УДК 512.643.4

ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ИЗ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Каштелян А.Н., Юхимук Т.Ю.
Брестский государственный технический университет, г. Брест

Рассмотрим уравнение $X^2 = A$, где $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ – заданная, $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ – неизвестная матрица с действительными коэффициентами. Очевидно, уравнение может иметь решение лишь в том случае, если $\det A \ge 0$. В противном случае $(\det X)^2 = \det A < 0$, что невозможно при действительных коэффициентах матрицы X. Рассмотрим сначала частный случай: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$, где $a_{11}a_{22} > 0$. Равенство $X^2 = A$ приводит к системе $\begin{cases} x_{11}^2 + x_{12}x_{21} = a_{11}; \\ x_{12}(x_{11} + x_{22}) = 0; \\ x_{21}(x_{11} + x_{22}) = 0; \\ x_{12}x_{21} + x_{22}^2 = a_{22}. \end{cases}$ Если $x_{12} = 0$, то из 1-го и 4-го уравнений следует, что $x_{11}^2 = a_{11}$, $x_{22}^2 = a_{22}$, т.е. необходимым условием существования решения является требование $a_{11} > 0, a_{22} > 0$. При этом $x_{21} = 0$ и решения уравнения $X^2 = A$ принимают вид: $\begin{bmatrix} \pm\sqrt{a_{11}} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{a_{22}} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \pm\sqrt{a_{11}} & 0 \\ 0 & \mp\sqrt{a_{22}} \end{bmatrix}$. Если же $x_{12} \ne 0$, то $x_{11} + x_{22} = 0$ и система остаётся совместной лишь при $a_{11} = a_{22}$. Если $a_{11} = a_{22} < 0$, то уравнение имеет бесконечное множество решений вида $\begin{bmatrix} t & u \\ \dfrac{a_{11} - t^2}{u} & -t \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} v & \dfrac{a_{11} - v^2}{w} \\ w & -v \end{bmatrix}$, где t, u, v, w – произвольные параметры ($u \ne 0, w \ne 0$). Если же $a_{11} = a_{22} > 0$, то к этим решениям добавляются четыре перечисленные выше решения. Легко проверить, что форма решений сохранится и в случае, когда один из коэффициентов a_{11}, a_{22} либо оба равны нулю, что соответствует случаю $\det A = 0$.

Пусть теперь $A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, где $a_{12} \ne 0$. Тогда система для определения коэффициентов матрицы X примет вид: $\begin{cases} x_{11}^2 + x_{12}x_{21} = 0; \\ x_{12}(x_{11} + x_{22}) = a_{12}; \\ x_{21}(x_{11} + x_{22}) = 0; \\ x_{12}x_{21} + x_{22}^2 = 0. \end{cases}$ Т.к. $a_{12} \ne 0$, то из 3-го уравнения следует, что $x_{21} = 0$, откуда $x_{11} = x_{22} = 0$ и $x_{11} + x_{22} = 0$. Это противоречит 2-му уравнению системы, поэтому уравнение $X^2 = A$ для этого случая не имеет решений. Аналогичный результат имеет место и для матриц вида $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$, где $a_{21} \neq 0$.

Пусть теперь $A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$, где $a_{12}a_{21} < 0$. Из 1-го и 4-го уравнений системы $\begin{cases} x_{11}^2 + x_{12}x_{21} = 0; \\ x_{12}(x_{11} + x_{22}) = a_{12}; \\ x_{21}(x_{11} + x_{22}) = a_{21}; \\ x_{12}x_{21} + x_{22}^2 = 0 \end{cases}$ следует, что $x_{12}x_{21} \leq 0$ и $|x_{11}| = |x_{22}|$, а из 2-го и 3-го – что $x_{12} \neq 0, x_{21} \neq 0$ и $x_{11} + x_{22} \neq 0$. Поэтому $x_{11} = x_{22}$, $x_{12} = \dfrac{a_{12}}{2x_{11}}$, $x_{21} = \dfrac{a_{21}}{2x_{11}}$, откуда $x_{11}^2 = -\dfrac{a_{12}a_{21}}{4x_{11}^2}$. Получаем два решения уравнения: $\begin{bmatrix} \pm\sqrt[4]{\dfrac{-a_{12}a_{21}}{4}} & \pm\dfrac{a_{12}}{\sqrt[4]{-4a_{12}a_{21}}} \\ \pm\dfrac{a_{21}}{\sqrt[4]{-4a_{12}a_{21}}} & \pm\sqrt[4]{\dfrac{-a_{12}a_{21}}{4}} \end{bmatrix}$.

