Заключение

Область применения данного решения может быть распространена на решение прикладных задач, связанных с расчётом точной скорости, траектории и места падения сводимых с орбиты космических объектов, отработавших свой срок (спутники различного назначения, мусор, оставшийся от пилотируемых станций, ступени разгонных блоков ракет), представляющих в настоящий момент серьёзную проблему для орбитальной навигации не только существующих автоматических спутников, международной космической станции, но и других планируемых и осуществляемых миссий.

Список цитированных источников

1. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учебное пособие. 49-е изд., стер. / Под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – СПб.: Издательство «Лань», 2008. – 448 с.: ил. – (Учебник для вузов. Специальная литература).
2. Теоретическая механика. Динамика. Практикум: учеб. пособие: в 2 ч. / В.А. Акимов [и др.]; под общ. ред. проф. А.В. Чигарёва и доц. Н.И. Горбача. – Минск: Новое знание; М.: ЦУПЛ, 2010. – Ч. 1.: Динамика материальной точки. – 528 с.: ил.

УДК 517.9

О ПРИБЛИЖЕНИИ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В АЛГЕБРЕ НОВЫХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Жук А.И.
Брестский государственный технический университет, г. Брест

Рассмотрим следующую задачу Коши на отрезке $T=[0;a]\subset R$:

$$\dot{x}^i(t)=\sum_{j=1}^{q} f^{ij}(t,x(t))\dot{L}^j(t),\ \ i=\overline{1,p} \tag{1}$$

$$x(0)=x_0, \tag{2}$$

где f^{ij} $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$ – липшицевы функции, $x(t)=[x^1(t),x^2(t),...,x^p(t)]$, $x_0\in R^p$, а $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$ – функции ограниченной вариации на отрезке *T*. Без ограничения общности будем считать, что функции $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$ непрерывны справа, $L^j(0)=L^j(0-)=0$ и $L^j(a-)=L^j(a)$, $j=\overline{1,q}$.

Таким образом, правая часть рассматриваемой системы содержит произведение обобщенных функций, которое однозначно не определено, и решение системы уравнений (1) зависит от подхода к трактовке этой системы. Основные подходы для исследования таких уравнений можно охарактеризовать следующим образом: переход к интегральному уравнению, где интеграл понимается в определенном смысле, аппроксимации исходного уравнения дифференциальными уравнениями с гладкими коэффициентами, формализация данной задачи в рамках теории обобщенных функций.

В работе [3] показано, что все указанные выше подходы можно охватить одним, связанным с вложением данной задачи в алгебру новых обобщенных функций и дальнейшим исследованием решений на ассоциированном уровне в этой алгебре. Отметим, что одномерный случай рассматривался в работе [2].

Напомним определение алгебры мнемофункций [3]. Пусть R – вещественная прямая. На множестве всех последовательностей из элементов R введем отношение эквивалентности следующим образом: $(x_n)\sim(y_n)$, если $\exists n_0\in N$, $\forall n\geq n_0$, $x_n=y_n$, тогда обобщенным числом назовем класс эквивалентности $\tilde{x}=[(x_n)]$. Множество обобщенных чисел обозначим $\tilde{R}$. Аналогично можно построить расширение $\tilde{T}$ отрезка $T=[0;a]$. Выделим в $\tilde{R}$ следующие подмножества:

$$H=\{\tilde{h}\in\tilde{R}:\tilde{h}=[(h_n)],h_n>0,\forall n\in N,\lim_{n\to\infty}h_n=0\},$$

$$I=\{\tilde{h}\in H:1/n=o(h_n),h_n\to 0,\forall(h_n)\in\tilde{h}\},$$

$$S=\{\tilde{h}\in H:h_n=o(1/n),n\to\infty,\forall(h_n)\in\tilde{h}\}.$$

На множество всех последовательностей $\{f_n\}$ таких, что $f_n\in C^\infty(R)$, введем отношение эквивалентности: $(f_n)\sim(g_n)$, если $\exists n_1\in N$, $\forall n\ge n_1$, $\forall x\in R$, $f_n(x)=g_n(x)$. Класс эквивалентности $[(f_n)]$ будем называть мнемофункцией [3] и обозначать $\tilde{f}$. Обозначим через $G(R)$ множество всех мнемофункций, которое является алгеброй с покоординатными операциями умножения и сложения. Алгебру мнемофункций вида $\tilde{f}(\tilde{x})=[(f_n(x_n))]$, где $\tilde{x}=[(x_n)]\in\tilde{R}$, а $[f_n(x)]\in G(R)$, $\forall x\in R$, обозначим как $G(\tilde{R})$. Определим на $G(\tilde{T})$ обобщенный дифференциал

