Запишем общую оценку погрешности для метода (3) в энергетической норме

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A \le \left(12n\alpha\right)^{-1/6}\left\|x\right\| + 6^{1/2}\left(n\alpha\right)^{1/6}\delta,\ n \ge 1. \qquad (4)$$

Оптимизируем оценку (4) по *n*. Для этого при заданном δ найдём такое значение числа итераций *n,* при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по *n* от правой части неравенства (4), получим

$$n_{\text{опт}} = 2^{-5/2}3^{-2}\alpha^{-1}\delta^{-3}\left\|x\right\|^3. \qquad (5)$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (4), найдём её оптимальное значение

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A^{\text{опт}} \le 2\cdot 2^{1/12}3^{1/6}\delta^{1/2}\left\|x\right\|^{1/2}. \qquad (6)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Оптимальная оценка погрешности для метода* (3) *при условии* $\alpha > 0$ *в энергетической норме имеет вид* (6) *и получается при* $n_{\text{опт}}$ *из* (5).

Замечание. *Из неравенства* (6) *вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра* α. *Но* $n_{\text{опт}}$ *зависит от* α *и, поскольку на* α *нет ограничений сверху* $(\alpha > 0)$, *то за счёт выбора* α *можно получить* $n_{\text{опт}} = 1$, *т. е. оптимальная оценка погрешности будет достигаться уже на первом шаге итераций. Для этого достаточно взять*

$$\alpha_{onm} = 2^{-5/2}3^{-2}\delta^{-3}\left\|x\right\|^3.$$

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства *H*. Очевидно для этого достаточно, чтобы при некотором фиксированном ε $\left(0 < \varepsilon < \left\|A\right\|\right)$ было $P_\varepsilon x = 0$, $P_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, где $P_\varepsilon = \int\limits_0^\varepsilon \lambda dE_\lambda$. Так как $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - \left(E + \alpha A^3\right)^{-n}\right]y_\delta$, то для выполнения последнего из указанных условий должно выполняться условие $P_\varepsilon y_\delta = 0$. Таким образом, если решение *x* и приближенная правая часть y_δ такова, что $P_\varepsilon x = 0$ и $P_\varepsilon y_\delta = 0$, то из сходимости $x_{n,\delta}$ к *x* в энергетической норме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства *H* и, следовательно, для сходимости в исходной норме пространства *H* не требуется истокообразной представимости точного решения.

УДК 519.872

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРОГНОЗИРОВАНИИ ВАЛОВОГО РЕГИОНАЛЬНОГО ПРОДУКТА С ПОМОЩЬЮ НМ-СЕТЕЙ

Дунец А.Ю.

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, г. Гродно

Научный руководитель: Косарева Е.В., к. ф.-м. н., доцент

Введение. Валовый региональный продукт (ВРП) определяется как сумма добавленных стоимостей (ВДС) видов экономической деятельности и чистых налогов на продукты. ВРП формируется в разрезе 15 видов экономической деятельности (далее – секция) [1]. Для расчета ВРП области за каждый отчетный период (месяц, квартал, год) в отраслевые отделы главного статистического управления области поступает из районных отделов статистики перечень форм государственной статистической отчетности, используемых при формировании ВРП. Затем данные обрабатываются в отраслевых отделах и поступают в отдел статистического регистра и внутреннего обследования (ОСР и ВО), где непосредственно рассчитывается ВРП. Ранее в работе [2] была разработана стохастическая модель образования ВРП в разрезе отраслей на основе НМ-сети. НМ (Howard-Matalytski)-сеть – это сеть массового обслуживания (МО), в которой заявка при переходе из одной системы в другую приносит последней системе некоторый доход, а доход первой системы уменьшается на эту величину. В последнее время НМ-сети широко используются для моделирования различных реальных объектов в экономике, технике и производстве, для которых необходимо исследовать не только функциональные характеристики, но и оценить доходы или издержки, связанные с функционированием этих систем.