Рассмотрим теперь случай $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$, где $a_{12} \neq 0$ и $a_{11}^2 + a_{22}^2 \neq 0$. Из системы $\begin{cases} x_{11}^2 + x_{12}x_{21} = a_{11}; \\ x_{12}(x_{11} + x_{22}) = a_{12}; \\ x_{21}(x_{11} + x_{22}) = 0; \\ x_{12}x_{21} + x_{22}^2 = a_{22} \end{cases}$ получаем $a_{21} = 0$, откуда необходимым условием разрешимости является условие $a_{11} \geq 0$, $a_{22} \geq 0$. При этом решениями уравнения $X^2 = A$ являются $\begin{bmatrix} \pm\sqrt{a_{11}} & \dfrac{a_{12}}{\pm\sqrt{a_{11}} \pm \sqrt{a_{22}}} \\ 0 & \pm\sqrt{a_{22}} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \pm\sqrt{a_{11}} & \dfrac{a_{12}}{\pm\sqrt{a_{11}} \mp \sqrt{a_{22}}} \\ 0 & \mp\sqrt{a_{22}} \end{bmatrix}$. Аналогично для $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, где $a_{21} \neq 0$, решениями являются $\begin{bmatrix} \pm\sqrt{a_{11}} & 0 \\ \dfrac{a_{21}}{\pm\sqrt{a_{11}} \pm \sqrt{a_{22}}} & \pm\sqrt{a_{22}} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \pm\sqrt{a_{11}} & 0 \\ \dfrac{a_{21}}{\pm\sqrt{a_{11}} \mp \sqrt{a_{22}}} & \mp\sqrt{a_{22}} \end{bmatrix}$.

Покажем, что решение уравнения $X^2 = A$ в общем случае имеет вид

$$X = \begin{bmatrix} \pm\dfrac{a_{11} \pm \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}{\sqrt{a_{11} + a_{22} \pm 2\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}} & \pm\dfrac{a_{12}}{\sqrt{a_{11} + a_{22} \pm 2\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}} \\ \pm\dfrac{a_{21}}{\sqrt{a_{11} + a_{22} \pm 2\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}} & \pm\dfrac{a_{22} \pm \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}{\sqrt{a_{11} + a_{22} \pm 2\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}} \end{bmatrix},$$

где знак дроби и знак перед радикалом могут быть выбраны независимо друг от друга:

$$X^2 = \frac{1}{a_{11}+a_{22}\pm 2\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}}\begin{bmatrix} a_{11}\pm\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\pm\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} a_{11}\pm\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\pm\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{11}+a_{22}\pm 2\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} a_{11}^2\pm 2a_{11}\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}+a_{11}a_{22} & a_{11}a_{12}\pm 2a_{12}\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}+a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11}\pm 2a_{21}\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}+a_{21}a_{22} & a_{22}^2\pm 2a_{22}\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}+a_{11}a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a_{11}+a_{22}\pm 2\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} a_{11}\left(a_{11}\pm 2\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}+a_{22}\right) & a_{12}\left(a_{11}\pm 2\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}+a_{22}\right) \\ a_{21}\left(a_{11}\pm 2\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}+a_{22}\right) & a_{22}\left(a_{11}\pm 2\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}+a_{22}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, данные формулы неприменимы в случае $\begin{cases} a_{11}+a_{22}=0; \\ a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0. \end{cases}$

Пусть $\begin{cases} a_{22}=-a_{11}\neq 0; \\ a_{11}^2+a_{12}a_{21}=0. \end{cases}$ Тогда система для определения элементов матрицы X запишется в виде: $\begin{cases} x_{11}^2+x_{11}x_{22}=a_{11}; \\ x_{12}\left(x_{11}+x_{22}\right)=a_{12}; \\ x_{21}\left(x_{11}+x_{22}\right)=a_{21}; \\ x_{11}x_{22}+x_{22}^2=-a_{11}, \end{cases}$ откуда $\left(x_{11}+x_{22}\right)^2=0$,что противоречит 2-му и 3-му уравнениям системы. Значит, в этом случае уравнение $X^2=A$ не имеет решений.

Список цитированных источников

1. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
2. Беллман, Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – М.: Наука, 1969. – 376 с.

УДК 621.923

РАСЧЕТ ЭКВИДИСТАНТНОГО ПРОФИЛЯ ПОЛЮСНЫХ НАКОНЕЧНИКОВ ДЛЯ МАГНИТНО-АБРАЗИВНОЙ ОБРАБОТКИ ЛОПАТОК ГАЗОТУРБИННОГО ДВИГАТЕЛЯ

Кравченко С.И.
Белорусский государственный аграрный технический университет, г. Минск
Научные руководители: Сергеев Л.Е., к.т.н., доцент; Сенчуров Е.В.

Многие задачи теории формообразования сложнопрофильных поверхностей при их финишной обработке могут быть получены с помощью уравнений дифференциальной геометрии. Одним из финишных методов, где необходимо решать подобные задачи, является магнитно-абразивная обработка (МАО), при которой поверхность инструмента материализуется использованием электромагнитного поля (ЭМП), однако ее рассмотре-