2. Колузаева, Е.В. Исследование НМ-сетей со случайными доходами от переходов между их состояниями / Е.В. Колузаева, М.А. Маталыцкий // Известия Томского государственного университета. Сер. Информатика, вычислительная техника и управление. – 2009. – №5. – С.91–100.
3. Хацкевич, Г.А. Современные подходы к моделированию инфляционных процессов в экономике Беларуси / Г.А. Хацкевич, А.М. Картун // Банковский Вестник, 2008. – №4. – С.11-16.

УДК 517.8

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ И ТРАЕКТОРИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПРИ СВОБОДНОМ ЕЁ ПАДЕНИИ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

Желткович А.Е., Лазарук А.В., Лавринюк Е.Ю., Бышко А.Г.
Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Махнист Л.П., к.т.н., доцент

Задача «Определение величины отклонения при падении от вертикальной прямой материальной точки, находящейся в северном полушарии Земли, падающей с высоты 500 метров, когда точка находится на некоторой параллели» была сформулирована в [1]. Некоторые подходы к её решению сформулированы в работе [2]. Одним из условий при решении задачи являлось требование определить величину отклонения при падении в восточном направлении. При решении задачи принимается ряд допущений. Так же пренебрегают двумя проекциями относительной скорости на оси *y* и *x,* (см. рис. 1) и влиянием соответственно на относительное движение точки в этих направлениях углового вращения Земли.

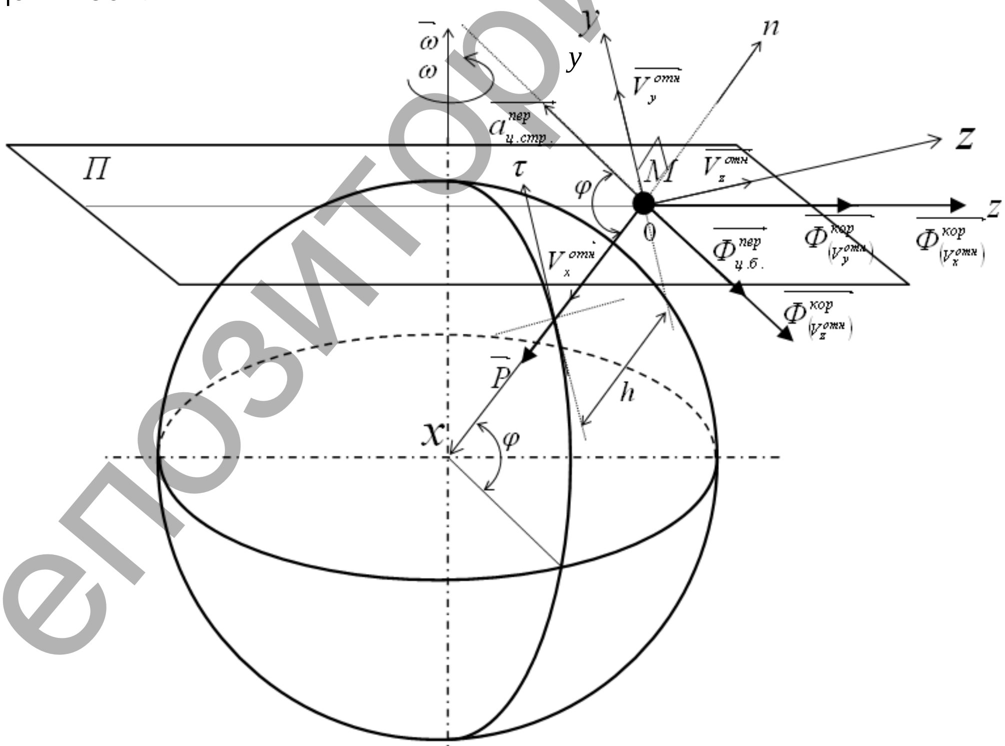

Рисунок 1 – Падение материальной точки М с высоты h

$$\begin{cases} ma_x = P - \Phi^{кор}_{\left(V_z^{отн}\right)} \cdot \cos(\varphi) - \Phi^{пер}_{ц.б.} \cdot \cos(\varphi) \\ ma_y = -\Phi^{кор}_{\left(V_z^{отн}\right)} \cdot \sin(\varphi) - \Phi^{пер}_{ц.б.} \cdot \sin(\varphi) \\ ma_z = \Phi^{кор}_{\left(V_x^{отн}\right)} + \Phi^{кор}_{\left(V_y^{отн}\right)} \end{cases} \qquad (1)$$

