При образовании газогидрата в пористом пласте возникают зоны, в которых газ, вода и гидрат могут находиться в различных состояниях. На поверхностях разрыва между этими зонами, где терпят скачки насыщенности фаз, а также потоки массы и тепла, выполняются соотношения, следующие из условий баланса массы и тепла:

$$\left[m\left(S_h\rho_h(1-G)+S_l\rho_l\right)\vec{D}_{(s)}\right]=0,\qquad \left[m\left(\rho_g S_g(\vec{\upsilon}_g-\vec{D}_{(s)})-\rho_h S_h G\vec{D}_{(s)}\right)\right]=0,$$

$$\left[\lambda\,\mathrm{grad}\,T\right]=\left[m\rho_h L_h S_h\vec{D}_{(s)}\right].$$

Здесь $[\psi]$ – скачок параметра ψ на границе между зонами; $\vec{D}_{(s)}$ – скорость движения этой границы. Температура и давление на этих границах полагаются непрерывными.

В трехфазной области, где одновременно присутствуют газ, вода и гидрат, и происходит процесс образования газогидрата, принимается условие равновесия фаз:

$$T=T_0+T_*\ \ln\left(\frac{p}{p_{s0}}\right),$$

где T_0 – исходная температура системы, p_{s0} – равновесное давление, соответствующее исходной температуре, T_* – эмпирический параметр, зависящий от вида газогидрата.

Рассмотренная постановка задачи относится к классу нелинейных задач математической физики. Поскольку данные задачи определены в областях с неизвестными подвижными границами фазовых переходов, то для их решения используется метод ловли фронтов в узлы пространственной сетки. Введем равномерную пространственную сетку с шагом h. Алгоритм решения заключается в том, что неизвестный временной шаг выбирается таким образом, чтобы ближний фронт фазового перехода $x = x_{(n)}$ перемещался по координате x ровно на один шаг. При этом положение дальней подвижной поверхности $x = x_{(d)}$ также будем относить к некоторому узлу пространственной сетки, которое будет определяться уже в ходе решения задачи. Построенную систему нелинейных алгебраических уравнений целесообразно на каждом временном слое решать методом простых итераций.

В результате анализа решений установлено, что процесс перехода воды в состав гидрата происходит в три этапа. На первом этапе, когда влияние правой границы несущественно, в общем случае образуется три области, а именно: ближняя, где в порах присутствуют газ и гидрат, промежуточная, насыщенная газом, гидратом и водой, а также дальняя область, содержащая газ и воду. На втором этапе промежуточная область вырождается во фронтальную поверхность. Третий, самый протяженный по времени этап характеризуется образованием гидрата только лишь на фронтальной поверхности. При этом в зависимости от значения давления на границе пористой среды и температуры нагнетаемого газа могут реализовываться решения с «висячим» на некотором сечении или выносящимся за пределы пористой среды скачками гидратонасыщенности.

УДК 519.24

ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТОЯТЕЛЬНОЙ ОЦЕНКИ ВЗАИМНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ МНОГОМЕРНОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА

Савчук О.В.
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест
Научный руководитель: Мирская Е.И., к.ф.-м.н., доцент

Исследование статистических оценок спектральных плотностей является одной из классических задач анализа временных рядов. Это связано с широким применением анализа временных рядов к анализу данных, которые возникают в физике, технике, теории распознавания образов, экономике. Часто данные являются многомерными. Такая ситуация особенно характерна для экономических данных.

В данной работе в качестве оценки неизвестной взаимной спектральной плотности многомерного временного ряда исследована статистика вида

$$\tilde{f}_{ab}(\lambda) = \frac{2\pi}{T}\sum_{s=1}^{T} W_{ab}(\lambda - \frac{2\pi s}{T})\,\hat{f}^{(T)}_{ab}(\lambda), \tag{1}$$

где $W_{ab}(x), x\in R, a,b=\overline{1,r}$, $\lambda\in\Pi=[-\pi;\pi]$ – спектральные окна, а статистика $\hat{f}^{(T)}_{ab}(\lambda)$ задана соотношением

$$\hat{f}^{(T)}_{ab}(\lambda) = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} I_{ab}(\lambda, l), \tag{2}$$

где

$$I_{ab}(\lambda,l) = \frac{1}{2\pi\sum\limits_{p=0}^{N-1} h_a^N(p)h_b^N(p)} H_a(\lambda,l)\overline{H_b(\lambda,l)},$$

$l=\overline{1,L}$, $a,b=\overline{1,r}$, $\lambda\in\Pi$, модифицированная периодограмма на l–м интервале разбиения, а $H_a(\lambda,l)$ задано выражением

$$H_a(\lambda,l) = \sum_{p=0}^{N-1} h_a^N(t)X_a(t+(l-1)(N-K))e^{-i\lambda(t+(l-1)(N-K))},$$

$l=\overline{1,L}$, $a=\overline{1,r}$, $\lambda\in\Pi$, $t\in Z$.

