МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации и варианты контрольной работы
по разделам «Функции нескольких переменных»,
«Интегральное исчисление функции одной переменной»,
«Дифференциальные уравнения»
общего курса дисциплины «Математика»
для студентов технических специальностей заочной формы обучения

Брест 2017

УДК [517.3+517.51+517.91](076)

В настоящих методических рекомендациях приведены варианты контрольных заданий по разделам «Функции нескольких переменных», «Интегральное исчисление функции одной переменной» и «Дифференциальные уравнения» общего курса дисциплины «Математика» для студентов технических специальностей заочной формы обучения. Даны методические указания, полезные для успешного выполнения контрольной работы.

Составители: **Каримова Т.И.**, доцент, к.ф.-м.н.
Гладкий И.И., доцент
Махнист Л.П., доцент, к.т.н.
Санюкевич А.В., доцент, к.ф.-м.н.

Рецензент: **Мирская Е.И.**, доцент кафедры алгебры, геометрии и математического моделирования Учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н., доцент

Организационно-методические указания

В контрольную работу включены десять заданий по разделам «Функции нескольких переменных», «Интегральное исчисление функции одной переменной» и «Дифференциальные уравнения» общего курса дисциплины «Математика».

Нумерация задач состоит из двух чисел: первое число – номер задания, второе (после точки) – номер варианта.

Правила оформления контрольной работы:

1) контрольная работа выполняется в отдельной (тонкой) ученической тетради с отчерченными полями;

2) на обложке обязательно должен быть указан шифр (номер зачетной книжки);

3) контрольная работа выполняется студентом в соответствии со своим вариантом, который определяется двумя последними цифрами шифра;

4) каждое задание начинается на новой странице с обязательной записью его полного условия. Если задача имеет общую формулировку, то ее условие переписывают, заменяя общие данные конкретными, соответствующими номеру варианта;

5) решения всех заданий должны быть подробными и аккуратными, содержать достаточные пояснения, необходимые рисунки и таблицы. Решение каждой задачи заканчивается ответом;

6) завершает работу список используемой литературы и роспись студента;

7) после рецензии исправления в тексте работы недопустимы;

8) исправление ошибок, указанных рецензентом, выполняют в той же тетради после росписи студента.

Контрольные вопросы курса «Математика»
II семестр

1. Функции нескольких переменных (ФНП). Определение, способы задания и геометрическая интерпретация ФНП.
2. Предел и непрерывность ФНП. Частные приращения и частные производные.
3. Полное приращение ФНП и дифференцируемость ФНП. Полный дифференциал ФНП.
4. Достаточные условия дифференцируемости ФНП. Приложение полного дифференциала в приближенных вычислениях.
5. Производная сложной функции. Производные неявной функции.
6. Частные производные и дифференциалы высших порядков.
7. Производная по направлению. Градиент и его свойства. Линии и поверхности уровня.
8. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
9. Экстремум ФНП. Необходимые и достаточные условия экстремума ФНП.
10. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области. Условный экстремум ФНП.
11. Метод множителей Лагранжа.
12. Метод наименьших квадратов.
13. Первообразная функции. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица интегралов. Непосредственное интегрирование.
14. Методы интегрирования в неопределенном интеграле: замена переменной, интегрирование по частям.
15. Разложение рациональных дробей на простейшие. Интегрирование простейших рациональных дробей. Общая схема интегрирования рациональных дробей.
16. Интегрирование некоторых иррациональных выражений.
17. Интегрирование чётных и нечётных степеней и произведений тригонометрических функций. Интегрирование рациональных тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка.
18. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции.
19. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определение определенного интеграла. Геометрический и механический смыслы определенного интеграла.
20. Свойства определенного интеграла.
21. Производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу. Формула Барроу. Формула Ньютона-Лейбница.

22. Методы интегрирования определенного интеграла: метод подстановки (замены переменной); формула интегрирования по частям для определенного интеграла.
23. Интегрирование четных, нечетных и периодических функций.
24. Несобственные интегралы с бесконечными пределами. Теоремы сравнения.
25. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Теоремы сравнения.
26. Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площадей в декартовых и полярных координатах; вычисление объемов тел; вычисление длины кривой.
27. Механические приложения определенного интеграла: масса плоской пластины; статические моменты плоской фигуры; центр тяжести плоской фигуры.
28. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям (ДУ). Основные понятия ДУ.
29. Задача Коши для ДУ первого порядка. Теорема существования и единственности решения.
30. Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешимые в квадратурах: ДУ с разделяющимися переменными; однородные ДУ; линейные ДУ первого порядка; уравнение Бернулли.
31. ДУ высших порядков. Общие понятия. Задача Коши. Теорема существования и единственности. Понятие краевой задачи.
32. Уравнения, допускающие понижение порядка.
33. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков, их свойства.
34. Структура общего решения ЛОДУ. Линейные однородные ДУ с постоянными коэффициентами.
35. Линейные неоднородные ДУ (ЛНДУ). Структура общего решения ЛНДУ.
36. ЛНДУ с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью.
37. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).
38. Системы дифференциальных уравнений. Определение, общее решение, задача Коши.
39. Нормальная система дифференциальных уравнений. Метод исключения.
40. Линейные нормальные системы ДУ с постоянными коэффициентами.

