МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации
и варианты контрольной работы
по разделам
«Элементы линейной алгебры», **«Основы аналитической геометрии»**, **«Основы математического анализа»** и **«Основы дифференциального исчисления функции одной переменной»**
общего курса дисциплины «Высшая математика»
для студентов экономических специальностей
заочной формы обучения

Брест 2017

УДК [512.64+514.12+517.1/.2](076)
ББК 22.1я73

В настоящих методических рекомендациях приведены варианты контрольных заданий по разделам «Элементы линейной алгебры», «Основы аналитической геометрии», «Основы математического анализа» и «Основы дифференциального исчисления функции одной переменной» общего курса дисциплины «Высшая математика» для студентов экономических специальностей заочной формы обучения. Даны методические рекомендации, полезные для успешного выполнения контрольной работы.

Составители: Гладкий И.И., доцент
Артюшеня Т.А., ассистент
Каримова Т.И., доцент, к.ф.-м.н.
Махнист Л.П., доцент, к.т.н.
Дворниченко А.В., старший преподаватель

Рецензент: Мирская Е.И., доцент кафедры алгебры, геометрии и математического моделирования Учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н., доцент

Организационно-методические указания

В контрольную работу включены семь заданий по разделам «Элементы линейной алгебры», «Основы аналитической геометрии», «Основы математического анализа» и «Основы дифференциального исчисления функции одной переменной» общего курса дисциплины «Высшая математика».

Нумерация задач состоит из двух чисел: первое число – номер задания, второе (после точки) – номер варианта.

Правила оформления контрольной работы:

1) контрольная работа выполняется в отдельной (тонкой) ученической тетради с отчерченными полями;
2) на обложке обязательно должен быть указан шифр (номер зачетной книжки);
3) контрольная работа выполняется студентом в соответствии со своим вариантом, который определяется двумя последними цифрами шифра;
4) каждое задание начинается на новой странице с обязательной записью его полного условия. Если задача имеет общую формулировку, то ее условие переписывают, заменяя общие данные конкретными, соответствующими номеру варианта;
5) решения всех заданий должны быть подробными и аккуратными, содержать достаточные пояснения, необходимые рисунки и таблицы. Решение каждой задачи заканчивается ответом;
6) завершает работу список используемой литературы и роспись студента;
7) после рецензии исправления в тексте работы недопустимы;
8) исправление ошибок, указанных рецензентом, выполняют в той же тетради после росписи студента.

Контрольные вопросы
I семестр

1. Определители второго и третьего порядков, их свойства и вычисление. Понятие определителя n-го порядка.
2. Матрицы и их виды. Линейные операции над матрицами. Произведение матриц.
3. Обратная матрица.
4. Системы линейных алгебраических уравнений, их матричная запись.
5. Элементарные преобразования матрицы. Понятие ранга матрицы. Метод Гаусса.
6. Решение невырожденных линейных систем по формулам Крамера и методом обратной матрицы.
7. Линейные модели в экономике (балансовая модель Леонтьева и модель международной торговли).
8. Векторы в трехмерном пространстве R^3. Линейные операции над векторами. Линейная зависимость векторов. Базис в R^3. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов в R^3.
9. Прямая на плоскости. Виды уравнений прямой на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
10. Предел функции в точке. Односторонние пределы. Свойства функций, имеющих предел в точке.
11. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства. Неопределенные выражения.
12. Первый и второй замечательные пределы.
13. Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке.
14. Точки разрыва функции и их классификация.
15. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
16. Производная функции, ее геометрический и экономический смысл. Производные основных элементарных функций.
17. Основные правила дифференцирования: производная суммы, произведения и частного, производная сложной функции.
18. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Приложения дифференциала.
19. Производные и дифференциалы высших порядков.
20. Основные теоремы дифференциального исчисления (формулировка и геометрическая интерпретация теорем Ферма, Ролля и Лагранжа).
21. Правило Лопиталя.
22. Исследование функции на монотонность с помощью производной.
23. Локальный экстремум функции одной переменной.
24. Асимптоты графика функции.
25. Производная в экономике (предельные величины в экономике, эластичность).

Контрольная работа

Задание 1. В задачах 1.1-1.30 проверить совместность системы линейных уравнений и в случае совместности решить ее тремя способами:

1) матричным методом (с помощью обратной матрицы);
2) по формулам Крамера;
3) методом Гаусса.

1.01. $\begin{cases} 2x - 3y - 5z = 1, \\ 3x + y - 2z = -4, \\ x - 2y + z = 5. \end{cases}$ 1.02. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2, \\ x - y + 3z = -4, \\ 3x + 5y = 4. \end{cases}$ 1.03. $\begin{cases} 5x - 2y + z = -1, \\ 2x + y + 2z = 6, \\ x - 3y - z = -5. \end{cases}$

1.04. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ x + 2y + z = 8, \\ 4x - 3y - 2z = -1. \end{cases}$ 1.05. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 3, \\ x + 2y + z = 2, \\ x - 3y + 4z = -1. \end{cases}$ 1.06. $\begin{cases} x - 3y - z = 1, \\ 2x + y + z = -7, \\ 2x - y - 3z = 5. \end{cases}$

1.07. $\begin{cases} x - 3y + z = 2, \\ 2x + y + 3z = 3, \\ 2x - y - 2z = 8. \end{cases}$ 1.08. $\begin{cases} 4x + 3y - 2z = -1, \\ 3x + y + z = 3, \\ x - 2y - 3z = 8. \end{cases}$ 1.09. $\begin{cases} 3x + 3y + 2z = -1, \\ 2x + y - z = 3, \\ x - 2y - 3z = 4. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x + y + 3z = 5, \\ 3x + 4y + z = -2. \end{cases}$ 1.11. $\begin{cases} 3x + y - 2z = 1, \\ x - 2y + 3z = 5, \\ 2x + 3y - z = -4. \end{cases}$ 1.12. $\begin{cases} 3x + y + 2z = -4, \\ x - 2y - z = -1, \\ 2x + 3y + 2z = 0. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2, \\ x + 2y + 3z = 0, \\ x - y - 2z = 6. \end{cases}$ 1.14. $\begin{cases} x + 5y - z = -1, \\ 2x + y - 2z = 7, \\ x - 4y + z = 0. \end{cases}$ 1.15. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 3, \\ x - y + 2z = -4, \\ 2x + 2y + z = 4. \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} 2x - 3y + z = 3, \\ x + y - 2z = 4, \\ 3x - 2y + 6z = 0. \end{cases}$ 1.17. $\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 3, \\ 2x + y - z = -5, \\ 5x - y + 3z = 4. \end{cases}$ 1.18. $\begin{cases} 2x - 3y + 3z = 0, \\ x + y - 2z = -7, \\ x - 2y + 3z = 3. \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} x + y - 2z = 1, \\ 2x + 3y + z = 0, \\ x - 2y - z = 7. \end{cases}$ 1.20. $\begin{cases} x + 2y - 4z = 0, \\ 3x + y - 3z = -1, \\ 2x - y + 5z = 3. \end{cases}$ 1.21. $\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x - y - 3z = -1, \\ 3x + 3y + z = 3. \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$ 1.23. $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = -1, \\ 2x - y - 3z = -5, \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$ 1.24. $\begin{cases} x - 4y - 2z = -5, \\ 3x + y + z = 5, \\ 3x - 5y - 6z = -8. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} x + y - z = 1, \\ 8x + 3y - 6z = 2, \\ 4x + y - 3z = 3. \end{cases}$ 1.26. $\begin{cases} 2x - y + 5z = 1, \\ x - 3y + z = -2, \\ 2x + y - z = 3. \end{cases}$ 1.27. $\begin{cases} x + y - 2z = 0, \\ 3x - y - z = 1, \\ 5x - 3y + z = 5. \end{cases}$

1.28. $\begin{cases} 3x - y + 2z = 1, \\ 2x + y + 3z = 4, \\ x - 2y + 5z = 3. \end{cases}$ 1.29. $\begin{cases} 4x - 3y - 2z = 2, \\ 3x + y - z = 2, \\ 2x + 5y + 3z = 5. \end{cases}$ 1.30. $\begin{cases} 3x + y + z = 4, \\ 2x + 3y - 2z = 5, \\ x - 4y - 2z = -3. \end{cases}$

Задание 2. В таблице представлены данные об использовании баланса за отчетный период (усл. ден. ед.).