$$d_{\tilde{h}}\tilde{f}(\tilde{x})=[(f_n(x+h_n)-f_n(x))],\ \tilde{x}=[(x)]\in\tilde{T},\ \tilde{h}\in H.$$

Обобщенный дифференциал $d_{\tilde{h}}$ назовем $I-$обобщенным ($S-$обобщенным) дифференциалом и будем обозначать $d_{\tilde{h}}^I$ ($d_{\tilde{h}}^S$), если $\tilde{h}\in I$ ($\tilde{h}\in S$).

Будем говорить, что мнемофункция $\tilde{f}=[(f_n)]$ ассоциирует элемент f из топологического пространства Ω, если последовательность $\{f_n\}$ при $n\to\infty$ сходится к f в топологии Ω.

Заменяя обычные функции, присутствующие в (1), на соответствующие им новые обобщенные функции получим запись уравнения в дифференциалах в алгебре мнемофункций.

$$d_{\tilde{h}}\tilde{x}^i(\tilde{t})=\sum_{j=1}^{q}\tilde{f}^{ij}(\tilde{t},\tilde{x}(\tilde{t}))d_{\tilde{h}}\tilde{L}^j(\tilde{t}),\ i=\overline{1,p} \tag{3}$$

с начальным условием $\tilde{x}|_{[0,\tilde{h}]}=\tilde{x}^0$, где $\tilde{h}=[\{h_n\}]\in H$, $\tilde{a}=[\{a\}]\in T$ и $\tilde{t}=[\{t_n\}]\in\tilde{T}$, $\tilde{x}=[\{x_n(t)\}]$, $\tilde{f}=[\{f_n(x)\}]$, $\tilde{x}^0=[\{x_n^0(t)\}]$, $\tilde{L}=[\{L_n(t)\}]$ и $x_n^0\to x(0)$.

Наряду с задачей (3) с начальным условием $\tilde{x}|_{[0,\tilde{h}]}=\tilde{x}^0$ рассмотрим системы уравнений с $I-$ и $S-$ обобщенными дифференциалами.

$$d_{\tilde{h}}^I\tilde{x}^i(\tilde{t})=\sum_{j=1}^{q}\tilde{f}^{ij}(\tilde{t},\tilde{x}(\tilde{t}))d_{\tilde{h}}\tilde{L}^j(\tilde{t}) \tag{4}$$

$$d_{\tilde{h}}^S\tilde{x}^i(\tilde{t})=\sum_{j=1}^{q}\tilde{f}^{ij}(\tilde{t},\tilde{x}(\tilde{t}))d_{\tilde{h}}\tilde{L}^j(\tilde{t}) \tag{5}$$

Будем говорить, что функция x является $I-$ассоциированным ($S-$ ассоциированным) решением уравнения (3), если данная функция является ассоциированным решением задачи (4) ((5)).

Таким образом, под решением системы дифференциальных уравнений (1) будем понимать ассоциированное решение системы уравнений в дифференциалах (3), существование и единственность решения которой доказано в [1]. Везде далее будем полагать, что необременительные условия этой теоремы выполнены.

