где $g_i^{(k)}$ – величина дохода системы S_i при изменении параметров сети $\lambda_{ic}, \mu_{ic}, p_{ij}^{(c)}$ на интервале времени $[t_{k-1}, t_k)$, $i=\overline{1,n}$.

Если $t_1, t_2, ..., t_{m-1}$ – целые числа, то задача (3) является задачей целочисленной оптимизации. Для решения данной задачи применялся метод полного перебора, разработана программа для её решения. Она находит сумму произведений величины резерва на время отвлечения этого резерва, а затем эта сумма минимизируется. Результаты, полученные при помощи программы, могут быть использованы для анализа и принятия управленческих решений.

Список цитированных источников

1. Маталыцкий, М.А. Системы и сети массового обслуживания: анализ и применение: монограмма / М.А. Маталыцкий, О.М. Тихоненко, Е.В. Колузаева. – Гродно: ГрГУ, 2011. – 817 с.

УДК 681.3.06

ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ

Сухоцкий Р.П.
Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Лебедь С.Ф., к.ф.-м.н., доцент

В работе рассмотрено понятие производящей функции и ее приложения.

Определение. Производящей функцией последовательности $\{a_n\}$ называется сумма степенного ряда $f_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

Приложения производящей функции.

- **Комбинаторика.**

Постановка задачи о расстановке черных и белых шаров: Сколькими различными способами можно расположить в линию чёрные и белые шары, общее количество которых равно *n*?

Решение: В этой задаче есть один параметр – число шаров *n*. Решением считается формула, позволяющая получить ответ для любого заданного *n* (в данном случае *n≥0*). Этот ответ будем обозначать символом a_n.

Обозначим белый шар символом – ○, а чёрный – ●. Нулевое количество шаров будем обозначать – о. Получим решение для небольшого значения параметра. Например: n = 2 : ○○, ○●,●○ ,●● $\Rightarrow a_2$= 4; n = 1 : ○, ●$\Rightarrow a_1$ = 2. Единственный способ не располагать в линию ничего – это **ничего не делать**, причём ничего не делать **можно одним способом**.

В случае *n = 3* можно взять самый левый шар белым и **закончить комбинацию** ○… **четырьмя способами**, а можно взять его чёрным, **закончив комбинацию** ●… **также четырьмя способами**. Значит, $a_3 = 2a_2$. Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что $a_n = 2a_{n-1}$ (для *n≥1*), это означает, что $a_n = 2^n$.

Решим данную задачу с помощью производящей функции. Для этого «просуммируем» все возможные комбинации (включая пустую) следующим образом:

А = ø+○ +●+○○ +●○ +○ ●+●●+○○○ +○○ ●+○ ●○ +○ ●●+…

Проведя с «рядом» *A* ряд арифметических манипуляций, получим А = øø−○ −●, т.е.

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\circ + \bullet \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k \circ^k \bullet^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k t^n .$$

Так как в нашей задаче неважно, какой шар на каком месте стоит, важно, что их общее количество равно *n*, то можно заменить оба символа ○ и ● одной буквой *t.* Значит,

$$a_n = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k = 2^n .$$

- **Теория вероятностей.**

1. Постановка задачи. Вероятность перегорания первой, второй, третьей и четвертой ламп равны соответственно 0,1; 0,2; 0,3 и 0,4. Вероятность выхода из строя прибора при перегорании одной лампы равна 0,2; двух ламп – 0,4; трех – 0,6; четырех – 0,8. Определить вероятность выхода прибора из строя.

Решение. Традиционно такого рода задачи решаются при помощи формулы полной вероятности. Применение понятия производящей функции существенно сокращает вычисления. Одна из простейших производящих функций в теории вероятностей связана с событиями с двумя исходами (бросание монеты, устройство работает или нет, и т.д.): $q + p = 1$. Для *n* независимых испытаний с двумя исходами (схема Бернулли) производящей функцией будет $f(t) = (q + pt)^n$.