В данной работе рассматривается точное решение полученных дифференциальных уравнений, где: m – масса точки; g – ускорение свободного падения; φ – угол обозначающий данную параллель северного полушария; a_x, a_y, a_z – проекции относительных ускорений на оси координат *x, y, z*; $\Phi^{кор}_{(V_z^{отн})}$ – Кориолиса сила инерции от скорости $V_z^{отн}$ ($V_z^{отн}$ – проекция относительной скорости на ось *z*); $\Phi^{кор}_{(V_x^{отн})}$ – Кориолиса сила инерции от скорости $V_x^{отн}$ ($V_x^{отн}$ – проекция относительной скорости на ось *x*); $\Phi^{кор}_{(V_y^{отн})}$ – Кориолиса сила инерции от скорости $V_y^{отн}$ ($V_y^{отн}$ – проекция относительной скорости на ось *y*); $\Phi^{пер}_{ц.б.}$ – переносная центробежная сила; Π – плоскость параллельная экваториальной.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений вида (1):

$$\begin{cases} V_x' = \alpha_x V_z + \beta_x \\ V_y' = \alpha_y V_z + \beta_y \\ V_z' = \alpha_z V_x + \beta_z V_y \end{cases} \qquad (2)$$

с начальными условиями $V_x(0) = v_x^0$, $V_y(0) = v_y^0$, $V_z(0) = v_z^0$.

Продифференцируем по t третье уравнение системы: $V_z'' = \alpha_z V_x' + \beta_z V_y'$.

Учитывая первое и второе уравнения системы, получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$V_z'' = \alpha_z V_x' + \beta_z V_y' = \alpha_z(\alpha_x V_z + \beta_x) + \beta_z(\alpha_y V_z + \beta_y) = (\alpha_x\alpha_z + \alpha_y\beta_z)V_z + \alpha_z\beta_x + \beta_y\beta_z$$

или уравнение $V_z'' - (\alpha_x\alpha_z + \alpha_y\beta_z)V_z = \alpha_z\beta_x + \beta_y\beta_z$.

Введем обозначения: $p^2 = -(\alpha_x\alpha_z + \alpha_y\beta_z)$, так как $\alpha_x\alpha_z + \alpha_y\beta_z < 0$ и $q = \alpha_z\beta_x + \beta_y\beta_z$.

Тогда получим уравнение $V_z'' + p^2 V_z = q$. Найдем решение соответствующего однородного уравнения $V_z'' + p^2 V_z = 0$.

Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 + p^2 = 0$, получим $\lambda = \pm i\sqrt{p}$, где $p = \sqrt{-(\alpha_x\alpha_z + \alpha_y\beta_z)}$.

Тогда $V_z^0 = c_1\sin(pt) + c_2\cos(pt)$ – решение однородного уравнения второго порядка $V_z'' + p^2 V_z = 0$.

Частное решение дифференциального уравнения $V_z'' + p^2 V_z = q$ будем отыскивать в виде $V_z^1 = A$, так как корни характеристического уравнения $\lambda = \pm i\sqrt{p}$ отличны от 0.

Подставляя $V_z^1 = A$, $(V_z^1)'' = 0$ $((V_z^1)' = 0)$ в уравнение $V_z'' + p^2 V_z = q$, получим $p^2 A = q$.

Откуда $A = \frac{q}{p^2}$. Следовательно, $V_z^1 = \frac{q}{p^2}$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $V_z'' + p^2 V_z = q$. Поэтому $V_z = V_z^0 + V_z^1 = c_1\sin(pt) + c_2\cos(pt) + \frac{q}{p^2}$ – общее решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $V_z'' + p^2 V_z = q$.