Стохастическая модель ВРП. Сетевой моделью образования и прогнозирования ВРП может служить открытая НМ-сеть, состоящая из 15 периферийных систем массового обслуживания (СМО) $S_1, S_2, \ldots, S_{15}$, которые соответствуют отраслевым отделам главного статистического управления области, и центральной системы S_{16}, которая соответствует ОСР и ВО. Заявками являются данные от организаций и предприятий различных секций, доходы от переходов заявок внутри сети – это ВДС и чистые налоги соответствующих отраслей. Для того чтобы найти ВРП области, нужно найти ожидаемый доход центральной СМО. Для этого можно применить методику, описанную в [2].

Пусть в сеть поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Интенсивность обслуживания заявок $\mu_i(k_i(t))$ в момент времени t в системе S_i зависит от числа заявок в этой системе $k_i(t)$, $i=\overline{1,n}$. Обозначим через m_i – число линий обслуживания в i-й СМО, p_{0j} – вероятность поступления заявки из внешней среды в систему S_j, $\sum_{j=1}^{n} p_{0j}=1$; p_{ij} – вероятность перехода заявки после обслуживания в системе S_i в систему S_j, $\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1,\ i=\overline{1,n}.$

Рассмотрим динамику изменения доходов некоторой системы S_i сети, $i=\overline{1,n}$. Пусть $V_i(t)$ – ее доход в момент времени t и $V_i(0)=v_{i0}$, $i=\overline{1,n}$. Доход этой СМО в момент времени $t+\Delta t$ можно представить в виде

$$V_i\ (t+\Delta t)=V_i(t)+\Delta V_i(t,\Delta t)\,, \tag{1}$$

где $\Delta V_i(t,\Delta t)$ – изменение дохода системы S_i на интервале времени $[t,t+\Delta t)$. Для нахождения этой величины выпишем условные вероятности событий, которые могут произойти за время Δt, а также связанные с ними изменения доходов периферийных систем S_i, $i=\overline{1,n-1}$, и центральной системы S_n:

1. С вероятностью $\lambda p_{0i}\Delta t+o(\Delta t)$ в систему S_i из внешней среды поступит заявка, которая принесет ей доход в размере $r_{0i}(1+0.01I(t+\Delta t))$, где r_{0i} – СВ с математическим ожиданием $M\{r_{0i}\}=a_{0i}$; ее экономический смысл заключается в том, что она равна сумме ВДС и чистых налогов i-й секции экономики в ценах сопоставимых к началу периода прогнозирования, а $I(t)$ – уровень инфляции на интервале времени $[0,t]$, $i=\overline{1,n-1}$.

2. С вероятностью $\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))\Delta t+o(\Delta t)$ заявка перейдет из системы S_i в систему S_n, при этом доход системы S_n возрастет на величину $r_{in}(1+0.01I(t+\Delta t))$, а доход системы S_i уменьшится на эту величину, где r_{in} – СВ с математическим ожиданием

$M\{r_{in}\}=a_{in}$, $i=\overline{1,n-1}$, $u(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ 1, x>0\end{cases}$ – функция Хэвисайда. Исходя из постановки задачи, следует, что $r_{0i}=r_{in}$.

3. С вероятностью $\mu_n(k_n(t))u(k_n(t))\Delta t+o(\Delta t)$ заявка из системы S_n перейдет во внешнюю среду, при этом доход системы S_n уменьшится на величину $R_{n0}(1+0.01I(t+\Delta t))$, где R_{n0} – СВ с математическим ожиданием $M\{R_{n0}\}=b_{n0}$ и R_{n0} равен ВРП области в ценах, сопоставимых к началу периода прогнозирования.

4. С вероятностью $1-(\lambda\rho_{0i}+\mu_i(k_i(t))u(k_i(t)))\Delta t+o(\Delta t)$ на отрезке времени $[t,t+\Delta t)$ изменение состояния системы S_i не произойдет, $i=\overline{1,n-1}$.