Контрольная работа

Задание 1. Задана функция $z = f(x, y)$. Найти:

а) частные производные первого и второго порядка функции z;

б) градиент функции z в точке $M_0(x_0; y_0)$;

в) вычислить производную функции z в точке M_0 в направлении вектора $\vec{a}$;

г) исследовать на экстремум функцию z.

1.1	$z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6$;	$M_0(1; 2)$;	$\vec{a} = (3; 4)$.
1.2	$z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$;	$M_0(1; -1)$;	$\vec{a} = (-3; 4)$.
1.3	$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$;	$M_0(2; 3)$;	$\vec{a} = (4; -3)$.
1.4	$z = -x^2 - xy - y^2 + 3x + 6$;	$M_0(2; -2)$;	$\vec{a} = (-4; -3)$.
1.5	$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$;	$M_0(-1; 2)$;	$\vec{a} = (6; -8)$.
1.6	$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$;	$M_0(3; -2)$;	$\vec{a} = (-8; 6)$.
1.7	$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$;	$M_0(-2; 2)$;	$\vec{a} = (-4; 3)$.
1.8	$z = x^2 + 4xy + y^2 - 2y - 1$;	$M_0(-1; -1)$;	$\vec{a} = (6; -8)$.
1.9	$z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y + 3$;	$M_0(-1; -1)$;	$\vec{a} = (12; 5)$.
1.10	$z = 2x^3 - y^2 + 2xy + 2$;	$M_0(-1; -1)$;	$\vec{a} = (6; -8)$.
1.11	$z = y^2 + 4xy + x^2 - 2x + 1$;	$M_0(-2; 2)$;	$\vec{a} = (12; 5)$.
1.12	$z = x^2 - xy + y^2 - 4x + 2$;	$M_0(1; -4)$;	$\vec{a} = (-5; 12)$.
1.13	$z = x^3 - 6xy - y^2 + 4$;	$M_0(2; -2)$;	$\vec{a} = (-6; 8)$.
1.14	$z = y^3 + 3yx^2 - 15y - 12x + 5$;	$M_0(-1; -1)$;	$\vec{a} = (12; 5)$.
1.15	$z = y^3 + 3yx^2 - 15y - 12x + 5$;	$M_0(3; -2)$;	$\vec{a} = (8; -6)$.
1.16	$z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$;	$M_0(2; 4)$;	$\vec{a} = (8; 15)$.
1.17	$z = x^2 + 2x + y^2 + 4y - 6$;	$M_0(4; -1)$;	$\vec{a} = (-6; 8)$.
1.18	$z = x^2 - 6x + y^2 + 4y + 2$;	$M_0(2; -1)$;	$\vec{a} = (-8; 15)$.
1.19	$z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$;	$M_0(2; 3)$;	$\vec{a} = (-8; -15)$.
1.20	$z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 5y + 3$;	$M_0(2; -3)$;	$\vec{a} = (-15; 8)$.
1.21	$z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$;	$M_0(-2; -3)$;	$\vec{a} = (-8; -6)$.
1.22	$z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 2$;	$M_0(-1; -1)$;	$\vec{a} = (-15; -8)$.
1.23	$z = x^2 - 2xy + 4y^2 + 10$;	$M_0(-2; -2)$;	$\vec{a} = (-3; -4)$.
1.24	$z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 5y + 3$;	$M_0(2; 3)$;	$\vec{a} = (6; -8)$.

1.25	$z=3y^2-y^3+3x^2+4x$;	$M_0(2;3)$;	$\vec{a}=(-3;-4)$.
1.26	$z=x^2+xy+y^2-4x-5y+3$;	$M_0(3;-2)$;	$\vec{a}=(-12;5)$.
1.27	$z=y^3-6xy-x^2+5$;	$M_0(1;-3)$;	$\vec{a}=(-8;6)$.
1.28	$z=x^3+3xy^2-15x-12y$;	$M_0(1;-1)$;	$\vec{a}=(-6;8)$.
1.29	$z=x^2+y^2+xy-3y-6x+1$;	$M_0(1;-2)$;	$\vec{a}=(-4;-3)$.
1.30	$z=x^2+y^2+xy-3y-6x+1$;	$M_0(2;1)$;	$\vec{a}=(8;15)$.

