выборе *n* и достаточно малых δ. Иными словами, метод итераций (3) является сходящимся, если

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\inf_n \|x - x_{n,\delta}\|\right) = 0. \quad (4)$$

Покажем, что при условии (4) процесс (3) можно сделать сходящимся, если нужным образом выбрать число итераций *n* в зависимости от уровня погрешности δ. Имеет место

Теорема. *При условии* (4) *итерационный процесс* (3) *сходится, если выбирать число итераций* n *в зависимости от* δ *так, чтобы* $n\delta \to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$.

Доказательство

Будем считать, $x_{0,\delta} = 0$, и рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}).$$

$$x - x_n \to 0,\ n\to\infty$$

Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора A, получим

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{2n}\right](y - y_\delta) = \int_0^M \lambda^{-1}\left[1 - (1-\alpha\lambda)^{2n}\right] dE_\lambda (y - y_\delta).$$

По индукции нетрудно показать, что

$$g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - (1-\alpha\lambda)^{2n}\right] \le 2n\alpha.$$

Тогда $\|x_n - x_{n,\delta}\| \le 2n\alpha\delta$. Поскольку

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + 2n\alpha\delta,$$

и $\|x - x_n\| \to 0,\ n\to\infty$, то для сходимости итерационного метода (3) достаточно, чтобы $n\delta\to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$. Теорема доказана.

Общая оценка погрешности метода (3) при приближённой правой части $y_\delta : \|y - y_\delta\| \le \delta$, запишется в виде

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \le s^s (2n\alpha e)^{-s}\|z\| + 2n\alpha\delta.$$

Итак, доказана

Теорема. *Если точное решение* x *уравнения* (1) *истокообразно представимо, то при условии* $0 < \alpha \le \frac{5}{4M}$ *для метода* (3) *справедлива оценка погрешности* $\|x - x_{n,\delta}\| \le s^s (2n\alpha e)^{-s}\|z\| + 2n\alpha\delta$.

УДК 621.311.153

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ С УЧЕТОМ ТРАНСФОРМАЦИЙ И НЕОДНОРОДНОСТИ СЕТИ

Радоман Н.В

Белорусский государственный технологический университет, г. Минск

Научный руководитель: Александров О.И., к.т.н., доцент

При расчете параметров установившихся режимов в электрических сетях большой энергетической системы наибольшие трудности вызывают сети с высокой степенью неоднородности. Особенно это проявляется в высоковольтных питающих, системообразующих и межсистемных линиях электропередачи [1-3].

Предлагается новый метод расчета коэффициентов распределения для потерь в электрической сети энергосистемы от активных и реактивных мощностей в узлах и от результирующих продольных и поперечных трансформаций в контурах сети, а также методика его реализации.

Метод расчета потокораспределения в электрической сети основан здесь не на физическом моделировании структуры исследуемой цепи, а на математическом моделировании структуры уравнений, описывающих потокораспределение, благодаря чему снимаются ограничения, накладываемые неоднородностью сети и наличием трансформаций.

Как известно, любая линейная система уравнений с симметричной матрицей коэффициентов может быть промоделирована электрической цепью по методу электрических узлов. Сущность этого метода кратко можно охарактеризовать следующим образом.

Рассмотрим задачу приближенного определения потокораспределения в электрической сети энергосистемы, исходя из допущения одинаковых напряжений в узлах. При этом для каждого *i*-го независимого контура схемы исследуемой цепи уравнение имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{m_i} \dot{S}_{ij}\, \underline{\dot{Z}}_{ij} = \left(1 - \prod_{\nu=1}^{n_i} \dot{k}_{i\nu}\right) \dot{\mathrm{U}}_{cp}^{2},$$

где m_i – общее число ветвей в контуре, n_i – число трансформаторов в контуре, $\dot{S}_{ij},\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m_i$ – комплексная полная мощность в *j*-й ветви *i*-го контура, $\dot{Z}_{ij},\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m_i$ – комплекс приведенного сопротивления соответствующей ветви; $\dot{k}_{i\nu},\ \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_i$ – комплексный коэффициент трансформации ν-го трансформатора в *i*-м контуре, причем первичной считается обмотка, проходимая первой при обходе контура в принятом для него положительном направлении, $\dot{\mathbf{U}}_{\text{ср}}$ – средняя величина напряжения той ступени, к которой приведены сопротивления ветвей.