Отрасли производства	Потребляющие отрасли: межотраслевые потоки текущих затрат, x_{ij}			Конечный продукт, y_i	Валовый выпуск, x_j
	I	II	III		
I	x_{11}	x_{12}	x_{13}	y_1	x_1
II	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_2	x_2
III	x_{31}	x_{32}	x_{33}	y_3	x_3

Требуется:

1) найти матрицу прямых затрат, отвечающую вектору валового выпуска $X = (x_1, x_2, x_3)$;

2) найти матрицы полных и косвенных затрат;

3) рассчитать валовой выпуск $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right)$ на новый ассортимент конечного продукта $Y^* = \left(y_1^*, y_2^*, y_3^*\right)$, если объем конечного продукта первой отрасли увеличивается на $\alpha\%$, второй отрасли уменьшается на $\beta\%$, а величина конечного продукта третьей отрасли не меняется.

Необходимые числовые данные для каждого варианта приведены в таблице 1:

Таблица 1

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	$\alpha\%$	$\beta\%$
2.01	17	21	13	12	15	14	21	30	20	110	100	100	59	59	29	1	2
2.02	13	13	5	5	10	4	4	20	7	60	100	80	29	81	49	3	5
2.03	14	23	50	10	15	30	13	40	10	90	100	100	3	45	37	2	4
2.04	27	14	23	30	16	15	21	15	12	110	100	80	46	39	32	5	3
2.05	23	7	14	15	16	17	21	8	5	60	80	50	16	32	16	4	5
2.06	24	16	50	34	17	10	18	31	15	110	80	110	20	19	46	2	6
2.07	45	23	51	18	13	14	21	17	15	130	80	100	11	35	47	8	7
2.08	21	45	45	60	14	43	12	17	60	130	130	150	19	13	61	12	15
2.09	61	45	30	70	40	10	10	40	15	230	200	100	94	80	35	3	8
2.10	35	8	11	6	9	12	7	10	13	60	40	50	6	13	20	10	6
2.11	10	13	21	17	9	8	15	14	13	50	50	60	6	16	18	12	5
2.12	16	14	25	4	7	14	15	13	25	70	50	80	15	25	27	5	10

2.13	10	13	17	14	12	4	16	25	19	100	80	80	60	50	20	3	4
2.14	15	13	12	11	5	4	18	6	7	50	50	40	10	30	9	4	8
2.15	110	150	60	90	70	100	45	25	40	400	300	250	80	40	140	6	2
2.16	21	15	14	70	8	16	3	17	21	210	100	60	160	6	19	3	10
2.17	15	14	13	12	11	10	19	8	7	100	100	110	58	67	76	5	2
2.18	21	14	20	17	16	15	13	15	30	110	80	70	55	32	12	1	15
2.19	44	13	60	70	21	15	20	51	30	180	150	150	63	44	49	20	5
2.20	15	8	20	13	7	21	4	12	15	50	110	100	7	69	69	30	10
2.21	110	80	90	70	30	40	100	10	15	300	210	150	20	70	25	6	3
2.22	70	60	10	45	14	50	10	20	40	200	130	110	60	21	40	50	10
2.23	110	45	30	21	30	60	50	70	10	230	150	150	45	39	20	10	20
2.24	50	40	23	17	20	16	51	31	20	160	110	150	47	57	48	30	15
2.25	110	31	60	50	34	16	80	70	20	300	220	200	99	120	30	9	4
2.26	3	10	15	17	12	17	14	16	18	50	60	100	22	14	52	15	6
2.27	31	22	81	17	33	15	46	51	17	200	150	180	66	85	66	40	18
2.28	17	15	19	16	17	21	31	18	37	160	80	100	109	26	14	60	20
2.29	52	14	13	17	50	81	13	10	50	210	200	200	131	52	127	12	8
2.30	12	13	51	21	16	14	71	45	13	150	100	180	74	49	51	20	15

Задание 3. Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти:
а) уравнение стороны AB;
б) уравнение медианы AK;
в) уравнение высоты CH;
г) расстояние от точки C до прямой AB;
д) площадь треугольника ABC.

Необходимые числовые данные для каждого варианта приведены в таблице 2:

Таблица 2

	A	***B***	***C***		***A***	***B***	***C***
3.01	$(-2;4)$;	$(3;1)$;	$(5;8)$.	**3.02**	$(14;4)$;	$(-3;-2)$;	$(6;8)$.
3.03	$(10;-3)$;	$(-3;-1)$;	$(1;7)$.	**3.04**	$(3;1)$;	$(-3;-1)$;	$(5;-12)$.
3.05	$(4;3)$;	$(-3;-3)$;	$(2;7)$.	**3.06**	$(4;6)$;	$(-4;0)$;	$(-1;-4)$.
3.07	$(-6;-6)$;	$(-3;-1)$;	$(2;3)$.	**3.08**	$(-4;2)$;	$(3;-5)$;	$(5;0)$.
3.09	$(1;2)$;	$(3;7)$;	$(5;-13)$.	**3.10**	$(3;1)$;	$(5;4)$;	$(1;3)$.
3.11	$(2;-1)$;	$(4;5)$;	$(5;-13)$.	**3.12**	$(4;6)$;	$(-4;2)$;	$(1;-4)$.
3.13	$(-2;-2)$;	$(4;5)$;	$(7;7)$.	**3.14**	$(0;5)$;	$(2;2)$;	$(-4;-6)$.
3.15	$(-3;6)$;	$(3;4)$;	$(6;-3)$.	**3.16**	$(-6;2)$;	$(2;-2)$;	$(5;10)$.

3.17	$(-6;-3)$;	$(-4;3)$;	$(9;2)$.
3.19	$(-4;2)$;	$(-2;-2)$;	$(6;8)$.
3.21	$(3;6)$;	$(1;-2)$;	$(-5;2)$.
3.23	$(2;3)$;	$(4;-1)$;	$(-3;5)$.
3.25	$(-2;4)$;	$(0;7)$;	$(1;-4)$.
3.27	$(-4;6)$;	$(3;-8)$;	$(-7;-2)$.
3.29	$(-7;3)$;	$(-7;-2)$;	$(5;-5)$.

3.18	$(-3;6)$;	$(3;-4)$;	$(6;3)$.
3.20	$(3;5)$;	$(6;-2)$;	$(-4;-1)$.
3.22	$(-2;-1)$;	$(6;5)$;	$(1;3)$.
3.24	$(3;5)$;	$(-1;3)$;	$(1;-3)$.
3.26	$(-3;-1)$;	$(-4;-5)$;	$(8;1)$.
3.28	$(10;2)$;	$(-3;1)$;	$(4;-5)$.
3.30	$(-4;2)$;	$(4;10)$;	$(6;-4)$.

Задание 4.01-4.10 Мебельная фабрика продает каждый изготовленный стул по a руб. При этом издержки составляют b руб. за 8 стульев и c руб. за 13 стульев. Найти точку безубыточности, если функция издержек линейная.

Необходимые числовые данные приведены в таблице 3.

Таблица 3

	4.01	**4.02**	**4.03**	**4.04**	**4.05**	**4.06**	**4.07**	**4.08**	**4.09**	**4.10**
a	25	30	30	35	15	40	45	20	35	40
b	200	250	200	250	200	300	300	200	300	350
c	250	375	250	375	250	450	450	250	450	500

Задание 4.11-4.20 Полные издержки y по производству x единиц продукции на двух предприятиях выражаются соответственно формулами:

	4.11	**4.12**	**4.13**	**4.14**	**4.15**
L_1	$y=0{,}4x+3$	$y=0{,}7x+3$	$y=0{,}6x+2$	$y=0{,}9x+2$	$y=0{,}8x+5$
L_2	$y=0{,}3x+5$	$y=0{,}5x+6$	$y=0{,}5x+3$	$y=0{,}7x+7$	$y=0{,}2x+8$

	4.16	**4.17**	**4.18**	**4.19**	**4.20**
L_1	$y=0{,}9x+4$	$y=0{,}8x+1$	$y=0{,}9x+5$	$y=0{,}7x+1$	$y=0{,}5x+1$
L_2	$y=0{,}6x+7$	$y=0{,}4x+3$	$y=0{,}4x+9$	$y=0{,}3x+7$	$y=0{,}1x+9$

где x – объем продукции (усл. ед.), а y – соответствующие полные издержки (млн руб.). Требуется выяснить, начиная с какого объема продукции более экономичным становится второе предприятие.