Подставляя $V_z = c_1\sin(pt) + c_2\cos(pt) + \frac{q}{p^2}$, в первое и второе уравнения системы (2) получим, что

$V_x' = \alpha_x\left(c_1\sin(pt)+c_2\cos(pt)+\dfrac{q}{p^2}\right)+\beta_x$ и $V_y' = \alpha_y\left(c_1\sin(pt)+c_2\cos(pt)+\dfrac{q}{p^2}\right)+\beta_y$.

Проинтегрировав эти уравнения, получим, что

$$V_x = -\frac{\alpha_x c_1}{p}\cos(pt)+\frac{\alpha_x c_2}{p}\sin(pt)+\left(\alpha_x\frac{q}{p^2}+\beta_x\right)t+c_3 \text{ и}$$

$$V_y = -\frac{\alpha_y c_1}{p}\cos(pt)+\frac{\alpha_y c_2}{p}\sin(pt)+\left(\alpha_y\frac{q}{p^2}+\beta_y\right)t+c_4.$$

Учитывая третье уравнение системы, получим, что

$$V_z' = \alpha_z V_x+\beta_z V_y = \alpha_z\left(-\frac{\alpha_x c_1}{p}\cos(pt)+\frac{\alpha_x c_2}{p}\sin(pt)+\left(\alpha_x\frac{q}{p^2}+\beta_x\right)t+c_3\right)+$$

$$+\beta_z\left(-\frac{\alpha_y c_1}{p}\cos(pt)+\frac{\alpha_y c_2}{p}\sin(pt)+\left(\alpha_y\frac{q}{p^2}+\beta_y\right)t+c_4\right)=$$

$$=-\left(\alpha_x\alpha_z+\alpha_y\beta_z\right)\cdot\frac{c_1}{p}\cos(pt)+\left(\alpha_x\alpha_z+\alpha_y\beta_z\right)\cdot\frac{c_2}{p}\sin(pt)+$$

$$+\left(\left(\alpha_x\alpha_z+\alpha_y\beta_z\right)\frac{q}{p^2}+\alpha_z\beta_x+\beta_y\beta_z\right)t+\alpha_z c_3+\beta_z c_4.$$

Так как $p^2=-\left(\alpha_x\alpha_z+\alpha_y\beta_z\right)$ и $q=\alpha_z\beta_x+\beta_y\beta_z$, получим

$$V_z' = p^2\cdot\frac{c_1}{p}\cos(pt)-p^2\cdot\frac{c_2}{p}\sin(pt)+\left(-p^2\cdot\frac{q}{p^2}+q\right)t+\alpha_z c_3+\beta_z c_4=$$

$$=c_1 p\cos(pt)-c_2 p\sin(pt)+\alpha_z c_3+\beta_z c_4.$$

С другой стороны $V_z' = c_1 p\cos(pt)-c_2 p\sin(pt)$, так как $V_z = c_1\sin(pt)+c_2\cos(pt)+\dfrac{q}{p^2}$.

Тогда выполняется условие $\alpha_z c_3+\beta_z c_4=0$. Откуда $c_4=-\dfrac{\alpha_z}{\beta_z}c_3$, учитывая, что $\beta_z\neq 0$.

Следовательно,

$$\begin{cases} V_x = -\dfrac{\alpha_x c_1}{p}\cos(pt)+\dfrac{\alpha_x c_2}{p}\sin(pt)+\left(\alpha_x\dfrac{q}{p^2}+\beta_x\right)t+c_3 \\ V_y = -\dfrac{\alpha_y c_1}{p}\cos(pt)+\dfrac{\alpha_y c_2}{p}\sin(pt)+\left(\alpha_y\dfrac{q}{p^2}+\beta_y\right)t-\dfrac{\alpha_z}{\beta_z}c_3 \\ V_z = c_1\sin(pt)+c_2\cos(pt)+\dfrac{q}{p^2} \end{cases}$$ – общее решение системы линейных дифференциальных уравнений (2).