Задание 2. При изучении функциональной зависимости $y=f(x)$ произведен ряд измерений величины *X* и получены соответствующие значения величины *У*. Результаты измерений занесены в таблицу:

X	1	2	3	4	5	6	7
Y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7

Предполагая, что теоретически зависимость между значениями величин *X* и *У* выражается линейной функцией $y=ax+b$, методом наименьших квадратов найти параметры *a* и *b.* Для найденных *a* и *b* найдите $y(4)$.

	X	1	2,2	3,4	4,6	5,8	7	8,2	9,4
2.01	Y	2,9	4,4	4,8	4,9	6,7	8,6	10,2	10,4
2.02	Y	5,1	7,0	10,1	9,3	12,6	16,9	20,0	20,8
2.03	Y	8,1	10,8	15,5	16,8	21,1	25,3	28,4	31,8
2.04	Y	–1,2	5,4	8,2	12,9	16,8	22,9	27,6	30,1
2.05	Y	–0,7	4,6	10,6	15,9	20,0	30,1	36,4	40,5
2.06	Y	–1,9	6,9	14,5	17,8	26,1	35,9	41,7	47,7
2.07	Y	10,9	20,9	27,9	34,4	44,1	53,8	64,4	67,8
2.08	Y	11,1	20,4	29,6	38,8	47,2	60,1	68,8	75,2
2.09	Y	12,8	21,9	32,7	43,1	52,6	65,4	77,2	85,7
2.10	Y	5,6	16,2	28,4	38,7	51,8	64,0	76,8	87,7

	X	2	3,5	5	6,5	8	9,5	11	12,5
2.11	Y	3,7	5,1	7,5	5,5	9,5	12,4	13,4	12,7
2.12	Y	5,1	5,2	10,3	9,5	11,8	16,6	19,8	19,9
2.13	Y	10,1	15,2	19,2	22,8	27,4	33,2	37,9	40,1
2.14	Y	2,9	8,6	16,2	18,3	23,7	35,4	39,9	42,1
2.15	Y	19,4	25,3	32,1	39,3	45,1	55,2	62,8	69,2
2.16	Y	20,8	30,9	38,3	46,3	55,7	65,6	77,2	82,7
2.17	Y	11,4	21,3	31,5	41,2	50,7	63,9	76,5	81,3
2.18	Y	21,5	33,1	45,1	56,7	67,37	81,2	95,2	104,6
2.19	Y	30,3	43,6	57,8	69,7	83,7	98,6	111,2	124,4
2.20	Y	10,8	25,1	39,7	51,9	66,8	84,8	100,5	112,9

	X	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
2.21	Y	6,2	5,8	6,2	6,3	7,8	8,2	9,5	8,5
2.22	Y	9,7	11,8	11,7	12,3	12,9	15,3	16,1	16,2
2.23	Y	5,6	5,4	7,4	8,1	9,7	12,4	14,7	13,6
2.24	Y	19,6	23,5	23,3	24,2	24,6	29,5	31,2	29,8
2.25	Y	24,8	27,6	29,9	31,1	31,3	37,2	39,3	41,3
2.26	Y	11,3	14,1	16,6	18,6	20,3	25,7	29,1	31,4
2.27	Y	9,8	12,7	17,4	19,3	21,6	28,2	30,2	33,2
2.28	Y	26,9	31,5	37,3	38,1	42,2	47,3	50,9	54,2
2.29	Y	32,5	35,8	40,8	43,1	45,7	53,4	60,5	61,2
2.30	Y	26,2	30,4	37,3	38,9	43,7	52,8	56,5	59,3

Задание 3. Найти неопределенные интегралы (результаты проверить дифференцированием).

3.01	а) $\int \frac{\sqrt[6]{x} - x^2}{x} dx$;	б) $\int \frac{(2x+1)dx}{(2x+1)^2+3}$;	в) $\int (x+3)e^{-x}\,dx$.
3.02	а) $\int \frac{8x-2x^5}{\sqrt{x}} dx$;	б) $\int \frac{1-e^{2tgx}}{\cos^2 x} dx$;	в) $\int (2x-1)e^{2x}\,dx$.
3.03	а) $\int \frac{x^2-\sqrt[3]{x}}{x} dx$;	б) $\int \frac{\ln(2x+3)+3}{2x+3} dx$;	в) $\int (4x+2)\sin 2x\,dx$.
3.04	а) $\int \frac{\sqrt[3]{x}-2x^3}{x} dx$;	б) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$;	в) $\int x\sin x\cos x\,dx$.
3.05	а) $\int \frac{2x^3-\sqrt[3]{x}}{x} dx$;	б) $\int \frac{2+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;	в) $\int x^2\ln x\,dx$.
3.06	а) $\int \frac{\sqrt{x^3}+5x^4}{x} dx$;	б) $\int \frac{\ln^3(x+1)-1}{x+1} dx$;	в) $\int (x+1)\cos 3x\,dx$.
3.07	а) $\int \frac{3\sqrt{x^3}+x^4}{x} dx$;	б) $\int xe^{3x^2-5} dx$;	в) $\int x e^{-2x}\,dx$.
3.08	а) $\int \frac{x^3+\sqrt{x^5}}{x^2} dx$;	б) $\int e^{\sin x-2}\cdot\cos x dx$;	в) $\int (1-2x)e^{3x}\,dx$.
3.09	а) $\int \frac{x^2+\sqrt{x^3}}{x^3} dx$;	б) $\int \frac{\sqrt{\ln(3x+5)}}{(3x+5)} dx$;	в) $\int (4x-1)e^{-3x}\,dx$.
3.10	а) $\int \frac{x^2-5}{x\sqrt{x}} dx$;	б) $\int xe^{1+3x^2} dx$;	в) $\int (x+2)\cos\frac{x}{2}\,dx$.
3.11	а) $\int \frac{\sqrt[3]{x^{10}}+6x}{x^5} dx$;	б) $\int \frac{ctg^2 x+6}{\sin^2 x} dx$;	в) $\int (1-3x)\sin\frac{x}{2}\,dx$.