Задание 4.21-4.30 Между пунктами A и B (на плане местности размеры даны в километрах) проложена прямолинейно волоконно-оптическая линия связи. Необходимо подключить к этой линии пункт C по кратчайшему расстоянию. Найти точку подключения D и длину необходимого для этого оптоволоконного кабеля.

Необходимые числовые данные приведены в таблице 4.

Таблица 4

	4.21	4.22	4.23	4.24	4.25	4.26	4.27	4.28	4.29	4.30
A	(3;1)	(1;5)	(6;6)	(4;1)	(10;5)	(9;4)	(10;2)	(5;6)	(9;1)	(3;7)
B	(5;3)	(2;3)	(7;8)	(2;2)	(8;3)	(7;3)	(7;5)	(3;5)	(3;3)	(1;4)
C	(5;8)	(6;7)	(5;2)	(1;2)	(5;5)	(3;2)	(4;2)	(2;10)	(5;4)	(8;1)

Задание 5. Найти пределы.

	а)	б)	в)
5.01	$\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4+8x^3+2}{x^4+6x^2-5x}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^{x+3}$.
5.02	$\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x+12}}{x^2+x-12}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+7x+2}{1-x+2x^2}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 2x}$.
5.03	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x^2+6x}-4}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+9}{5x^2-7x+4}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{2x-1}$.
5.04	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{x+4}}{2x^2-3x+1}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2-5}{x^3+3x^2-4x+1}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,2x}{\sin 5x}$.
5.05	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2x+9}-\sqrt{x+7}}{x^2+5x+6}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+5}{x+2x^2+7x^3}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{2-x}$.
5.06	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+10}-4}{x^2-5x+6}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-5}{7x^2-x-10}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 18x}{9x^2}$.
5.07	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{x+3}}{x^2+5x-6}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+x+1}{4+3x-x^2}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^{3x+1}$.
5.08	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+x^2+2x}{x^3-x+3}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,2x}{4x}$.
5.09	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+2x}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^3-1}{3x^4+4x^2+5x}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{4x+2}$.
5.10	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+2x}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-7}{4-x-x^2+x^3}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,6x}{\sin 3x}$.
5.11	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+6}-2\sqrt{2}}{2x^2-5x+3}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x+3}{9x^2-x+5}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x-4}\right)^{5x+1}$.
5.12	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-8}{\sqrt{6-x}-\sqrt{2+x}}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+7x+3x^2}{1-3x-3x^2}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3\frac{x}{2}}{x^3}$.
5.13	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{11-3x}-\sqrt{x-1}}{x^2-5x+6}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+2x+9}{3x^2-5x+1}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-1}\right)^{x+5}$.

	а)	б)	в)
5.14	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{6+3x}-\sqrt{10-x}}{x^2-3x+2}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2+4x+1}$;	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^3-1}$.
5.15	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{2-x^2}}{2x^2-5x+3}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^2+x-8}{5x^2-3x+1}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+5}\right)^{x-2}$.
5.16	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-5x-7}{\sqrt{3-x}-\sqrt{5+x}}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^2+3}{2x^4-7x^3+2}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 8x}$.
5.17	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-3x^2+9}{2x^3+9x+1}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{2x+3}$.
5.18	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}{2x^2-x-1}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-x+12}{x^3+7x+1}$;	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}$.
5.19	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-75}{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+22}}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-5}{5x^2-x+1}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+10}{4x+5}\right)^{4x-2}$.
5.20	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2-3x+1}{3x^2+x-7}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x^2-8x}$.
5.21	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-x}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-2x^3+2}{x^4-3x+7}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)^{x+2}$.
5.22	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x(x+2)}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-2x^2+5x^4}{9+7x-x^4}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 14x}{4x^2}$.
5.23	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+6}{4x^2+2x+8}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x-5}$.
5.24	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-5x^2+2}{2x^3+4x^2+x}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x}{3x}$.
5.25	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-1}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^3+9x+4}{2x^3-4x^2+3}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.
5.26	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{10x^2+x-2}$;	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(3-x)}{9-x^2}$.
5.27	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2-5x+6}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7-4x+2x^2}{2x^2+5}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-x}{6-x}\right)^{x+2}$.
5.28	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+3x-7x^2}{1+x+8x^2}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{15x-5x^2}$.
5.29	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-5x-7}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-x^3+1}{x^4+x^2-2x}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x}$.

	а)	б)	в)
5.30	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{1-x}}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-4x-5}{4+2x+3x^2}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 15x}{\sin 3x}$.

Задание 6. Найти производные следующих функций.

6.01 а) $y=3x^3-\sqrt[5]{x^2}+\dfrac{2}{x}+1$;

б) $y=\left(x^2-4\right)\cdot \operatorname{tg}^2 3x$;

в) $y=\dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2-4x+2}}$.

6.02 а) $y=\dfrac{6}{x^3}+\dfrac{2}{x}-\sqrt[3]{x^2}+2$;

б) $y=\left(x^2+3x\right)\cdot \sin 5x^2$;

в) $y=\dfrac{(x+4)^2}{e^{\operatorname{arctg} x}}$.

6.03 а) $y=4x^2-\dfrac{5}{x}+\sqrt[5]{x^3}+\dfrac{1}{x^3}$;

б) $y=\left(1+2x^2\right)\cdot \cos 3x^2$;

в) $y=\dfrac{e^{-\operatorname{ctg} 5x}}{\sqrt{3x^2-x+4}}$.

6.04 а) $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{2}{x}+\sqrt[6]{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

б) $y=\left(4-x^2\right)\cdot \operatorname{tg}\sqrt{x}$;

в) $y=\dfrac{\sqrt{6x^2+3x-1}}{e^{-\cos x}}$.

6.05 а) $y=4-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{7}{\sqrt[3]{x^2}}$;

б) $y=\left(x^2-3x+1\right)\cdot \sin^2 2x$;

в) $y=\dfrac{e^{\operatorname{tg} 3x}}{\sqrt{3x^2+x+4}}$.

6.06 а) $y=2x+\dfrac{3}{x^5}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{4}{x}$;

б) $y=\left(2x^2-5\right)\cdot \sin 3x^2$;

в) $y=\dfrac{e^{\cos 4x}}{(4-x)^6}$.

6.07 а) $y=2x^5-\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{6}{x}+3\sqrt{x}$;

б) $y=\left(1-4x^2\right)\cdot \operatorname{tg}\sqrt[3]{x}$;

в) $y=\dfrac{\sqrt[3]{2x^2-3x+5}}{e^{-x}}$.

6.08 а) $y=x\sqrt[3]{x}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+3$;

б) $y=\left(3+7x^2\right)\cdot \cos(3x+1)$;

в) $y=\dfrac{\sqrt{x^3+4x+1}}{e^{x^2}}$.

6.09 а) $y=3x^5-\dfrac{2}{x\sqrt{x}}+\dfrac{7}{x^2}+3$;

6.10 а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2x^3}+\sqrt[7]{x^2}$;

б) $y=\left(6-3x^2\right)\cdot\cos\left(2\sqrt{x}-1\right)$;

в) $y=\dfrac{e^{-\operatorname{ctg}3x}}{(2x+7)^3}$.

б) $y=\left(1-3x^2\right)\cdot\operatorname{tg}^2 3x$;

в) $y=\dfrac{\sqrt{3-x-2x^2}}{e^{-x^3}}$.