Учитывая начальные условия $V_x(0)=v_x^0$, $V_y(0)=v_y^0$, $V_z(0)=v_z^0$, получим

$$V_x(0)=-\frac{\alpha_x c_1}{p}+c_3=v_x^0;\ V_y(0)=-\frac{\alpha_y c_1}{p}-\frac{\alpha_z}{\beta_z}c_3=v_y^0;\ V_z(0)=c_2+\frac{q}{p^2}=v_z^0.$$

Откуда $c_2=v_z^0-\dfrac{q}{p^2}$. Тогда $\begin{cases} -\dfrac{\alpha_x c_1}{p}+c_3=v_x^0 \\ -\dfrac{\alpha_y c_1}{p}-\dfrac{\alpha_z}{\beta_z}c_3=v_y^0 \end{cases}$.

Откуда $c_1=\dfrac{\alpha_z v_x^0+\beta_z v_y^0}{p}$, $c_1=\dfrac{\alpha_z v_x^0+\beta_z v_y^0}{p}$, $c_3=-\beta_z\cdot\dfrac{\alpha_y v_x^0-\alpha_x v_y^0}{p^2}$.

Следовательно,

$$\begin{cases} V_x=-\dfrac{\alpha_x\left(\alpha_z v_x^0+\beta_z v_y^0\right)}{p^2}\cos(pt)+\dfrac{\alpha_x}{p}\cdot\left(v_z^0-\dfrac{q}{p^2}\right)\sin(pt)+\left(\alpha_x\dfrac{q}{p^2}+\beta_x\right)t-\dfrac{\beta_z\left(\alpha_y v_x^0-\alpha_x v_y^0\right)}{p^2} \\ V_y=-\dfrac{\alpha_y\left(\alpha_z v_x^0+\beta_z v_y^0\right)}{p^2}\cos(pt)+\dfrac{\alpha_y}{p}\cdot\left(v_z^0-\dfrac{q}{p^2}\right)\sin(pt)+\left(\alpha_y\dfrac{q}{p^2}+\beta_y\right)t+\dfrac{\alpha_z\left(\alpha_y v_x^0-\alpha_x v_y^0\right)}{p^2} \\ V_z=\dfrac{\alpha_z v_x^0+\beta_z v_y^0}{p}\sin(pt)+\left(v_z^0-\dfrac{q}{p^2}\right)\cos(pt)+\dfrac{q}{p^2} \end{cases} \qquad (3)$$

– решение системы линейных дифференциальных уравнений (2) с начальными условиями $V_x(0)=v_x^0$, $V_y(0)=v_y^0$, $V_z(0)=v_z^0$, где $p=\sqrt{-\left(\alpha_x\alpha_z+\alpha_y\beta_z\right)}$ и $q=\alpha_z\beta_x+\beta_y\beta_z$.

В частном случае, если $V_x(0)=0$, $V_y(0)=0$, $V_z(0)=0$, получаем решение

$$\begin{cases} V_x=-\dfrac{\alpha_x q}{p^3}\sin(pt)+\left(\alpha_x\dfrac{q}{p^2}+\beta_x\right)t \\ V_y=-\dfrac{\alpha_y q}{p^3}\sin(pt)+\left(\alpha_y\dfrac{q}{p^2}+\beta_y\right)t. \\ V_z=-\dfrac{q}{p^2}\cos(pt)+\dfrac{q}{p^2} \end{cases} \qquad (4)$$

Интегрируя уравнения системы, получим

$$\begin{cases} x(t)=\int V_x(t)\,dt=\dfrac{\alpha_x q}{p^4}\cos(pt)+\dfrac{\beta_z\left(\alpha_x\beta_y-\alpha_y\beta_x\right)}{2p^2}t^2+C_x \\ y(t)=\int V_y(t)\,dt=\dfrac{\alpha_y q}{p^4}\cos(pt)-\dfrac{\alpha_z\left(\alpha_x\beta_y-\alpha_y\beta_x\right)}{2p^2}t^2+C_y \\ z(t)=\int V_z(t)\,dt=-\dfrac{q}{p^3}\sin(pt)+\dfrac{q}{p^2}t+C_z \end{cases} \qquad (5)$$