5. С вероятностью $1-\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))\Delta t+o(\Delta t)$ на отрезке времени $[t,t+\Delta t)$ изменение состояния центральной системы S_n не произойдет.

Кроме того, за каждый малый промежуток времени Δt система S_i может увеличить свой доход на величину $r_i\ I(t+\Delta t)\Delta t$, где r_i – СВ с математическим ожиданием $M\{r_i\}=c_i$, $i=\overline{1,n}$. Будем считать, что СВ r_{in}, r_{0i}, R_{n0} независимы по отношению к СВ r_i, $i=\overline{1,n}$.

Пусть $N_i(t)$ – среднее число заявок в *i*-й системе в начальный момент времени, $i=\overline{1,n}$.Тогда, используя методику, описанную в [2], для случая, когда сеть функционирует так, что в среднем в ней не наблюдается очередей, т.е. $\min(N_i(t),m_i)=N_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, получаем выражение для дохода центральной СМО

$$\frac{dv_n(t)}{dt}=(1+0.01I(t))\left(c_n+\sum_{i=1}^{n-1}\mu_iN_i(t)a_{in}-\mu_nN_n(t)b_{n0}\right), v_n(0)=v_{n0}, \quad (2)$$

где $N_i(t)$ находится с помощью выражений (3)

$$\begin{gathered}N_i(t)=\frac{\lambda p_{0i}}{\mu_i}+e^{-\mu_i t}\left(N_i(0)-\frac{\lambda p_{0i}}{\mu_i}\right), i=\overline{1,n-1}\\ N_n(t)=\sum_{i=1}^{n-1}\left\{\frac{\lambda p_{0i}}{\mu_i}+e^{-\mu_i t}\left(N_i(0)-\frac{\lambda p_{0i}}{\mu_i}\right)\right\}(1-e^{-\mu_n t})+N_n(0)e^{-\mu_n t}\end{gathered} \quad (3)$$

Далее реализуем австрийский подход к моделированию инфляции $I(t)$ из [3], адаптированный под экономику Республики Беларусь:

$$I(t)=-0{,}096\,CPI_t^{petrol}-0{,}144P_{imp\_t}+0{,}272NW_t+0.729ExD_t-5.142, \quad (4),$$

где P_{imp_t} – средние цены импорта, $CPI_t^{petrool}$ – индекс потребительских цен на бензин, NW_t – номинальная среднемесячная заработная плата.

Используя статистические данные по месяцам 2012 года, было найдено представление $I(t)$ в виде кусочно-постоянной функции. Подставив $I(t)$ и (3) в систему (2), можно найти выражение для ожидаемого дохода системы S_n, зависящее от времени. Это позволяет получить соотношение для ВРП в любой момент времени $t,[t\in 0,T]$.

Проведенные исследования показали, что относительная погрешность квартального ВРП, рассчитанного по представленной модели, не превышает 34%, а в среднем ВРП за год отклоняется от реального значения всего на 14%.

Список цитированных источников

1. Методика по формированию валового регионального продукта производственным методом в текущих и постоянных ценах: Постановление Национального статистического комитета Республики Беларусь № 277 от 27.12.2010.

2. Колузаева, Е.В. Исследование НМ-сетей со случайными доходами от переходов между их состояниями / Е.В. Колузаева, М.А. Маталыцкий // Известия Томского государственного университета. Сер. Информатика, вычислительная техника и управление. – 2009. – №5. – С.91–100.
3. Хацкевич, Г.А. Современные подходы к моделированию инфляционных процессов в экономике Беларуси / Г.А. Хацкевич, А.М. Картун // Банковский Вестник, 2008. – №4. – С.11-16.