3.12	а) $\int \frac{\sqrt[7]{x^8}+5x^3}{x}dx$;	б) $\int \frac{1-\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;	в) $\int (2-x)e^{-x}\,dx$.
3.13	а) $\int \frac{x^4-\sqrt[3]{x^7}}{x^3}dx$;	б) $\int \frac{5-\ln^2(x-2)}{x-2}dx$;	в) $\int (2-3x)\sin 2x\,dx$.
3.14	а) $\int \frac{\sqrt[5]{x^{17}}-x^2}{x^3}dx$;	б) $\int \frac{\sqrt[5]{\ln(4x+1)}}{4x+1}dx$;	в) $\int (2+3x)e^{-\frac{x}{2}}dx$.
3.15	а) $\int \frac{\sqrt{x}+4x^3}{x}dx$;	б) $\int \frac{3+\ln^3(x+2)}{x+2}dx$;	в) $\int (3x-4)e^{-\frac{x}{3}}dx$.
3.16	а) $\int \frac{\sqrt[5]{x^9}-x^3}{x^2}dx$;	б) $\int \frac{\sqrt[5]{tg^2 x}-1}{\cos^2 x}dx$;	в) $\int (x+2)\ln x\,dx$.
3.17	а) $\int \frac{7-\sqrt[3]{x^8}}{x^3}dx$;	б) $\int xe^{3x^2+5}dx$;	в) $\int (x+5)\sin 4x\,dx$.
3.18	а) $\int \frac{5x-x^2}{\sqrt{x^3}}dx$;	б) $\int e^{4x^3-2}\cdot x^2dx$;	в) $\int (3x-1)\cos 4x\,dx$.
3.19	а) $\int \frac{\sqrt[5]{x}-5}{x}dx$;	б) $\int 5x^4(e^{x^5+1}+1)dx$;	в) $\int (3x+4)e^{3x}\,dx$.
3.20	а) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-x}{\sqrt{x}}dx$;	б) $\int \frac{\arcsin^2 2x dx}{\sqrt{1-4x^2}}$;	в) $\int (3-x)\cos x\,dx$.
3.21	а) $\int \frac{x^2+3\sqrt{x}}{2x}dx$;	б) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{2-e^x}}$;	в) $\int (x+3)\sin 4x\,dx$.
3.22	а) $\int \frac{\sqrt{x}+7x^5}{2x^3}dx$;	б) $\int \frac{2-arctg^2 x}{1+x^2}dx$;	в) $\int x\,e^{x+2}\,dx$.
3.23	а) $\int \frac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[3]{x}}{x}dx$;	б) $\int x\cdot\sqrt{5+7x^2}dx$;	в) $\int x\,e^{2x-1}\,dx$.
3.24	а) $\int \frac{x^3+6\sqrt{x}}{x^2}dx$;	б) $\int \frac{\sqrt[3]{2\ln x-5}}{x}dx$;	в) $\int (x+5)e^{-2x}\,dx$.
3.25	а) $\int \frac{7x^2+\sqrt[4]{x}}{x}dx$;	б) $\int \frac{\cos 3x dx}{5+3\sin 3x}$;	в) $\int (4-x)\cos 5x\,dx$.
3.26	а) $\int \frac{5x^3-\sqrt{x^7}}{\sqrt{x}}dx$;	б) $\int \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}$;	в) $\int (1+5x)\sin 2x\,dx$.
3.27	а) $\int \frac{\sqrt{x^5}-5x^2}{\sqrt{x}}dx$;	б) $\int \frac{5+\sqrt{ctg 3x}}{\sin^2 3x}dx$;	в) $\int (7-2x)\cos\frac{x}{4}dx$.
3.28	а) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+4x}{x^2}dx$;	б) $\int \frac{\sqrt{7+2\ln x}}{x}dx$;	в) $\int x\sin(2x+3)\,dx$.