По условию задачи имеем: $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.2$, $p_3 = 0.3$, $p_4 = 0.4$, $q_1 = 0.9$; $q_2 = 0.8$; $q_3 = 0.7$; $q_4 = 0.6$. Тогда производящая функция равна:

$$f(t) = 0.3024 + 0.4404t + 0.2144\, t^2 + 0.0404\, t^3 + 0.0024\, t^4 ,$$

где коэффициенты при t^k − вероятности отказа *k*-й лампы. Применяя формулу полной вероятности, находим вероятность выхода прибора из строя:

$P = 0.4404 \cdot 0.2 + 0.2144 \cdot 0.4 + 0.0404\ 0.6 + 0.0024 \cdot 0.8 = 0.2.$

2. Числовые характеристики дискретной случайной величины.

Нахождение числовых характеристик ДСВ с целыми неотрицательными значениями удобно производить с помощью производящих функций.

Пусть задан ряд распределения ДСВ X.

X_i	0	1	2	…	*k*	…
p_i	p_0	p_1	p_2	…	p_k	…

Производящей функцией для ДСВX называется функция вида:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k ,$$

где t – произвольный параметр, $0<t\le 1$, p_k – вероятности закона распределения ДСВ X.

Дифференцируя по t производящую функцию и положив в ней $t = 1$, получим: $f'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = M(X)$, то есть математическое ожидание $M(X) = f'(1)$.

Рассуждая аналогично, получим, что дисперсия ДСВ *X* вычисляется по формуле: $D(X) = f''(1) + f'(1) - \left(f'(1) \right)^2$.

Постановка задачи. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины *X*. Ряд распределения СВ *X*:

X_i	0	1	2	3
p_i	0.1	0.2	0.3	0.4

Решение. Составим производящую функцию для нашей СВ *X*:
$f(t) = 0.1 + 0.2t + 0.3t^2 + 0.4t^3$, тогда:
$M(X)=f'(1)=2$ и $D(X) = f''(1) + f'(1) - (f'(1))^2 = 1$.

- **Применение производящей функции для нахождения суммы ряда.**

Постановка задачи. Найти сумму ряда: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2$.

Решение. Введем в рассмотрение четыре числовых последовательности $a_k = 1$, $b_k = ka_k$, $c_k = kb_k$ и $d_k = \sum_{i=1}^{k} i^2$, а так же их производящие функции $f_a(t)$, $f_b(t)$, $f_c(t)$, $f_d(t)$.

Искомой суммой будет число d_k − общий член последовательности $\{d_k\}$. Для его определения надо найти $f_d(t)$.

$$f_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot t^k = \frac{1}{1-t},\ f_a'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k \cdot t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot t^{k-1},\ tf_a'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot t^k = f_b(t).$$

Аналогично получим $f_c(t) = t \cdot f_b'(t) = t\left(t \cdot f_a'(t)\right)' = t \cdot f_f'(t) + t^2 \cdot f_a''(t)$.

Утверждение. Если $a_n = \sum_{i=0}^{n} b_i,\ n = 0,1,2,\ldots$, то $f_a(t) = \frac{1}{1-t} f_b(t)$.

Тогда $f_d(t) = \frac{1}{1-t} f_c(t)$. Т.к. $f_a(t) = \frac{1}{1-t}$ разложим полученное выражение в ряд:

$$f_d(t) = \frac{1}{1-t}\left(tf_a'(t) + t^2 f_a''(t)\right) = \frac{t(1+t)}{(1-t)^4}.$$ Т.к. $\frac{1}{(1-t)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^{k} \cdot t^k$, то $\frac{1}{(1-t)^4} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+3}^{k} \cdot t^k$.

Следовательно,

$$f_d(t) = \frac{t(1+t)}{(1-t)^4} = t \cdot \frac{1}{(1-t)^4} + t^2 \cdot \frac{1}{(1-t)^4} = t \cdot \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+3}^{k} \cdot t^k + t^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+3}^{k} \cdot t^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+3}^{k} \cdot t^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+3}^{k} \cdot t^{k+2}.$$

Откуда

$$d_k = C_{k+2}^{k-1} + C_{k+1}^{k-2} = C_{k+2}^{3} + C_{k+1}^{3} = \frac{(k+2)!}{(k-1)! \cdot 3!} + \frac{(k+1)!}{(k-2)! \cdot 3!} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Значит,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Список цитированных источников:

1. Шапорев, С.Д. Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 400 с.: ил.
2. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д. Письменный. – 3-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 288 с.