6.11 а) $y=8x^2-x^2\cdot\sqrt[3]{x}+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^3}$;

б) $y=\left(3x^2+5\right)\cdot\operatorname{tg}3x^2$;

в) $y=\dfrac{e^{-3x}}{\sqrt{3x^2-4x+7}}$.

6.12 а) $y=x^3-\dfrac{8}{x^2}+3\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}$;

б) $y=(2x-\sin 2x)\cdot\left(1-3x^3\right)^2$;

в) $y=\dfrac{e^{-\cos x^2}}{\sqrt{x^2-4x+5}}$.

6.13 а) $y=4x^4-\dfrac{7}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^3}$;

б) $y=\left(1+\cos^2 x\right)\cdot(1+4x)^2$;

в) $y=\dfrac{e^{-\sin 5x}}{\sqrt{x^2+2x}}$.

6.14 а) $y=2\sqrt{x^3}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{6}{x^2}+3x$;

б) $y=\left(2+\ln^2 x\right)\cdot\left(4+3x^2\right)$;

в) $y=\dfrac{e^{\operatorname{ctg}7x}}{\sqrt{x^2+5x+6}}$.

6.15 а) $y=2x+x^2\sqrt{x}-\dfrac{3}{x^4}+\dfrac{9}{x}$;

б) $y=\left(1+\sqrt{x}\right)\cdot\ln\left(3x^2+2\right)$;

в) $y=\dfrac{(2x+5)^3}{e^{\operatorname{tg}3x}}$.

6.16 а) $y=3x^3-\dfrac{3}{x}+\sqrt[3]{x^5}+\dfrac{1}{x^4}$;

б) $y=\left(7x^2+14x\right)\cdot\operatorname{ctg}\sqrt{2x}$;

в) $y=\dfrac{e^{-\operatorname{tg}5x}}{4x^2-3x+5}$.

6.17 а) $y=\dfrac{1}{x}+x\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{2}{x^2}+3\sqrt{x}$;

б) $y=\left(6x^3-18x\right)(2+3\cos 3x)$;

в) $y=\dfrac{3x^2-5x+10}{e^{-x^2}}$.

6.18 а) $y=8x^3-\dfrac{5}{x^4}+\dfrac{1}{x}+2\sqrt[3]{x^5}$;

б) $y=\left(3x^3+9x\right)\cdot(x-\ln x)$;

в) $y=\dfrac{e^{-\sin 4x}}{(5-2x)^3}$.

6.19 а) $y=\dfrac{6}{x^3}-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+6x$;

6.20 а) $y=x^3-\dfrac{7}{\sqrt{x}}+3x^2\cdot\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$;

б) $y=\left(1-2x^3\right)\left(tg^2x+2\right);$

в) $y=\dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{2x^2-x+4}}.$

б) $y=\left(1+\ln\left(x^2+1\right)\right)\cdot\sin 5x;$

в) $y=\dfrac{(3x+5)^3}{e^{4x+2}}.$

6.21 а) $y=\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}+x\sqrt{x};$

б) $y=\sqrt[3]{6x+3}\cdot\cos^2 x;$

в) $y=\dfrac{5x^2+4x+3}{e^{-x}}.$

6.22 а) $y=2x^3-\dfrac{8}{x^2}-\dfrac{3}{\sqrt{x}}+x^2\cdot\sqrt[3]{x};$

б) $y=\sqrt[3]{x^2+2x+1}\cdot\ln(3x+2);$

в) $y=\dfrac{e^{-\sin 2x}}{(2x-5)^3}.$

6.23 а) $y=5+2\sqrt[6]{x}+\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x};$

б) $y=e^{-2x}\left(1+\cos 6x\right);$

в) $y=\dfrac{\sqrt{5x^2+3x+1}}{\ln(2x+3)}.$

6.24 а) $y=6x^3-\dfrac{1}{x^3}+\sqrt{x^3}+\dfrac{3}{x};$

б) $y=\sqrt[3]{3x+2}\cdot\operatorname{ctg}4x^2;$

в) $y=\dfrac{e^{\sin 5x}}{(3x-2)^2}.$

6.25 а) $y=2\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{x^3};$

б) $y=\operatorname{tg}\sqrt{x}\cdot(2x+7)^3;$

в) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-3x+1}}{e^{-\cos 2x}}.$

6.26 а) $y=\dfrac{9}{x^3}-\dfrac{6}{x}-5x^3+3x\cdot\sqrt[5]{x};$

б) $y=\left(x^4+3x^2\right)\cdot e^{1-2x};$

в) $y=\dfrac{\operatorname{tg}^2(3x+1)}{\sqrt{x^2+4x}}.$

6.27 а) $y=7x^3+\dfrac{3}{x}-\sqrt[5]{x^4}+\dfrac{5}{x^3};$

б) $y=\sqrt{x^2+3x+4}\cdot\left(1-\cos 3x^2\right);$

в) $y=\dfrac{(3x+6)^3}{e^{-\sin 6x}}.$

6.28 а) $y=4x^2+\dfrac{4}{x}+4x^4\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}};$

б) $y=\left(2-3x^2\right)\cdot\sqrt{1+\sin 2x};$

в) $y=\dfrac{e^{3+x^2}}{x^2+4x+9}.$

6.29 а) $y=6-\dfrac{2}{x^4}+x^3\cdot\sqrt{x}-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}};$

6.30 а) $y=10x^2-\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}+\sqrt[5]{x^4};$

б) $y = \sqrt[3]{3x^2 - 6x} \cdot (1 + \sin 3x)$;

б) $y = (1 - x - 2x^2)(2 - 3\ln x)$;

в) $y = \dfrac{e^{-\operatorname{tg} x^2}}{x^2 + 4x + 9}$.

в) $y = \dfrac{e^{-2\cos 3x}}{\sqrt{4 + 2x^2}}$.

Задание 7. Зависимость между издержками производства C и объемом выпускаемой продукции q выражается функцией

$$C(q) = \alpha q - \beta q^3 \text{ (ден. ед.).}$$

Требуется:

а) найти непосредственно приращение издержек при изменении объема выпуска от величины q_0 до $q_0 + \Delta q$;

б) найти средние и предельные издержки при объеме выпуска, равном q_0;

в) с помощью дифференциала найти приращение издержек при изменении объема выпуска от q_0 до $q_0 + \Delta q$. Указать абсолютную и относительную погрешность замены приращения функции C ее дифференциалом;

г) вычислить эластичность издержек при объеме выпуска q_0;

д) при каком объеме выпуска продукции издержки будут максимальными?

Необходимые числовые данные приведены в таблице 5.

Таблица 5

	7.01	**7.02**	**7.03**	**7.04**	**7.05**	**7.06**	**7.07**	**7.08**	**7.09**	**7.10**
α	3375	1200	600	1875	900	1500	1800	2160	2940	1521
β	0,05	0,01	0,02	0,04	0,03	0,03	0,06	0,05	0,05	0,03
q_0	60	20	15	19	25	30	53	18	20	25
Δq	0,1	-0,2	-0,2	0,15	0,12	-0,14	0,08	-0,15	0,21	-0,01

	7.11	**7.12**	**7.13**	**7.14**	**7.15**	**7.16**	**7.17**	**7.18**	**7.19**	**7.20**
α	1452	1536	972	1344	1944	1176	2028	1734	1500	1350
β	0,04	0,02	0,04	0,07	0,02	0,08	0,04	0,02	0,05	0,02
q_0	37	30	44	28	23	53	19	24	30	29
Δq	-0,13	0,08	-0,15	0,21	-0,11	0,07	0,06	-0,05	0,15	0,06

	7.21	**7.22**	**7.23**	**7.24**	**7.25**	**7.26**	**7.27**	**7.28**	**7.29**	**7.30**
α	1764	1296	1215	3042	2100	1875	2025	1083	3750	1536
β	0,03	0,03	0,05	0,06	0,07	0,04	0,03	0,01	0,08	0,02
q_0	45	36	41	30	28	42	33	50	37	24
Δq	-0,03	0,13	0,08	-0,25	0,16	-0,05	-0,04	0,12	0,14	-0,08

Решение типового варианта контрольной работы

Задание 1. Проверить совместность системы линейных уравнений и в случае совместности решить ее тремя способами:

1) матричным методом (с помощью обратной матрицы);
2) по формулам Крамера;
3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9, \\ x + 2y - 3z = 14, \\ 3x + 4y + z = 16. \end{cases} \qquad (1)$$

Решение

1. Матричный метод решения.