Оценка взаимной спектральной плотности, заданная соотношением (1), построена по *T* последовательным, полученным через равные промежутки времени, наблюдениям за составляющей $X_a(t)$ процесса $X(t)=\{X_a(t), a=\overline{1,r}\}, t\in Z$ с $MX(t)=0$, с неизвестной матрицей спектральных плотностей $f(\lambda)=\{f_{ab}(\lambda), a,b=\overline{1,r}\}, \lambda\in\Pi=[-\pi;\pi]$, а также неизвестной ковариационной матрицей $R(\tau)=\{R_{ab}(\tau), a,b=\overline{1,r}\}, \tau\in Z$.

Статистика (2) исследована в работах [1], [2]. Вычислены математическое ожидание, дисперсия и ковариация предложенной статистики. Исследовано их асимптотическое поведение.

В данной работе вычислены математическое ожидание, дисперсия и ковариация оценки, заданной соотношением (1).

Исследовано асимптотическое поведение первых двух моментов оценки. Показано, что при некоторых ограничениях на окна просмотра данных, спектральные окна и взаимную спектральную плотность $f_{ab}(x), a,b=\overline{1,r}$, для оценки $\tilde{f}_{ab}(\lambda), \lambda\in\Pi$, заданной выражением (1), справедливы соотношения

$$\lim_{T\to\infty} M\tilde{f}_{ab}(\lambda) = f_{ab}(\lambda), \tag{3}$$

$$\lim_{T\to\infty} D\tilde{f}_{ab}(\lambda) = 0, \tag{4}$$

$\lambda\in\Pi, a,b=\overline{1,r}$.

Откуда следует, что

$$\lim_{T\to\infty}\left(D\tilde{f}_{ab}(\lambda) + (M\tilde{f}_{ab}(\lambda) - f_{ab}(\lambda))^2\right) = 0.$$

Таким образом, показано, что статистика $\tilde{f}_{ab}(\lambda), \lambda\in\Pi, a,b=\overline{1,r}$ является состоятельной в среднеквадратическом смысле оценкой взаимной спектральной плотности.

С помощью математического пакета Matlab для конкретного временного ряда был проведен сравнительный анализ дисперсии оценки, заданной соотношением (1) для различной степени пересечения интервалов разбиения.

Показано, что дисперсия оценки (1) уменьшается при увеличении числа интервалов разбиения исходной последовательности наблюдений. Наиболее эффективным является использование окон просмотра данных Хэмминга и Рисса.

Таким образом, в работе в качестве оценки неизвестной взаимной спектральной плотности многомерного временного ряда использована статистика, построенная путем осреднения модифицированных периодограмм по пересекающимся интервалам наблюдений.

Показано, что предложенная оценка является асимптотически несмещенной и состоятельной в среднеквадратическом смысле оценкой взаимной спектральной плотности процесса.

Список цитированных источников

1. Труш, Н.Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов / Н.Н. Труш. – Мн.: БГУ, 1999. – 218 с.
2. Труш, Н.Н. Статистические свойства оценок спектральных плотностей по пересекающимся интервалам наблюдений / Н.Н. Труш, Е.И. Мирская // Проблемы компьютерного анализа данных и моделирования: сб. науч. ст. – Минск. – 1991. – С. 180-185.

УДК 512.542

A_4-СВОБОДНЫЕ ГРУППЫ С НЕБОЛЬШИМИ ИНДЕКСАМИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

Серая С.А.
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест
Научный руководитель: Трофимук А.А., к.ф.-м.н.

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

Одним из наиболее перспективных направлений теории конечных групп является направление, связанное с исследованием инвариантов разрешимых групп, у которых на индексы максимальных подгрупп накладываются определенные ограничения.

В 1954 году Б. Хупперт [2] доказал, что группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда индексы её максимальных подгрупп являются простыми числами. Легко проверить, что нильпотентная длина такой группы не превышает 2.

Ф. Холл [3] в 1958 году установил разрешимость группы, у которой индексы максимальных подгрупп есть простые числа или квадраты простых чисел.

Исследование групп, у которых индексы максимальных подгрупп примарны и не делятся на кубы простых чисел, проведено в работах В.С. Монахова и Е.Е. Грибовской [4]. В частности, установлено, что производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, нильпотентная длина таких групп не превышает 4.

Строение разрешимых групп, индексы максимальных подгрупп которых равны простым числам, квадратам простых чисел или кубам простых чисел, получено в работах В.С. Монахова, М.В. Селькина и Е.Е. Грибовской [5]. В частности, доказано, что производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6, нильпотентная длина таких групп не превышает 4.