\right)dt=$$

$$=-12\cdot\int\limits_0^{\pi}\sin 2t\,d(2t)-48\cdot\int\limits_0^{\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=-12\cdot(-\cos 2t)\Big|_0^{\pi}-$$

$$-24\cdot\int\limits_0^{\pi}dt+6\cdot\int\limits_0^{\pi}\cos 4t\,d(4t)=-12\cdot(-\cos 2\pi+\cos 0)-24\cdot(t)\Big|_0^{\pi}+$$

$$+6\cdot(\sin 4t)\Big|_0^{\pi}=-12\cdot(-1+1)-24\cdot(\pi-0)+6\cdot(\sin 4\pi-\sin 0)=$$

$$=-12\cdot 0-24\cdot\pi+6\cdot(0-0)=-24\cdot\pi.$$

Ответ. -24π.

Литература

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление Т. 2. - М.: Наука, 1985.
2. Жевняк Р. М., Карпук А. А. Высшая математика, ч.2,3. – Минск: ВШ, 1984-1988.
3. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. - М.: Наука, 1985.
4. Сборник задач по математике для втузов (под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича, ч.2). - М.: Наука, 1981 г.
5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике (под ред. А.П. Рябушко, ч. 2-3.). – Минск: ВШ, 2000.
6. Гусак А.А. Высшая математика, т.2. – Минск: ВШ, 1988.
7. Гусак А.А. Пособие к решению задач по высшей математике. – Минск: ВШ, 1988.
8. Тузик А.И. Интегрирование функций одной и нескольких переменных. – Брест: Изд-во БГТУ, 2000.

Содержание

Учебное издание

Составители:

Гладкий Иван Иванович,
Лизунова Ирина Владимировна,
Мороз Людмила Трофимовна,
Черненко Виктор Петрович

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕРАЛЫ

Методические рекомендации и варианты контрольной работы
по дисциплине “Высшая математика” для студентов
технических специальностей заочной формы обучения

Ответственный за выпуск Гладкий И.И.
Редактор Строкач Т.В.
Компьютерная верстка Боровикова Е.А.
Корректор Никитчик Е,В.

Подписано к печати 31.03.2009 г. Формат 60х84 $^{1}/_{16}$.
Усл. п. л. 2,1. Уч.-изд. л. 2,25. Заказ N 407. Тираж 150 экз.
Отпечатано на ризографе Учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.