Систему (1) можно записать в виде матричного уравнения

$$A \cdot X = B, \qquad (2)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Решение матричного уравнения (2):

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

где A^{-1} – обратная матрица для матрицы A.

Матрицу A^{-1} находим по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где $\Delta \neq 0$ – определитель матрицы A; A_{ij} - алгебраические дополнения элементов a_{ij} определителя транспонированной матрицы A.

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -6.$$

Вычислим алгебраические дополнения элементов этого определителя:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-2; \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1; \qquad A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1.$$

Следовательно:

$$A^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}14 & 5 & -13\\ -10 & -4 & 8\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Откуда

$$X=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}14 & 5 & -13\\ -10 & -4 & 8\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\ 14\\ 16\end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}126+70-208\\ -90-56+128\\ -18+14+16\end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-12\\ -18\\ 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -2\end{pmatrix}.$$

Таким образом

$$\begin{cases}x=2,\\ y=3,\\ z=-2.\end{cases}$$

Ответ: $(2,3,-2)$

2. По формулам Крамера.

Вычислим главный определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & 4 & 1\end{vmatrix}=4-27+8-12-3+24=-6\neq 0.$$

Так как $\Delta\neq 0$, то система совместна.

Вычислим определители, полученные из главного замещением соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}9 & 3 & 2\\ 14 & 2 & -3\\ 16 & 4 & 1\end{vmatrix}=18-144+112-64+108-42=-12.$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 9 & 2\\ 1 & 14 & -3\\ 3 & 16 & 1\end{vmatrix}=28-81+32-84+96-9=-18.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 14 \\ 3 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 64 + 126 + 36 - 54 - 112 - 48 = 12.$$

По формулам Крамера получим

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-12}{-6} = 2; \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-18}{-6} = 3; \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{12}{-6} = -2.$$

Таким образом, $\begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \\ z = -2, \end{cases}$ – решение системы (1).

3. Метод Гаусса. По данным системы составим расширенную матрицу и с помощью элементарных преобразований строк приведем ее к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & -3 & 14 \\ 3 & 4 & 1 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & 8 & -19 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & 8 & -19 \\ 0 & 0 & 12 & -24 \end{pmatrix}.$$

Первая строка записана без изменений во всех преобразованиях.

Вторая строка второго преобразования получена из первой строки вычитанием удвоенных элементов второй строки первого преобразования.

Третья строка второго преобразования получена вычитанием из утроенной первой строки, удвоенной третьей строки первого преобразования. Третья строка третьего преобразования получена сложением второй и третьей строк второго преобразования.

Последней матрице третьего преобразования соответствует система, эквивалентная исходной:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9, \\ -y + 8z = -19, \\ 12z = -24. \end{cases} \qquad (3)$$

Получением системы (3) из (1) завершен прямой ход метода Гаусса. Из (3), двигаясь снизу вверх, реализуем обратный ход метода Гаусса.

$$z = -\frac{24}{12} = -2; \; y = 8z + 19 = 19 - 16 = 3; \; x = \frac{1}{2}(9 - 2z - 3y) = \frac{1}{2}(9 + 4 - 9) = 2.$$

Итак: $\begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \\ z = -2. \end{cases}$ – решение системы (1).

Задание 2. В таблице представлены данные об использовании баланса за отчетный период (усл. ден. ед.).

Отрасли производства	Потребляющие отрасли: межотраслевые потоки текущих затрат, x_{ij}			Конечный продукт, y_i	Валовый выпуск, x_j
	I	II	III		
I	30	30	20	120	200
II	40	45	20	45	150
III	32	18	40	160	250

Требуется:

1) найти матрицу прямых затрат, отвечающую вектору валового выпуска $X = \left(x_1, x_2, x_3\right)$;

2) найти матрицы полных и косвенных затрат;

3) рассчитать валовой выпуск $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right)$ на новый ассортимент конечного продукта $Y^* = \left(y_1^*,\ y_2^*,\ y_3^*\right)$, если объем конечного продукта первой отрасли увеличивается на 6%, второй отрасли уменьшается на 7%, а величина конечного продукта третьей отрасли не меняется.

Решение

Матричное уравнение межотраслевого баланса имеет вид

$$A\,X + Y = X; \qquad A\,X + Y = E\,X; \quad E\,X - A\,X = Y; \quad (E - A)\,X = Y.$$

1. Выпишем матрицы, входящие в уравнение

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 250 \end{pmatrix}; \qquad Y = \begin{pmatrix} 120 \\ 45 \\ 160 \end{pmatrix}.$$

Матрица A – структурная матрица межотраслевого баланса. Элементы матрицы A являются коэффициентами прямых затрат. Они определяются по формуле

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}.$$

В нашем случае будем иметь

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{30}{200} = 0{,}15; \quad a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{30}{150} = 0{,}20; \quad a_{13} = \frac{x_{13}}{x_3} = \frac{20}{250} = 0{,}08;$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{40}{200} = 0{,}20; \quad a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{45}{150} = 0{,}30; \quad a_{23} = \frac{x_{23}}{x_3} = \frac{20}{250} = 0{,}08;$$

$$a_{31} = \frac{x_{31}}{x_1} = \frac{32}{200} = 0{,}16; \quad a_{32} = \frac{x_{32}}{x_2} = \frac{18}{150} = 0{,}12; \quad a_{33} = \frac{x_{33}}{x_3} = \frac{40}{250} = 0{,}16.$$

Следовательно, структурная матрица примет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}20 & 0{,}08 \\ 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}08 \\ 0{,}16 & 0{,}12 & 0{,}16 \end{pmatrix}.$$

Матрица A продуктивна, т.к. все ее элементы положительны и сумма ее элементов по любому столбцу и по любой строке меньше единицы.

Матрица A – искомая матрица прямых затрат.

2. Решая уравнение $(E - A)X = Y$, получим, что

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y .$$

Найдем матрицу $(E - A)^{-1}$, которая называется матрицей полных затрат.

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}20 & 0{,}08 \\ 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}08 \\ 0{,}16 & 0{,}12 & 0{,}16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}85 & -0{,}20 & -0{,}08 \\ -0{,}20 & 0{,}70 & -0{,}08 \\ -0{,}16 & -0{,}12 & 0{,}84 \end{pmatrix}.$$

$$\det\left(E - A\right) = \begin{vmatrix} 0{,}85 & -0{,}20 & -0{,}08 \\ -0{,}20 & 0{,}70 & -0{,}08 \\ -0{,}16 & -0{,}12 & 0{,}84 \end{vmatrix} = 0{,}85 \cdot (0{,}70 \cdot 0{,}84 - 0{,}12 \cdot 0{,}08) -$$

$$-(-0{,}20) \cdot (-0{,}84 \cdot 0{,}20 - 0{,}16 \cdot 0{,}08) + (-0{,}08) \cdot (0{,}20 \cdot 0{,}12 + 0{,}16 \cdot 0{,}70) =$$

$$= 0{,}85 \cdot 0{,}5784 + 0{,}20 \cdot (-0{,}1808) - 0{,}08 \cdot 0{,}1360 = 0{,}4446.$$