3.29	а) $\int \frac{x^3-\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}dx$;	б) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$;	в) $\int (x+2)e^{-3x}dx$.
3.30	а) $\int \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[5]{x}}dx$;	б) $\int \frac{(3+2tgx)dx}{\cos^2 x}$;	в) $\int (x-1)\cos(x-1)dx$.

Задание 4. Вычислить определенный интеграл

4.01 $\int_4^9 \frac{dx}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}$.	**4.02** $\int_{25}^{49} \frac{\sqrt{x}dx}{x-5}$.	**4.03** $\int_3^{11} \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$.
4.04 $\int_0^{15} \frac{dx}{3+\sqrt[4]{x+1}}$.	**4.05** $\int_{10}^{26} \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}$.	**4.06** $\int_5^{10} \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$.
4.07 $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+5}$.	**4.08** $\int_6^{18} \frac{\sqrt{x-2}}{1+x}dx$.	**4.09** $\int_{11}^{16} \frac{x^3dx}{\sqrt{x-7}}$.
4.10 $\int_6^9 \frac{\sqrt{x-5}}{x}dx$.	**4.11** $\int_5^{12} \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$.	**4.12** $\int_1^4 \frac{2x+1}{x+\sqrt{x}}dx$.
4.13 $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}+x^2}{\sqrt{x+1}}dx$.	**4.14** $\int_1^9 \frac{\sqrt{x}dx}{4+x}$.	**4.15** $\int_7^{14} \frac{dx}{3+\sqrt{x+2}}$.
4.16 $\int_{-1}^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{x+2}}$.	**4.17** $\int_4^{12} \frac{x^3dx}{\sqrt{x-3}}$.	**4.18** $\int_5^{10} \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}}dx$.
4.19 $\int_1^{16} \frac{\sqrt{x}dx}{x-1}$.	**4.20** $\int_1^9 \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x}}$.	**4.21** $\int_5^{14} \frac{dx}{2+\sqrt{x-5}}$.
4.22 $\int_6^{11} \frac{x^2dx}{\sqrt{x-2}}$.	**4.23** $\int_1^9 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}+5}$.	**4.24** $\int_2^7 \frac{x-1}{x\sqrt{x+2}}dx$.
4.25 $\int_1^9 \frac{\sqrt{x}dx}{x+9}$.	**4.26** $\int_6^{14} \frac{dx}{3+\sqrt{x-5}}$.	**4.27** $\int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{x+3}}$.
4.28 $\int_2^9 \frac{dx}{x\sqrt{x+7}}$.	**4.29** $\int_2^7 \frac{x^2dx}{\sqrt{x+2}}$.	**4.30** $\int_8^{17} \frac{xdx}{\sqrt{2x-7}}$.

Задание 5. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = ax^2 + bx + c$ и $y = kx + d$. Выполнить рисунок. Значения коэффициентов даны в таблице:

	a	b	c	k	d
5.01	1	4	2	1	6
5.03	1	4	8	3	10
5.05	1	6	4	5	6
5.07	1	8	0	7	2
5.09	1	2	6	9	-4
5.11	2	2	2	1	5
5.13	2	4	8	3	11
5.15	2	6	4	5	5
5.17	2	8	0	7	3
5.19	2	2	6	9	3
5.21	3	2	2	1	4
5.23	3	4	8	3	10
5.25	3	6	4	5	14
5.27	3	8	0	7	4
5.29	3	2	6	9	4

	a	b	c	k	d
5.02	1	4	5	2	8
5.04	1	6	1	4	4
5.06	1	8	7	6	10
5.08	1	2	3	8	-2
5.10	2	2	9	10	3
5.12	2	4	5	2	17
5.14	2	6	1	4	5
5.16	2	8	7	6	31
5.18	2	2	3	8	11
5.20	2	2	9	10	19
5.22	3	4	5	2	6
5.24	3	6	1	4	9
5.26	3	8	7	6	15
5.28	3	2	3	8	12
5.30	3	2	9	10	5

Задание 6. Найти общее или частное (если указано начальное условие) решение следующих дифференциальных уравнений первого порядка:

