УДК 532.546:536.421

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДАХ

Мокроусова Е.А.
Башкирский государственный университет, г. Стерлитамак (Россия)
Научный руководитель: Хасанов М.К., к.ф.-м.н, доцент

При построении математической модели многих процессов математическая постановка задачи может быть сведена к начально-краевой задаче для системы дифференциальных уравнений в частных производных. Решения данных задач и методы их получения можно разделить на два основных класса: численные и аналитические. Во многих случаях принципиальный интерес представляет получение аналитического решения, т.к. данное решение является удобным инструментом для анализа математической модели изучаемого процесса. Одним из методов получения аналитического решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных является введение автомодельной переменной, т.е. некоторого единого комплекса, включающего себя несколько переменных. Рассмотрим данный метод на примере задачи о фазовых переходах газогидрат-вода в пористой среде.

Пусть полубесконечный пористый пласт в начальный момент времени насыщен газом и газогидратом, давление и температура которых в исходном состоянии соответствуют термодинамическим условиям стабильного существования гидрата. Положим, что через границу пласта производится отбор газа, в результате чего от границы в глубь пласта начинает распространяться фронтальная поверхность диссоциации гидрата, разделяющая пласт на две области. В первой области, находящейся вблизи границы пласта, гидрат разложился на газ и воду, а во второй области поры заполнены газом и гидратом. Таким образом, согласно данной модели, полагается, что разложение газогидрата полностью происходит на фронтальной границе между этими двумя зонами.

Система основных уравнений, представляющая собой законы сохранения масс, энергии, закон Дарси и уравнение состояния газа, при допущениях о несжимаемости и неподвижности скелета пористой среды, гидрата и воды, в прямолинейно-параллельном случае имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_g m S_g\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_g m S_g \upsilon_g\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m\rho_l S_l\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho c T\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right),$$

$$mS_g\upsilon_g=-\frac{k}{\mu_g}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$p=\rho_g R_g T,$$

где m – пористость; $\vec{\upsilon}_g$,k, c_g и μ_g – соответственно скорость, проницаемость, удельная теплоемкость и динамическая вязкость газовой фазы; ρ_j и S_j ($j = sk, h, l, g$) – истинные плотности и насыщенности пор j – й фазы; p – давление; T – температура; ρc и λ – удельная объемная теплоемкость и коэффициент теплопроводности системы; индексы sk, h, l и g относятся к параметрам скелета, гидрата, воды и газа соответственно.

Данные уравнения дополняются условиями баланса массы и тепла на границе фазового перехода ($x = x_{(s)}$):

$$m\nu\rho_h(1-g)\dot{x}_{(s)} = mS_{l0}\rho_l\dot{x}_{(s)}$$

$$mS_{g(2)}\rho^0_{g(s)}(\upsilon_{g(2)} - \dot{x}_{(s)}) - m\nu\rho_h g\dot{x}_{(s)} = mS_{g(1)}\rho^0_{g(s)}(\upsilon_{g(1)} - \dot{x}_{(s)}),$$

$$\lambda\frac{\partial T_{(2)}}{\partial x} - \lambda\frac{\partial T_{(1)}}{\partial x} = m\nu\rho_h l\dot{x}_{(s)},$$

где g – массовая концентрация газа в гидрате; l – удельная теплота гидратообразования; ν – начальная гидратонасыщенность пласта; $\dot{x}_{(s)}$ – скорость движения границы фазовых переходов, параметры первой и второй областей снабжены нижними индексами в скобках i = 1, 2.

На границе между областями для температуры и давления выполняется условие фазового равновесия:

$$T_{(s)} = T_0 + T_* \ln\left(\frac{p_{(s)}}{p_{s0}}\right),$$

где T_0 – исходная температура системы, p_{s0} – равновесное давление, соответствующее исходной температуре, T_* – эмпирический параметр, зависящий от вида газогидрата.