Так как $\det\left(E - A\right) \neq 0$, то обратная матрица существует и единственна. Вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы $E - A$:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0{,}70 & -0{,}08 \\ -0{,}12 & 0{,}84 \end{vmatrix} = 0{,}70 \cdot 0{,}84 - (-0{,}08) \cdot (-0{,}12) = 0{,}5784;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -0{,}20 & -0{,}08 \\ -0{,}16 & 0{,}84 \end{vmatrix} = -(-0{,}20 \cdot 0{,}84 - (-0{,}08) \cdot (-0{,}16)) = 0{,}1808;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -0{,}20 & 0{,}70 \\ -0{,}16 & -0{,}12 \end{vmatrix} = (-0{,}20) \cdot (-0{,}12) - 0{,}70 \cdot (-0{,}16) = 0{,}1360;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -0{,}20 & -0{,}08 \\ -0{,}12 & 0{,}84 \end{vmatrix} = -(-0{,}20 \cdot 0{,}84 - (-0{,}08) \cdot (-0{,}12)) = 0{,}1776;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 0{,}85 & -0{,}08 \\ -0{,}16 & 0{,}84 \end{vmatrix} = 0{,}85 \cdot 0{,}84 - (-0{,}08) \cdot (-0{,}16) = 0{,}7012;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 0{,}85 & -0{,}20 \\ -0{,}16 & -0{,}12 \end{vmatrix} = -(0{,}85 \cdot (-0{,}12) - (-0{,}20) \cdot (-0{,}16)) = 0{,}1340;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -0{,}20 & -0{,}08 \\ 0{,}70 & -0{,}08 \end{vmatrix} = -0{,}20 \cdot (-0{,}08) - 0{,}70 \cdot (-0{,}08) = 0{,}0720;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 0,85 & -0,08 \\ -0,20 & -0,08 \end{vmatrix} = -(0,85\cdot(-0,08)-(-0,20)\cdot(-0,08)) = 0,0840;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 0,85 & -0,20 \\ -0,20 & 0,70 \end{vmatrix} = 0,85\cdot 0,70-(-0,20)\cdot(-0,20) = 0,5550.$$

$$(E-A)^{-1} = \frac{1}{0,4446}\begin{pmatrix} 0,5784 & 0,1776 & 0,0720 \\ 0,1808 & 0,7012 & 0,0840 \\ 0,1360 & 0,1340 & 0,5550 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,3009 & 0,3995 & 0,1619 \\ 0,4067 & 1,5771 & 0,1889 \\ 0,3059 & 0,3014 & 1,2483 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы $S=(E-A)^{-1}$ и являются коэффициентами полных затрат.

Матрица косвенных затрат равна:

$$S-A = \begin{pmatrix} 1,3009 & 0,3995 & 0,1619 \\ 0,4067 & 1,5771 & 0,1889 \\ 0,3059 & 0,3014 & 1,2483 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,15 & 0,20 & 0,08 \\ 0,20 & 0,30 & 0,08 \\ 0,16 & 0,12 & 0,16 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1,1509 & 0,1995 & 0,0819 \\ 0,2067 & 1,2771 & 0,1089 \\ 0,1459 & 0,1814 & 1,0883 \end{pmatrix}.$$

3. Предположим, что объем конечного продукта по первой отрасли увеличился на 6%, по второй – уменьшился на 7%, а по третьей – не изменился. Это значит, что новый конечный продукт будет определяться вектором $Y^*=\left(y_1^*, y_2^*, y_3^*\right)$, где

$$y_1^* = 120\cdot\left(1+\frac{6}{100}\right) = 120\cdot 1,06 = 127,2,$$

$$y_2^* = 45\cdot\left(1-\frac{7}{100}\right) = 45\cdot 0,93 = 41,85,$$

$$y_3^* = 160.$$

Тогда необходимый объем валового выпуска по отраслям для вектора конечного продукта $Y^*=(127,2;\ 41,85;\ 160)$ будет равен:

$$X^* = S\cdot Y^* = \begin{pmatrix} 1,3009 & 0,3995 & 0,1619 \\ 0,4067 & 1,5771 & 0,1889 \\ 0,3059 & 0,3014 & 1,2483 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 127,2 \\ 41,85 \\ 160 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 208,1085 \\ 147,9599 \\ 251,2530 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая компоненты векторов X и X^*, приходим к заключению: если объемы конечного продукта по первой отрасли увеличить на 6%, по второй уменьшить на 7%, а по третьей не изменять, то валовой выпуск по первой отрасли увеличится на 4,05%, т.к.

$$\frac{x_1^* - x_1}{x_1} \cdot 100 = \frac{208{,}1085 - 200}{200} \cdot 100 = 4{,}05\%.$$

Аналогично определяем, что валовой выпуск по второй отрасли уменьшится на 1,36%, а по третьей увеличится на 0,5%.

Задание 3. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(1;\,2)$, $B(2;\,5)$ и $C(-6;\,-3)$. Найти:

а) уравнение стороны AB;
б) уравнение медианы AK;
в) уравнение высоты CH;
г) расстояние от точки C до прямой AB;
д) площадь треугольника ABC.

Решение

а) Уравнение стороны AB запишем по формуле

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}.$$

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{5-2}; \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3}; \quad 3(x-1) = y-2; \quad y = 3x-1.$$

Угловой коэффициент прямой AB равен $k_{AB} = 3$.

Общее уравнение прямой AB: $3x - y - 1 = 0$.

б) Находим координаты точки K – середины стороны BC:

$$x_K = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2-6}{2} = -2,$$

$$y_K = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{5-3}{2} = 1,$$

$$K(-2;\,1).$$

Уравнение медианы АК:

$$\frac{x - x_A}{x_K - x_A} = \frac{y - y_A}{y_K - y_A};$$

$$\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y-2}{1-2}; \quad \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{-1}; \quad x-1 = 3(y-2); \quad x - 3y + 5 = 0;$$

Общее уравнение медианы АК: $x - 3y + 5 = 0$.

в) Угловой коэффициент прямой AB равен $k_{AB} = 3$. Тогда угловой коэффициент прямой СН находим из равенства

$$k_{AB} \cdot k_{CH} = -1,$$

т.е.

$$k_{CH} = -\frac{1}{3}.$$

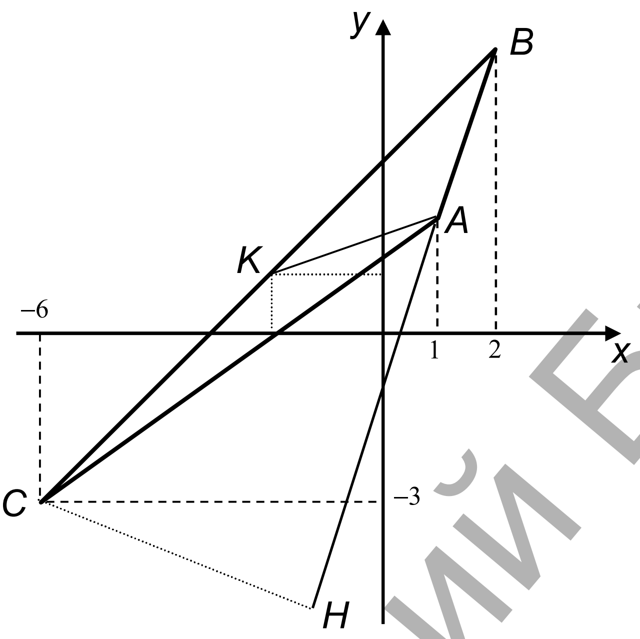
Уравнение прямой CH:

$$y - y_C = k_{CH}(x - x_C);$$

$$y + 3 = -\frac{1}{3}(x+6); \quad 3y + x + 15 = 0.$$

Общее уравнение высоты CH: $3y + x + 15 = 0$.

Проиллюстрируем решение:



г) Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой L: $Ax + By + C = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

В нашем случае расстояние от точки $C(-6; -3)$ до прямой AB: $3x - y - 1 = 0$ равно:

$$d = |CH| = \frac{|3\cdot(-6) - 1\cdot(-3) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{16}{\sqrt{10}} = \frac{8}{5}\sqrt{10}.$$

д) Площадь треугольника АВС равна:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|CH|.$$

Так как $|AB| = \sqrt{(2-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{10}$, то

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{16}{\sqrt{10}} = 8\,(кв.ед.)$$

Ответ. а) $AB: 3x - y - 1 = 0$; б) $AK: x - 3y + 5 = 0$;

в) $CH: 3y + x + 15 = 0$; г) $|CH| = \frac{8}{5}\sqrt{10}$;

д) $S_{\Delta ABC} = 8\,(кв.ед.)$.