Это комплексное уравнение распадается на два действительных:

$$\sum_{j=1}^{m_i} \left(P_{ij} R_{ij} + Q_{ij} X_{ij}\right) = \left(1 - \mathrm{Re}\left[\prod_{\nu=1}^{n_i} \dot{k}_{i\nu}\right]\right) \dot{U}_{cp}^{2},$$

$$\sum_{j=1}^{m_i} \left(P_{ij} X_{ij} - Q_{ij} R_{ij}\right) = -\mathrm{Im}\left[\prod_{\nu=1}^{n_i} \dot{k}_{i\nu}\right] \dot{U}_{cp}^{2},$$

где P_{ij}, Q_{ij} – потоки соответственно активной и реактивной мощности в *j*-й ветви *i*-го контура; P_{ij}, X_{ij} –соответственно активное и реактивное сопротивления *j*-й ветви *i*-го контура.

В матричной форме уравнения второго закона Кирхгофа можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \mathrm{NR} & \mathrm{NX} \\ \mathrm{NX} & -\mathrm{NR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{P} \\ \mathrm{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{K}^{(\mathrm{Re})} \\ \mathrm{K}^{(\mathrm{Im})} \end{bmatrix},$$

где **N** – матрица контуров схемы размера $(m\text{-}k+1)\times m$ (*m* – число ветвей, *n*- число узлов схемы), **R**, **X** – диагональные матрицы соответственно активных и реактивных сопротивлений ветвей, **P, Q** – вектор-столбцы потоков соответственно активных и реактивных мощностей в ветвях, $\mathbf{K}^{(\mathrm{Re})}$, $\mathbf{K}^{(\mathrm{Im})}$ – векторы правых частей последних уравнений соответственно, обусловленные наличием трансформаций в контурах и равные нулю, если трансформации отсутствуют.

Аналогично уравнения первого закона Кирхгофа в матричной форме имеют вид

$$\begin{bmatrix} \mathrm{M} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{P} \\ \mathrm{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{P_y} \\ \mathrm{Q_y} \end{bmatrix},$$

где **M** – матрица соединений схемы размера $(n\text{-}1)\times m$, **O** – нулевая матрица размера $(n\text{-}1)\times m$, $\mathbf{P}_{\mathrm{y}}$, $\mathbf{Q}_{\mathrm{y}}$ – векторы соответственно активных и реактивных мощностей в узлах.

Полное уравнение потокораспределения в сети с использованием коэффициентов распределения можно представить в виде:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{P} \\ \mathrm{Q} \end{bmatrix} = \mathrm{C}_{\text{нагр}} \begin{bmatrix} \mathrm{P_y} \\ \mathrm{Q_y} \end{bmatrix} + \mathrm{C}_{\text{тр}} \begin{bmatrix} \mathrm{k}^{(\mathrm{Re})} \\ \mathrm{k}^{(\mathrm{Im})} \end{bmatrix},$$

где $\mathrm{C}_{\text{нагр}} = \mathrm{D}^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{M}^* & \mathrm{O} \\ \mathrm{O}^* & \mathrm{M} \end{bmatrix}$; $\mathrm{C}_{\text{тр}} = \mathrm{D}^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{RN} & \mathrm{XN} \\ \mathrm{XN} & -\mathrm{RT} \end{bmatrix}$ – матрицы коэффициентов распределения соответственно для нагрузочных и уравнительных потоков в ветвях, а **D** – матрица коэффициентов напряжений.

В матричной форме выражение для потока полной мощности в начале линии может быть записано следующим образом

$$\dot{\mathbf{S}}_{\text{н}} = (\mathbf{G} - j\mathbf{B})\, diag\hat{\mathbf{U}}_{\text{н}} \left[\hat{\mathbf{U}}_{\text{н}} - diag(\mathbf{k}' + j\mathbf{k}'')\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{k}}\right] +$$
$$+ j(\mathbf{G} - j\mathbf{B})\, diag\hat{\mathbf{U}}_{\text{н}}\, diag(\mathbf{k}' + j\mathbf{k}'')\, diag\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{k}}\mathbf{M}^*\delta,$$