Если заменить в (3) каждую новую обобщенную функцию представителем класса ее определяющего, получим запись задачи (3) на уровне представителей

$$x_n^i(t+h_n)-x_n^i(t)=\sum_{j=1}^{q}f_n^{ij}(t,x_n(t))[L_n^j(t+h_n)-L_n^j(t)],\ i=\overline{1,p} \tag{6}$$

$$x_n(t)\big|_{[0,h_n)} = x_{n0}(t), \tag{7}$$

Здесь $L_n^j(t) = (L^j * \rho_n)(t) = \int_0^{\frac{1}{n}} L^j(t+s)\rho_n(s)ds, \quad j=\overline{1,q}$, где $\rho_n(t) = n\rho(nt), \quad \rho \geq 0,$

$su\rho\rho(\rho) \subseteq [0,1], \quad \int_0^1 \rho(s)ds = 1,$ а $f_n = f * \widetilde{\rho}_n,$ где $\widetilde{\rho}_n(x_0, x_1, ..., x_p) = n^p \widetilde{\rho}(nx_0, nx_1, ..., nx_p),$

$\widetilde{\rho} \in C^\infty(R^{p+1}), \ \widetilde{\rho} \geq 0, \ \int_{[0,1]^{p+1}} \widetilde{\rho}(x_0, x_1, ..., x_p)dx_0 dx_1 ... dx_p = 1, \ su\rho\rho(\widetilde{\rho}) \subset [0,1]^{p+1}.$

Пусть t – произвольная фиксированная точка из отрезка T. Тогда t можно представить в виде $t = \tau_t + m_t h_n$, где $\tau_t \in [0, h_n), \ m_t \in N$. Несложно видеть, что решение системы (4) – (5) можно записать в виде

$$x_n^i(t) = x_{n0}^i(\tau_t) + \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{ij}(\tau_t + kh_n, x_n(\tau_t + kh_n))[L_n^j(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^j(\tau_t + kh_n)],$$

где $i = \overline{1,p}$.

Случай Ито. Для описания предельного поведения задачи (6) – (7) рассмотрим систему уравнений

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q}\int_0^{t+} f^{ij}(s, x(s-))dL^j(s), \ i = \overline{1,p} \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть* f^{ij} $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ *удовлетворяют условию Липшица и ограничены.* $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$ *– непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда* I *– ассоциированное решение задачи Коши (3) является решением системы уравнений (8), если для любого* $t \in T$ *выполняется* $|x_{n0}(\tau_t) - x_0| \to 0.$

В случае Стратоновича для описания предельного поведения задачи (6) – (7) рассмотрим систему уравнений

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q}\int_0^{t} f^{ij}(s, x(s))dL^{jc}(s) + \sum_{\mu_r \leq t} S^i(\mu_r, x(\mu_r -), \Delta L(\mu_r)), \ i = \overline{1,p}, \tag{9}$$

где $L^{jc}(t)$ – непрерывная, а $L^{jd}(t)$ – разрывная составляющие функции $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$, μ_r – точки разрыва функции $L(t)$, $\Delta L(\mu_r) = L^d(\mu_r +) - L^d(\mu_r -)$ – величина скачка. $S^i(\mu, x, u) = \varphi^i(1, \mu, x, u) - \varphi^i(0, \mu, x, u)$, где $x \in R^p$, $u \in R^q$, $\mu \in T$, а $\varphi^i(t, \mu, x, u)$ находится из уравнения $\varphi^i(t, \mu, x, u) = x^i + \sum_{j=1}^{q} u^j \int_0^t f^{ij}(\mu, \varphi(s, \mu, x, u))ds, \ i = \overline{1,p}$.

Теорема 2. *Пусть* f^{ij} $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ *удовлетворяют условию Липшица и ограничены.* $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$ *– непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда* S *– ассоциированное решение задачи Коши (3) является решением системы уравнений (9), если для любого* $t \in T$ *выполняется* $|x_{n0}(\tau_t) - x_0| \to 0.$

Список цитированных источников

1. Каримова, Т.И. Об ассоциированных решениях нестационарных систем уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов / Т.И. Каримова, О.Л. Яблонский // Вест. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2009. – №2. – С. 81 – 86.

2. Ковальчук, А.Н. Об аппроксимации дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами конечно-разностными уравнениями с осреднением / А.Н. Ковальчук, В.Г. Новохрост, О.Л. Яблонский // Известия вузов. Математика. – 2005. – №3. – С. 23–31.

3. Лазакович, Н.В. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов / Н.В. Лазакович // Доклады НАН Беларуси. – 1994. – Т. 38, №5. – С. 23–27.