Будем полагать, что в начальный момент времени в пористой среде давление p_0 и температура T_0 во всех точках пласта одинаковы:

$$p_{(2)} = p_0, \quad T_{(2)} = T_0 \quad (t = 0, \quad x \geq 0).$$

На границе фазовых переходов потребуем условие непрерывности давления и температуры:

$$p_{(1)} = p_{(2)} = p_{(s)}, \quad T_{(1)} = T_{(2)} = T_{(s)} \quad (x = x_{(s)}).$$

Условия на границе пласта запишем в виде:

$$\frac{\partial T_{(1)}}{\partial x} = 0, \; p_{(1)} = p_e \; (t > 0, \; x = 0).$$

Сформулированная таким образом задача является автомодельной. Введем автомодельную переменную:

$$x = \frac{x}{\sqrt{\aleph^{(T)} t}},$$

где $\aleph^{(T)} = \dfrac{\lambda}{\rho c}$ – коэффициент температуропроводности.

Тогда интегрированием можно получить следующие аналитические решения:

$$p^2_{(1)} = p^2_e + \frac{(p^2_s - p^2_e)\,erf\left(\dfrac{\xi}{2\sqrt{\eta_{(1)}}}\right)}{erf\left(\dfrac{\xi_s}{2\sqrt{\eta_{(1)}}}\right)}, \qquad 0 < \xi < \xi_s,$$

$$T_{(1)} = T_s, \; 0 < \xi < \xi_s,$$

$$p_{(2)}^2 = p_0^2 + \frac{(p_s^2 - p_0^2)\left(\sqrt{\pi\eta_{(2)}} - erf\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\eta_{(2)}}}\right)\right)}{\sqrt{\pi\eta_{(2)}} - erf\left(\frac{\xi_s}{2\sqrt{\eta_{(2)}}}\right)}, \quad \xi_{(s)} < \xi < \infty,$$

$$T_{(2)} = T_0 + \frac{(T_s - T_0)\left(\sqrt{\pi} - erf\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)}{\sqrt{\pi} - erf\left(\frac{\xi_{(s)}}{2}\right)}, \quad \xi_{(s)} < \xi < \infty,$$

где erf – интеграл ошибок, $\eta_{(i)} = \frac{\aleph_{(i)}^{(p)}}{\aleph^{(T)}}$, $\aleph_{(i)}^{(p)} = \frac{k p_0}{\mu_g m S_{g(i)}}$.

На основе данных решений и условий баланса массы и тепла на фронтальной границе разложения газогидрата можно получить систему уравнений для определения автомодельной координаты ξ_s данной границы и значения параметров p_s и T_s на ней.

$$\frac{\left(p_s^2 - p_e^2\right)\exp\left(-\frac{\xi_s^2}{4\eta_{(1)}}\right)}{erf\left(\frac{\xi_s}{2\sqrt{\eta_{(1)}}}\right)} - \frac{\left(p_0^2 - p_s^2\right)\exp\left(-\frac{\xi_s^2}{4\eta_{(2)}}\right)}{\sqrt{\pi\eta_{(2)}} - erf\left(\frac{\xi_s}{2\sqrt{\eta_{(2)}}}\right)} = K\xi_s,$$

$$\frac{(T_0 - T_s)\exp\left(-\frac{\xi_s^2}{4}\right)}{\sqrt{\pi} - erf\left(\frac{\xi_s}{2}\right)} = \Delta T \xi_s.$$

где $\Delta T = \frac{m\rho_h l\nu}{2\rho c}$, $K = m\mu_g \aleph^{(T)} p_0 \left(\frac{\rho_h g}{\rho_{g(s)}} + \frac{\rho_h(1-g)}{\rho_l} - 1\right)\frac{\nu}{k}$.

Записанная система уравнений может быть решена следующим образом. Выражая из первого уравнения величину p_s и подставляя ее (с учетом условия фазового равновесия) во второе уравнение, получаем трансцендентное уравнение с одной неизвестной ξ_s. Решая данное уравнение, определяем величину ξ_s.

УДК 512.542

О ФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С *P*-СУБНОРМАЛЬНЫМИ ЦИКЛИЧЕСКИМИ ПРИМАРНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Мурашко В.И.
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, г. Гомель
Научный руководитель: Васильев А.Ф., д.ф.-м.н., доцент

Рассматриваются только конечные группы. Напомним [1], что подгруппа H группы G называется ***P***-субнормальной, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ является простым числом для $i = 1,\ldots, n$.