где **G**, **B** – диагональные матрицы активных и реактивных проводимостей,

$diag\,\mathbf{U}_{\text{н}}$, $diag\,\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{k}}$, $diag\,(\mathbf{k}' + j\mathbf{k}'') = diag\,\dot{\mathbf{k}}$ – диагональные матрицы модулей напряжений в начале и конце звеньев и коэффициентов трансформации,

$\dot{\mathbf{S}}_{\text{н}}$, $\hat{\mathbf{U}}_{\text{н}}$, $\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{k}}$ – столбцовые матрицы мощностей в начале звеньев и модули напряжений в начале и конце, $\boldsymbol{\delta}$ – столбец фазовых напряжений узлов относительно балансирующего, **M** – действительная часть комплексной матрицы инциденций схемы (не учитывающая коэффициенты трансформации).

Тогда получим выражения для потока мощности в начале каждой линии:

$$\mathbf{P}_{\text{н}} = \mathbf{G}\ diag\hat{\mathbf{U}}_{\text{н}}\left(\hat{\mathbf{U}}_{\text{н}} - diag\mathbf{k}'\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{k}}\right) - \mathbf{B}\ diag\hat{\mathbf{U}}_{\text{н}}\ diag\mathbf{k}''\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{k}} -$$
$$-\left(\mathbf{G}\ diag\hat{\mathbf{U}}_{\text{н}}\ diag\mathbf{k}'' - \mathbf{B}\ diag\hat{\mathbf{U}}_{\text{н}}\ diag\mathbf{k}'\right)\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{k}}\mathbf{M}^*\delta;$$
$$\mathbf{Q}_{\text{н}} = \mathbf{G}\ diag\hat{\mathbf{U}}_{\text{н}}\ diag\mathbf{k}''\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{k}} + \mathbf{B}\ diag\hat{\mathbf{U}}_{\text{н}}\left(\hat{\mathbf{U}}_{\text{н}} - diag\mathbf{k}'\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{k}}\right) -$$
$$-\left(\mathbf{G}\ diag\hat{\mathbf{U}}_{\text{н}}\ diag\mathbf{k}' - \mathbf{B}\ diag\hat{\mathbf{U}}_{\text{н}}\ diag\mathbf{k}''\right)\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{k}}\mathbf{M}^*\delta.$$

С учетом коэффициентов трансформации уравнение потока полной мощности для каждой ветви получит вид:

$$\dot{S} = P_{ik} - jQ_{ik} = \dot{U}_{ik}\left(\hat{U}_{iн} - \dot{U}_{ik}k_i^{'}\right)(g_i - jb_i) - \dot{U}_{ik}^2 k_i^{''}(b_i + jg_i) + \hat{U}_{iн}\dot{U}_{ik}(b_i + jg_i)\delta_i =$$
$$= (g_i - jb_i)\dot{U}_{ik}\left(\hat{U}_{iн} - \dot{U}_{ik}k_i^{'}\right) - j(g_i - jb_i)\dot{U}_{ik}^2 k_i^{''} + j(g_i - jb_i)\hat{U}_{iн}\dot{U}_{ik}\delta_i =$$
$$= (g_i - jb_i)\dot{U}_{ik}\left(\hat{U}_{iн} - \dot{U}_{ik}k_i^{'} - j\dot{U}_{ik}\right) + j(g_i - jb_i)\hat{U}_{iн}\dot{U}_{ik}\delta_i.$$

Соответственно в матричной форме выражения для потоков полной, активной и реактивной мощностей в конце каждой линии определяются следующим образом

$$\dot{\mathbf{S}}_{\mathbf{k}} = (\mathbf{G} - j\mathbf{B})\, diag\,\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{k}}\left[\hat{\mathbf{U}}_{\text{н}} - diag(\mathbf{k}' + j\mathbf{k}'')\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{k}}\right] + j(\mathbf{G} - j\mathbf{B})\, diag\,\hat{\mathrm{U}}_{\text{н}}\ diag\,\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{k}}\mathbf{M}^*\delta.$$
$$\mathbf{P}_{\mathbf{k}} = \mathbf{G}\, diag\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{k}}\left(\hat{\mathbf{U}}_{\text{н}} - diag\,\mathbf{k}'\mathbf{U}_{\mathbf{k}}\right) - \mathbf{B}\, diag\,\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{k}} diag\,\mathbf{k}''\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{k}} + \mathbf{B}\, diag\,\hat{\mathbf{U}}_{\text{н}}\ diag\,\mathbf{U}_{\mathbf{k}}\mathbf{M}^*\delta;$$
$$\mathbf{Q}_{\mathbf{k}} = \mathbf{G}\, diag\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{k}}\ diag\mathbf{k}''\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{k}} + \mathbf{B}\, diag\,\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{k}}\left(\hat{\mathbf{U}}_{\text{н}} - diag\,\mathbf{k}'\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{k}}\right) - \mathbf{G}\, diag\,\mathbf{U}_{\text{н}}\ diag\,\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{k}}\mathbf{M}^*\delta.$$