Задание 4.01-4.10 Мебельная фабрика продает каждый изготовленный стул по 64 руб. При этом издержки составляют 635 руб. за 8 стульев и 750 руб. за 13 стульев. Найти точку безубыточности, если функция издержек линейная.

Решение

Точка безубыточности – это объём производства и реализации продукции, при котором издержки будут компенсированы доходами, а при производстве и реализации каждой последующей единицы продукции предприятие начинает получать прибыль.

Построим функцию издержек $C(x)$ как прямую, проходящую через точки $M_1(8; 635)$ и $M_2(13; 750)$. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

В нашем случае:

$$\frac{x-8}{13-8}=\frac{y-635}{750-635}; \;\Rightarrow\; 115(x-8)=5(y-635); \;\Rightarrow\; 23(x-8)=y-635;$$

$$y=23x+451.$$

Итак, $C(x)=23x+451$.

Функция выручки по условию имеет вид $R(x)=64x$.

Найдем точку безубыточности как абсциссу точки пересечения графиков функций $C(x)$ и $R(x)$. Для этого решим уравнение $C(x)=R(x)$.

$$23x+451=64x;$$
$$x=11.$$

Ответ. 11 стульев.

Задание 4.11-4.20 Полные издержки y по производству x единиц продукции на двух предприятиях выражаются соответственно формулами:

$$L_1: y=0{,}7x+2 \text{ и } L_2: y=0{,}5x+4,$$

где x – объем продукции (усл. ед.), а y – соответствующие полные издержки (млн руб.). Требуется выяснить, начиная с какого объема продукции более экономичным становится второе предприятие.

Решение

Найдем координаты точки пересечения прямых L_1 и L_2, решив следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y=0{,}7x+2, \\ y=0{,}5x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}7x+2=0{,}5x+4, \\ y=0{,}5x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}2x=2, \\ y=0{,}5x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10, \\ y=9. \end{cases}$$

Следовательно, точка A пересечения прямых имеет координаты $x=10$ и $y=9$. Это значит, что при объеме продукции $x=10$ усл.ед.

полные издержки по производству этого объема на обоих предприятиях одинаковы и составляют 9 млн руб.

Установим, начиная с какого объема продукции более экономичным становится второе предприятие. Обозначим $y_1 = 0{,}7x + 2$ и $y_2 = 0{,}5x + 4$, то, решая относительно x неравенство $y_2 < y_1$, получаем: $0{,}5x + 4 < 0{,}7x + 2 \Leftrightarrow 0{,}2x > 2 \Leftrightarrow x > 10$. При объеме $x > 10$ более экономичным становится второе предприятие.

Ответ. При объеме продукции больше 10 ед.

Задание 4.21-4.30 Между пунктами $A(5;5)$ и $B(8;4)$ (на плане местности размеры даны в километрах) проложен прямолинейно волоконно-оптическая линия связи. Необходимо подключить к этой линии пункт $C(2;1)$ по кратчайшему расстоянию. Найти точку подключения D и длину необходимого для этого оптоволоконного кабеля.

Решение

Кратчайшим расстоянием от пункта $C(2;1)$ до прямой AB является длина перпендикуляра CD, опущенного на AB из точки C. Следовательно, необходимо найти уравнение прямой CD, перпендикулярной AB и установить длину отрезка CD.

По формуле $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ запишем уравнение прямой AB :

$$\frac{x-5}{8-5} = \frac{y-5}{4-5}; \Rightarrow \quad x + 3y - 20 = 0.$$

Так как угловой коэффициент прямой AB $k_{AB} = -\dfrac{1}{3}$, то угловой коэффициент прямой CD $k_{CD} = 3$. Тогда по формуле $y - y_0 = k(x - x_0)$ уравнение прямой CD имеет вид $3(x-2) = (y-1)$ или в общем виде $3x - y - 5 = 0$.

Найдем координату точки D.

$$D: \begin{cases} 3x - y - 5 = 0, \\ x + 3y - 20 = 0. \end{cases} \Rightarrow D(3{,}5;5{,}5).$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $L: Ax + By + C = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

В нашем случае расстояние от точки $C(2;1)$ до прямой AB:

$x + 3y - 20 = 0$ равно: $d = \dfrac{|2 + 3 \cdot 1 - 20|}{\sqrt{1+9}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{10} \approx 4{,}7$ (км).

Следовательно, точка подключения к телефонному проводу будет иметь на плане местности координаты (3,5; 5,5), а длина требующегося провода составит 4,7 км.

Ответ. 4,7 км.

Задание 5. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{5x-6}}{x^2-6x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+7}{4x^2-x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}7x}{8x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

Решение

а) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{5x-6}}{x^2-6x+8}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{5x-6})\cdot(\sqrt{2+x}+\sqrt{5x-6})}{(x-2)\cdot(x-4)\cdot(\sqrt{2+x}+\sqrt{5x-6})}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2+x-5x+6}{(x-2)\cdot(x-4)\cdot(\sqrt{2+x}+\sqrt{5x-6})}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-4(x-2)}{(x-2)\cdot(x-4)\cdot(\sqrt{2+x}+\sqrt{5x-6})}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-4}{(x-4)\cdot(\sqrt{2+x}+\sqrt{5x-6})}=\frac{-4}{(2-4)\cdot(\sqrt{2+2}+\sqrt{5\cdot 2-6})}=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

б) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+7}{4x^2-x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1+0+0}{4-0+0}=\frac{1}{4}=0{,}25.$$

в) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}7x}{8x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{8x\cdot\cos 7x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\frac{7}{8\cdot\cos 7x}\right)=1\cdot\frac{7}{8\cdot 1}=0{,}875.$$

г) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\left(1^\infty\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+1+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2}{x-1}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{x}}}=e^{\frac{2}{1-0}}=e^2.$$

Ответ. а) 0,25; б) 0,5; в) 0.875; г) e^2.

Задание 6. Найти производные следующих функций:

а) $y=\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{2}{x}+2002$; б) $y=(19x^2+6x)\cdot\cos 3x$; в) $y=\dfrac{e^{4x+7}}{x+\ln x-1}$.

Решение

а) $y=\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{2}{x}+2002$;

$$y'=\left(x^{\frac{2}{3}}+2\cdot x^{-1}+2002\right)'=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'+2\left(x^{-1}\right)'+(2002)'=$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}+2\cdot(-1)\cdot x^{-1-1}+0=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-2x^{-2}=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}-\frac{2}{x^2}.$$

б) $y=\left(19x^2+6x\right)\cdot\cos 3x$;

$$y'=\left(19x^2+6x\right)'\cdot\cos 3x+\left(19x^2+6x\right)\cdot(\cos 3x)'=$$

$$=(19\cdot 2x+6)\cdot\cos 3x-\left(19x^2+6x\right)\cdot\sin 3x\cdot(3x)'=$$

$$=(38x+6)\cdot\cos 3x-\left(19x^2+6x\right)\cdot\sin 3x\cdot 3=$$

$$=(38x+6)\cdot\cos 3x-\left(57x^2+18x\right)\cdot\sin 3x;$$

в) $y=\dfrac{e^{4x+7}}{x+\ln x-1}$;

$$y'=\left(\frac{e^{4x+7}}{x+\ln x-1}\right)'=\frac{\left(e^{4x+7}\right)'\cdot(x+\ln x-1)-e^{4x+7}\cdot(x+\ln x-1)'}{(x+\ln x-1)^2}=$$

$$=\frac{e^{4x+7}\cdot(4x+7)'\cdot(x+\ln x-1)-e^{4x+7}\cdot\left(1+\frac{1}{x}-0\right)}{(x+\ln x-1)^2}=$$

$$=\frac{e^{4x+7}\cdot 4\cdot(x+\ln x-1)-e^{4x+7}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}{(x+\ln x-1)^2}=\frac{4e^{4x+7}(x+\ln x-1)-\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{4x+7}}{(x+\ln x-1)^2}.$$

Ответ. а) $y'=\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}-\dfrac{2}{x^2}$; б) $y'=(38x+6)\cos 3x-\left(57x^2+18x\right)\sin 3x$;

в) $y'=\dfrac{4e^{4x+7}(x+\ln x-1)-\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{4x+7}}{(x+\ln x-1)^2}$.