УДК 517.8

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ И ТРАЕКТОРИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПРИ СВОБОДНОМ ЕЁ ПАДЕНИИ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

Желткович А.Е., Лазарук А.В., Лавринюк Е.Ю., Бышко А.Г.
Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Махнист Л.П., к.т.н., доцент

Задача «Определение величины отклонения при падении от вертикальной прямой материальной точки, находящейся в северном полушарии Земли, падающей с высоты 500 метров, когда точка находится на некоторой параллели» была сформулирована в [1]. Некоторые подходы к её решению сформулированы в работе [2]. Одним из условий при решении задачи являлось требование определить величину отклонения при падении в восточном направлении. При решении задачи принимается ряд допущений. Так же пренебрегают двумя проекциями относительной скорости на оси *y* и *x,* (см. рис. 1) и влиянием соответственно на относительное движение точки в этих направлениях углового вращения Земли.

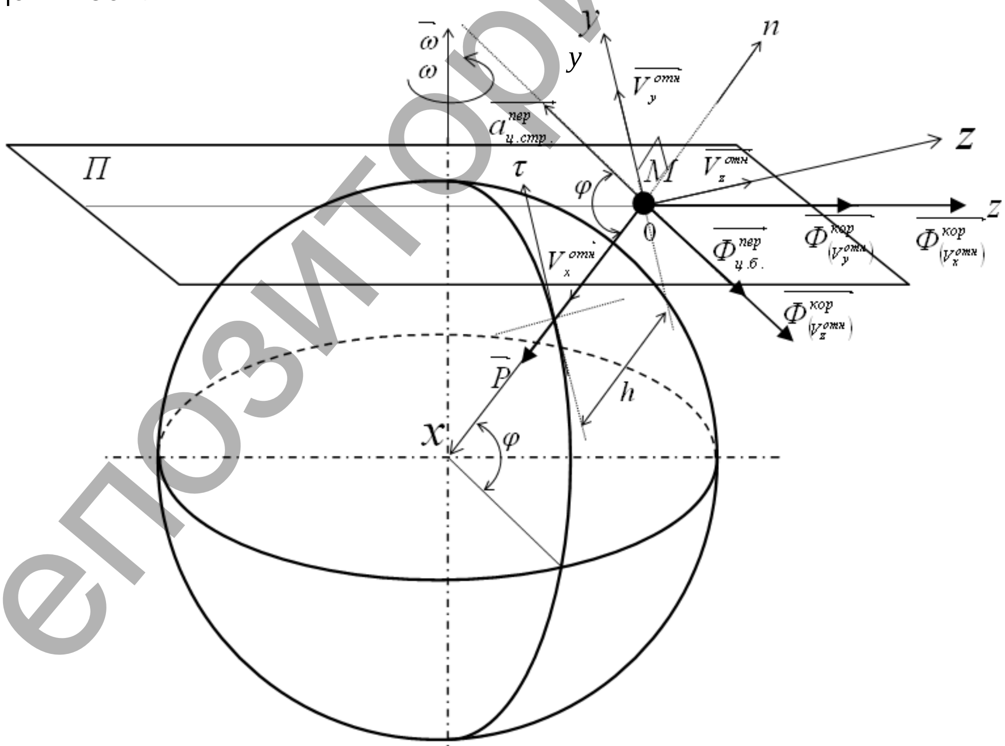

Рисунок 1 – Падение материальной точки M с высоты h

$$\begin{cases} ma_x = P - \Phi^{кор}_{\left(V_z^{отн}\right)} \cdot \cos(\varphi) - \Phi^{пер}_{ц.б.} \cdot \cos(\varphi) \\ ma_y = -\Phi^{кор}_{\left(V_z^{отн}\right)} \cdot \sin(\varphi) - \Phi^{пер}_{ц.б.} \cdot \sin(\varphi) \\ ma_z = \Phi^{кор}_{\left(V_x^{отн}\right)} + \Phi^{кор}_{\left(V_y^{отн}\right)} \end{cases} \qquad (1)$$