Как показали практические расчеты, распространенное убеждение в том, что приближенный раздельный расчет потоков активных и реактивных мощностей в сети при приложении к независимым узлам задающих мощностей соответствующего рода в качестве необходимого допущения требует однородности сети, неверно [2].

Полученные уравнения позволяют выполнить многовариантные расчеты потокораспределения в сложно-замкнутой сети электроэнергетической системы любой сложности, неоднородной структуры и с учетом комплексных коэффициентов трансформации.

Список цитированных источников
1. Холмский, В.Г. Расчет и оптимизация режимов электрических сетей / В.Г. Холмский. – М.: Высшая школа, 1975.– 280 с.
2. Гурский, С.К. Алгоритмизация задач управления режимами сложных систем в электроэнергетике / С.К. Гурский. – Мн.: Наука и техника, 1977. – 368 с.
3. Pelissier, Rene. Les veseaux d"energie electrique. Dunod. Paris, – 1975. – 568 с.

УДК 532.546:536.421

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТЕФАНА С ДВУМЯ ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ МЕТОДОМ ЛОВЛИ ФРОНТА В УЗЕЛ СЕТКИ

Рахматуллина Л.Р.
Башкирский государственный университет, г. Стерлитамак (Россия)
Научный руководитель: Хасанов М.К., к.ф.-м.н, доцент

Рассмотрим одномерную задачу об образовании газогидрата в полубесконечном пористом пласте. Пусть пористый пласт (занимающий полупространство *x*>0) в начальный момент времени насыщен газом и водой, давление и температура которых в исходном состоянии соответствуют термодинамическим условиям существования их в свободном состоянии. Положим, что через границу пласта (*x=0*) закачивается газ, причем его давление и температура соответствуют условиям образования газогидрата и поддерживаются на этой границе постоянными. При постановке данной задачи будем полагать, что в результате закачки газа образуется три характерные области: ближняя, где поры заполнены газом и гидратом, промежуточная, в которой газ, вода и гидрат находятся в равновесии, и дальняя, которая заполнена газом и водой. В промежуточной зоне происходит образование гидрата. Соответственно возникают две подвижные поверхности: между дальней и промежуточной областями, где начинается переход воды в гидрат, и между ближней и промежуточной областями, на которой заканчивается процесс гидратообразования.

Система основных уравнений, представляющая собой законы сохранения масс, энергии, закон Дарси и уравнение состояния газа, при допущениях о несжимаемости и неподвижности скелета пористой среды, гидрата и воды, имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_g m S_g + \rho_h m S_h G\right) + \operatorname{div}\left(\rho_g m S_g \vec{\upsilon}_g\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m\rho_l S_l + m(1-G)\rho_h S_h\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho c T\right) + \rho_g c_g m S_g \vec{\upsilon}_g \operatorname{grad} T = \operatorname{div}\left(\lambda \operatorname{grad} T\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(m\rho_h S_h L_h\right),$$

$$m S_g \vec{\upsilon}_g = -\frac{k_g}{\mu_g}\operatorname{grad} p, \qquad p = \rho_g R_g T,$$

где *m* – пористость; *G* – массовая концентрация газа в гидрате; ρ_j и S_j (*j = sk, h, l, g*) – истинные плотности и насыщенности пор *j* – й фазы; $\vec{\upsilon}_g$, k_g, c_g и μ_g – соответственно скорость, проницаемость, удельная теплоемкость и динамическая вязкость газовой фазы; *p* – давление; *T* – температура; L_h – удельная теплота гидратообразования; ρc и λ – удельная объемная теплоемкость и коэффициент теплопроводности системы; индексы *sk*, *h*, *l* и *g* относятся к параметрам скелета, гидрата, воды и газа соответственно.