6.01	**а)** $\left(x - e^{-2x}\right)dx + \left(y + e^{2y}\right)dy = 0$;	**б)** $y' - ytgx = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y(0) = 2$.
6.02	**а)** $xyy' - y^2 = 4$;	**б)** $y' - \dfrac{2y}{x} = x^3$, $y(1) = \dfrac{7}{6}$.
6.03	**а)** $xdy - (y+1)dx = 0$, $y(2) = 5$;	**б)** $y' + \dfrac{y}{x} = 2\ln x + 1$.
6.04	**а)** $y' = 2\sqrt{y}\ln x$, $y(e) = 1$;	**б)** $y' - \dfrac{2y}{x+1} = e^x (x+1)^2$.
6.05	**а)** $y'tgx - y = 4$;	**б)** $xy' - 2y = x$, $y(1) = 1$.
6.06	**а)** $4\left(yx^2 + y\right)dy + \sqrt{5 + y^2}dx = 0$;	**б)** $y' - \dfrac{2y}{x} = x^3$, $y(1) = \dfrac{3}{2}$.
6.07	**а)** $yy'\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$;	**б)** $x^2y' - 2xy = 1$, $y(1) = 5$.
6.08	**а)** $\left(x^2 + x\right)y' = 2y + 1$;	**б)** $xy' - 3y = x^3 + x$, $y(1) = 3$.
6.09	**а)** $\sin 2xdx + (\cos 2y + y)dy = 0$;	**б)** $xy' + 3y = x^3 - 2x$, $y(1) = 2$.

6.10	**а)** $\left(3+e^{x}\right)yy'=e^{x}$;	**б)** $xy'-3y=3-4x-x^{2},\ y(1)=3$.
6.11	**а)** $y'=\dfrac{y+1}{x}$;	**б)** $xy'+2y=2+3x+x^{2},\ y(1)=3$.
6.12	**а)** $x\sqrt{1+y^{2}}dx+y\sqrt{1+x^{2}}dy=0$;	**б)** $xy'-2y=x^{3}+x,\ y(1)=4$.
6.13	**а)** $\sin 4xdx+\left(4y-e^{2y}\right)dy=0$;	**б)** $y'-\dfrac{4y}{x}=x^{2}-2x+3,\ y(1)=-5$.
6.14	**а)** $y'\cos^{2}x=y\ln y,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=e$;	**б)** $xy'+2y=x^{3}+x^{2}$.
6.15	**а)** $xyy'-y^{2}=9$;	**б)** $y'-\dfrac{4y}{x}=-x^{2}+2x-3,\ y(1)=4$.
6.16	**а)** $(x+1)dy-(y+2)dx=0$;	**б)** $y'+\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{2},\ y(0)=\dfrac{6}{5}$.
6.17	**а)** $\left(e^{3x}-3x^{2}\right)dx-\sin 2ydy=0$;	**б)** $y'-\dfrac{4y}{x}=x^{2}+2x-3,\ y(1)=2$.
6.18	**а)** $\left(4+e^{x}\right)yy'=e^{x}$;	**б)** $xy'+4y=8x-2,\ y(1)=0{,}1$.
6.19	**а)** $y'=\dfrac{y+1}{x+3}$;	**б)** $y'-\dfrac{3y}{x}=x^{2}-2x+5,\ y(1)=-3$.
6.20	**а)** $x\sqrt{4+y^{2}}dx+y\sqrt{9+x^{2}}dy=0$;	**б)** $xy'+3y=5x+4,\ y(1)=6$.
6.21	**а)** $\left(x^{2}-e^{-4x}\right)dx-\sin 3ydy=0$;	**б)** $y'-\dfrac{2y}{x+2}=e^{3x}(x+2)^{2},\ y(0)=4$.
6.22	**а)** $xyy'-y^{2}=16$;	**б)** $y'-\dfrac{3y}{x}=x^{3}-2x^{2}+5,\ y(1)=5$.
6.23	**а)** $xdy-(y+3)dx=0,\ y(0)=13$;	**б)** $y'+\dfrac{3y}{x}=\dfrac{4x-5}{x^{2}}$.
6.24	**а)** $6\left(x^{2}y+y\right)dy-\sqrt{4+y^{2}}dx=0$;	**б)** $x^{2}y'-2xy=1,\ y(1)=5$.
6.25	**а)** $yy'\sqrt{1-x^{2}}-\sqrt{1-y^{2}}=0$;	**б)** $y'-\dfrac{3y}{x}=4x^{2}+2x+1,\ y(1)=6$.
6.26	**а)** $(x+3)y'=y-4,\ y(2)=14$;	**б)** $xy'+2y=\dfrac{x^{2}+3x+2}{x^{2}}$.
6.27	**а)** $x\sqrt{4+y^{2}}dx-y\sqrt{1+x^{2}}dy=0$;	**б)** $y'-\dfrac{4y}{x}=x^{2}-2x+3,\ y(1)=-5$.
6.28	**а)** $y'\cos^{2}x=y\ln y,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=e$;	**б)** $y'+\dfrac{4y}{x}=\dfrac{x^{2}-3x+1}{x^{4}}$.
6.29	**а)** $(x+1)dy=(y+6)dx$;	**б)** $y'+\dfrac{3y}{x+1}=(x+1)^{2},\ y(2)=\dfrac{3}{2}$.
6.30	**а)** $\left(4x^{3}-e^{-2x}\right)dx-\sin 3ydy=0$;	**б)** $xy'+5y=10x-4,\ y(1)=1$.