Учитывая начальные условия $x(0)=0$, $y(0)=0$, $z(0)=0$, получим

$$c_y=-\frac{\alpha_y q}{p^4},\ c_x=-\frac{\alpha_x q}{p^4},\ c_z=0$$

Т.о., окончательно перемещения материальной точки запишутся следующим образом:

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{\alpha_x q}{p^4}\cos(pt)+\dfrac{\beta_z\left(\alpha_x\beta_y-\alpha_y\beta_x\right)}{2p^2}t^2-\dfrac{\alpha_x q}{p^4} \\ y(t)=\dfrac{\alpha_y q}{p^4}\cos(pt)-\dfrac{\alpha_z\left(\alpha_x\beta_y-\alpha_y\beta_x\right)}{2p^2}t^2-\dfrac{\alpha_y q}{p^4} \\ z(t)=-\dfrac{q}{p^3}\sin(pt)+\dfrac{q}{p^2}t \end{cases} \qquad (6)$$

Заключение

Область применения данного решения может быть распространена на решение прикладных задач, связанных с расчётом точной скорости, траектории и места падения сводимых с орбиты космических объектов, отработавших свой срок (спутники различного назначения, мусор, оставшийся от пилотируемых станций, ступени разгонных блоков ракет), представляющих в настоящий момент серьёзную проблему для орбитальной навигации не только существующих автоматических спутников, международной космической станции, но и других планируемых и осуществляемых миссий.

Список цитированных источников

1. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учебное пособие. 49-е изд., стер. / Под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – СПб.: Издательство «Лань», 2008. – 448 с.: ил. – (Учебник для вузов. Специальная литература).

2. Теоретическая механика. Динамика. Практикум: учеб. пособие: в 2 ч. / В.А. Акимов [и др.]; под общ. ред. проф. А.В. Чигарёва и доц. Н.И. Горбача. – Минск: Новое знание; М.: ЦУПЛ, 2010. – Ч. 1.: Динамика материальной точки. – 528 с.: ил.

УДК 517.9

О ПРИБЛИЖЕНИИ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В АЛГЕБРЕ НОВЫХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Жук А.И.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Рассмотрим следующую задачу Коши на отрезке $T = [0;a] \subset R$:

$$\dot{x}^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f^{ij}(t, x(t))\dot{L}^j(t),\ \ i = \overline{1,p} \tag{1}$$

$$x(0) = x_0\,, \tag{2}$$

где f^{ij} $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ – липшицевы функции, $x(t) = [x^1(t), x^2(t), ..., x^p(t)]$, $x_0 \in R^p$, а $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$ – функции ограниченной вариации на отрезке *T*. Без ограничения общности будем считать, что функции $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$ непрерывны справа, $L^j(0) = L^j(0-) = 0$ и $L^j(a-) = L^j(a)$, $j = \overline{1,q}$.

Таким образом, правая часть рассматриваемой системы содержит произведение обобщенных функций, которое однозначно не определено, и решение системы уравнений (1) зависит от подхода к трактовке этой системы. Основные подходы для исследования таких уравнений можно охарактеризовать следующим образом: переход к интегральному уравнению, где интеграл понимается в определенном смысле, аппроксимации исходного уравнения дифференциальными уравнениями с гладкими коэффициентами, формализация данной задачи в рамках теории обобщенных функций.

В работе [3] показано, что все указанные выше подходы можно охватить одним, связанным с вложением данной задачи в алгебру новых обобщенных функций и дальнейшим исследованием решений на ассоциированном уровне в этой алгебре. Отметим, что одномерный случай рассматривался в работе [2].

Напомним определение алгебры мнемофункций [3]. Пусть R – вещественная прямая. На множестве всех последовательностей из элементов R введем отношение эквивалентности следующим образом: $(x_n) \sim (y_n)$, если $\exists n_0 \in N$, $\forall n \geq n_0$, $x_n = y_n$, тогда