Задание 7. Зависимость между издержками производства C и объемом выпускаемой продукции q выражается функцией

$$C(q)=2400q-0{,}02q^3 \text{ (}\textit{ден. ед.}\text{)}.$$

Требуется:

а) найти непосредственно приращение издержек при изменении объема выпуска от величины $q_0=50$ до $q_0+\Delta q=50-0{,}15=49{,}85$;

б) найти средние и предельные издержки при объеме выпуска, равном 50;

в) с помощью дифференциала найти приращение издержек при изменении объема выпуска от 50 до 49,85. Указать абсолютную и относительную погрешность замены приращения функции $C(q)$ ее дифференциалом;

г) вычислить эластичность издержек при объеме выпуска 50;

д) при каком объеме выпуска продукции издержки будут максимальными?

Решение

А. Издержки производства определяются функцией

$$C = 2400q - 0{,}02q^3.$$

Приращение издержек ΔC при изменении объема выпуска от 50 до 49,85 единиц составит

$$\Delta C = C(q_0 + \Delta q) - C(q_0) = C(49{,}85) - C(50) =$$

$$= 2400 \cdot 49{,}85 - 0{,}02 \cdot (49{,}85)^3 - \left(2400 \cdot 50 - 0{,}02 \cdot 50^3\right) \approx$$

$$\approx 119640 - 2477{,}5674 - 120000 + 2500 = 122140 - 122477{,}5674 =$$

$$= -337{,}5674.$$

Значит, при уменьшении объема выпуска с 50 до 49,85 единиц издержки уменьшатся на 337,5674 *ден.ед*.

Б. Находим средние и предельные издержки:

$$\overline{C} = AC = \frac{C(q)}{q} = 2400 - 0{,}02q^2,$$

$$MC = C'(q) = 2400 - 0{,}06q^2.$$

При $q_0 = 50$ получим

$$AC(50) = 2400 - 0{,}02 \cdot 50^2 = 2400 - 50 = 2350(\textit{ден.ед.}),$$

$$MC(50) = 2400 - 0{,}06 \cdot 50^2 = 2400 - 150 = 2250(\textit{ден.ед.}).$$

Отсюда следует, что при средних издержках на производство единицы продукции равных 2350 *ден.ед*., дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции составят 2250 *ден.ед.*

В. Дифференциал функции $C(q)$ равен

$$dC = MC \cdot \Delta q = (2400 - 0{,}06q^2) \cdot \Delta q.$$

Заменяя приращение функции ΔC ее дифференциалом dC, получим

$$\Delta C \approx dC = (2400 - 0{,}06q^2) \cdot \Delta q.$$

Если $q_0 = 50$, а $\Delta q = -0{,}15$, то

$$\Delta C \approx \left(2400 - 0{,}06 \cdot 50^2\right) \cdot \left(-0{,}15\right) = 2250 \cdot \left(-0{,}15\right) = -337{,}5\,\textit{ден.ед.}$$

Абсолютная погрешность замены:

$$\left|\Delta C - dC\right| = \left|-337{,}5674 - (-337{,}5)\right| = 0{,}0674.$$

Относительная погрешность замены:

$$\left|\frac{\Delta C - dC}{\Delta C}\right| = \left|\frac{-337,5674 - (-337,5)}{-337,5674}\right| = 0,0002 \text{ или } 0,02\% .$$

Г. Эластичность издержек:

$$E_q(C) = q \cdot \frac{C'(q)}{C(q)} = q \cdot \frac{2400 - 0,06q^2}{2400q - 0,02q^3} = \frac{2400 - 0,06q^2}{2400 - 0,02q^2} .$$

При объеме выпуска $q_0 = 50$ эластичность издержек равна:

$$E_{50}(C) = \frac{2400 - 0,06 \cdot 50^2}{2400 - 0,02 \cdot 50^2} = \frac{2250}{2350} = 0,96 .$$

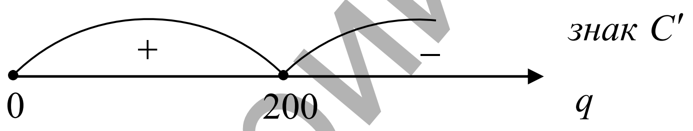
Следовательно, при данном объеме выпуска продукции в 50 единиц его увеличение на 1% приведет к увеличению издержек на 0,96%.

Д. Найдем стационарную точку функции $C(q)$ из условия $MC = 0$:

$$2400 - 0,06q^2 = 0 ,$$

$$q_1 = -200 \text{ и } q_2 = 200 .$$

Так как $q \geq 0$, то значение q_1 следует отбросить.



В окрестности точки $q = 200$ производная $C'(q)$ меняет знак с плюса на минус. Значит, в точке $q = 200$ функция издержек принимает максимальное значение, равное

$$C_{\max} = 2400 \cdot 200 - 0,02 \cdot 200^3 = 320000 \, \textit{ден.ед}.$$

Окончательно, при объеме выпуска продукции, равном 200 единицам, издержки будут максимальны и составят 320000 *ден.ед*.

Учебно-методическая литература

1 Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пос.: в 2-х ч. Ч. 1 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко. – 7-е изд., испр. – Москва: Оникс: Мир и образование, 2009. – 368 с.

2 Высшая математика для экономистов: практикум / под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: ЮНИТИ, 2010. – 479 с.

3 Жевняк, Р.М. Общий курс высшей математики: учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук, А.И. Марченко, В.Т. Унукович – Орша: Оршанская типография, 1996. – 320 с.

4 Индивидуальные задания по высшей математике: учеб. пос.: в 4-х ч. Ч. 1: Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / Под общ. ред. А.П. Рябушко. – 4-е изд. – Минск : Высшая школа, 2008. – 304 с.

5 Красс, М.С. Математика для экономистов: учеб. пос. / М.С. Красс; Б.П. Чупрынов. – Санкт-Петербург: Питер, 2009. – 464 с.

6 Кузнецов, А.В. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Общий курс: учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов / А.В. Кузнецов, Д.С. Кузнецова, Е.И. Шилкина [и др.]. – Мискн: Выш. шк., 1994. – 284 с.

7 Минюк, С.А. Высшая математика для экономистов: учеб. пос. / С.А. Минюк. – 2-е изд. испр. – Минск, 2007. – 512 с.

8 Сборник задач по высшей математике для экономистов: уч. пос. / Под ред. В.И. Ермакова. – 2-е изд. – М., 2008. – 575 с.

9 Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: 36 лекций. Ч. 1 / Д.Т. Письменный. – 3-е изд. – М., 2004. – 288 с.

10 Солодовников, А.С. Математика в экономике. В 2-х частях / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браимов, И.Г. Шандра. – М.: Финансы и статистика, 2001.

11 Яблонский, А.И. Высшая математика: Общий курс: учебник для студентов экономических специальностей вузов / А.И. Яблонский, А.В. Кузнецов, Е.И. Шилкина [и др.]. – 2-е изд., перераб. – Минск: Выш. шк., 2000. – 351 с.

Содержание

Учебное издание

Составители:
Гладкий Иван Иванович
Артюшеня Татьяна Александровна
Каримова Татьяна Ивановна
Махнист Леонид Петрович
Дворниченко Александр Валерьевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации
и варианты контрольной работы
по разделам
«Элементы линейной алгебры», **«Основы аналитической геометрии»**, **«Основы математического анализа»** и **«Основы дифференциального исчисления функции одной переменной»**
общего курса дисциплины «Высшая математика»
для студентов экономических специальностей
заочной формы обучения

Ответственный за выпуск: Гладкий И.И.
Редактор: Боровикова Е.А.
Компьютерная верстка: Боровикова Е.А.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 5.10.2017 г. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Усл. п. л. 1,86.
Уч.-изд. л. 2,0. Заказ № 1015. Тираж 60 экз. Отпечатано на ризографе
Учреждения образования «Брестский государственный
технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.