Задание 7. а) Решить задачу Коши; **б)** Найти общее решение дифференциального уравнения

7.01	**а)** $y''-2y'+5y=0$, $y(0)=5$, $y'(0)=7$;	**б)** $y''-4y'-21y=0$.
7.02	**а)** $y''-y'-2y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=3$;	**б)** $y''+10y'+25y=0$.
7.03	**а)** $y''+5y'+6y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-4$;	**б)** $y''-6y'+10y=0$.
7.04	**а)** $y''+4y'-5y=0$, $y(0)=-4$, $y'(0)=2$;	**б)** $y''+4y'+8y=0$.
7.05	**а)** $y''+4y'+4y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$;	**б)** $y''+6y'=0$.
7.06	**а)** $y''-3y'+2y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$;	**б)** $4y''-12y'+9y=0$.
7.07	**а)** $y''+9y=0$, $y(0)=-1$, $y'(0)=3$;	**б)** $y''-7y'+12y=0$.
7.08	**а)** $y''+2y'-8y=0$, $y(0)=-2$, $y'(0)=-2$;	**б)** $y''+3y=0$.
7.09	**а)** $y''+2y'+17y=0$, $y(0)=-1$, $y'(0)=5$;	**б)** $y''-6y'-7y=0$.
7.10	**а)** $y''-5y'+6y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=4$;	**б)** $y''-4y'+13y=0$.
7.11	**а)** $y''-7y'+10y=0$, $y(0)=-1$, $y'(0)=2$;	**б)** $y''+9y=0$.
7.12	**а)** $y''-6y'+10y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;	**б)** $y''+7y'+6y=0$.
7.13	**а)** $y''+y'-2y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=4$;	**б)** $y''+y'=0$.
7.14	**а)** $y''-7y'+6y=0$, $y(0)=-3$, $y'(0)=2$;	**б)** $y''-6y'+25y=0$.
7.15	**а)** $y''-3y'=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=3$;	**б)** $y''-4y'+20y=0$.
7.16	**а)** $y''+10y'+25y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$;	**б)** $y''+2y=0$.
7.17	**а)** $y''-2y'-3y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=0$;	**б)** $4y''+4y'+y=0$.
7.18	**а)** $y''+4y=0$, $y(0)=-1$, $y'(0)=2$;	**б)** $y''+2y'-15y=0$.
7.19	**а)** $y''+8y'+25y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=4$;	**б)** $y''-11y'+10y=0$.
7.20	**а)** $y''-7y'-8y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=3$;	**б)** $y''+5y=0$.
7.21	**а)** $y''-8y'+25y=0$, $y(0)=-1$, $y'(0)=0$;	**б)** $y''+7y'-8y=0$.
7.22	**а)** $y''-10y'+16y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=5$;	**б)** $y''-2y'+26y=0$.
7.23	**а)** $y''-7y'+6y=0$, $y(0)=-2$, $y'(0)=3$;	**б)** $y''+2y'+10y=0$.
7.24	**а)** $y''-2y'+10y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=4$;	**б)** $y''-9y'+20y=0$.
7.25	**а)** $6y''-y'-y=0$, $y(0)=-1$, $y'(0)=1$;	**б)** $y''+16y=0$.
7.26	**а)** $y''-10y'+9y=0$, $y(0)=-4$, $y'(0)=4$;	**б)** $y''-2y'+17y=0$.
7.27	**а)** $y''-10y'+29y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=0$;	**б)** $y''-4y'=0$.
7.28	**а)** $2y''-3y'+y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=-1$;	**б)** $y''+2y'+5y=0$.
7.29	**а)** $y''+y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-2$;	**б)** $y''-11y'-12y=0$.
7.30	**а)** $y''+3y'=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=-3$;	**б)** $4y''-2y'+5y=0$.

Задание 8. Найти общее решение дифференциального уравнения.

8.01	$y'' + 4y' - 12y = x^2 + x + 2$.	**8.16**	$y'' - 3y' + 2y = x^2 - 8x + 1$.
8.02	$y'' - 6y' + 9y = x^2 - 2x - 4$.	**8.17**	$y'' - 4y' + 4y = -4x^2 + 7x - 2$.
8.03	$y'' + 4y' = -x^2 + 3x + 6$.	**8.18**	$y'' - 3y' + 2y = x^2 - 6x + 3$.
8.04	$y'' - 2y' + 5y = x^2 - 4x - 8$.	**8.19**	$y'' + 2y' + 37y = 3x^2 + 5x - 4$.
8.05	$y'' - 5y' + 6y = x^2 + 5x + 10$.	**8.20**	$y'' + 36y = x^2 - 4x + 5$.
8.06	$y'' - 4y' + 13y = -2x^2 - 6x - 12$.	**8.21**	$y'' + 2y' + y = 2x^2 + 3x - 6$.
8.07	$y'' - 4y = x^2 + 7x + 14$.	**8.22**	$y'' - 3y' + 2y = x^2 - 2x + 7$.
8.08	$y'' - 2y' + y = x^2 - 8x - 16$.	**8.23**	$y'' - 12y' + 36y = 4x^2 - x + 8$.
8.09	$y'' + 6y' + 9y = -x^2 + 9x + 18$.	**8.24**	$y'' - 8y' + 12y = x^2 + x + 6$.
8.10	$y'' - 2y' - 3y = x^2 - 10x + 9$.	**8.25**	$y'' - 4y' + 5y = -3x^2 - 2x + 5$.
8.11	$y'' + 2y' - 8y = x^2 + 11x - 8$.	**8.26**	$y'' + 6y' + 13y = x^2 - 3x + 2$.
8.12	$y'' - 5y' + 4y = -x^2 - 12x + 7$.	**8.27**	$y'' - 6y' + 9y = -x^2 + 12x + 6$.
8.13	$y'' + y' - 6y = x^2 + 13x - 6$.	**8.28**	$y'' + 8y' + 25y = x^2 - 5x - 8$.
8.14	$y'' - 4y' + 3y = x^2 - 14x + 5$.	**8.29**	$6y'' - y' - y = -x^2 - 9x - 1$.
8.15	$y'' + 2y' + 10y = -2x^2 + 15x - 4$.	**8.30**	$y'' - 9y' + 20y = x^2 + 10x + 6$.

Задание 9. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений.

9.01 $\begin{cases} x' = 4x - 3y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$	**9.02** $\begin{cases} x' = 5x - y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$	**9.03** $\begin{cases} x' = 8x - y, \\ y' = x + y. \end{cases}$
9.04 $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$	**9.05** $\begin{cases} x' = x - 4y, \\ y' = x + y. \end{cases}$	**9.06** $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = -4x - y. \end{cases}$
9.07 $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 3x + 6y. \end{cases}$	**9.08** $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + 8y. \end{cases}$	**9.09** $\begin{cases} x' = 7x + 3y, \\ y' = x + 5y. \end{cases}$
9.10 $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = -x + 4y. \end{cases}$	**9.11** $\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$	**9.12** $\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = -3x + 2y. \end{cases}$
9.13 $\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = x + y. \end{cases}$	**9.14** $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + y. \end{cases}$	**9.15** $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$
9.16 $\begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y. \end{cases}$	**9.17** $\begin{cases} x' = -2x + 3y, \\ y' = x. \end{cases}$	**9.18** $\begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = 4x - 4y. \end{cases}$
9.19 $\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = -3x + 2y. \end{cases}$	**9.20** $\begin{cases} x' = 5x - y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$	**9.21** $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$

9.22 $\begin{cases} x' = x + 5y, \\ y' = 7x + 3y. \end{cases}$	**9.23** $\begin{cases} x' = -x + 4y, \\ y' = 4x - y. \end{cases}$	**9.24** $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = -2x + 3y. \end{cases}$
9.25 $\begin{cases} x' = y, \\ y' = 2x + 3y. \end{cases}$	**9.26** $\begin{cases} x' = 3x - 6y, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$	**9.27** $\begin{cases} x' = -2x + 8y, \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$
9.28 $\begin{cases} x' = 3x - 7y, \\ y' = x - 5y. \end{cases}$	**9.29** $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 5x - y. \end{cases}$	**9.30** $\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$

Задание 10. Температура (в градусах Цельсия) извлеченного из печи тела в течение 20 минут падает от T_1 до T_2. Температура воздуха равна T_3. Через какое время с момента начала охлаждения температура тела снизится до T_4?

Замечание. По закону Ньютона скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой T_0 тела и температурой воздуха T_3.

	Первоначальная температура тела T_1, $^\circ C$	Температура тела T_2, $^\circ C$	Температура воздуха T_3, $^\circ C$	Требуемая температура тела T_4, $^\circ C$
10.01	200	150	25	30
10.02	150	100	20	25
10.03	180	150	25	40
10.04	200	140	20	30
10.05	100	70	25	40
10.06	150	120	30	40
10.07	170	120	25	35
10.08	100	50	20	35
10.09	150	100	20	30
10.10	100	60	15	20
10.11	120	80	20	25
10.12	130	90	35	30
10.13	140	70	25	30
10.14	120	60	25	35
10.15	200	100	15	20
10.16	170	130	30	40
10.17	190	150	30	45
10.18	100	70	20	25
10.19	130	50	25	30
10.20	180	100	15	20
10.21	200	150	20	40
10.22	110	60	20	30
10.23	200	120	25	35

	Первоначальная температура тела T_1, $^\circ C$	Температура тела T_2, $^\circ C$	Температура воздуха T_3, $^\circ C$	Требуемая температура тела T_4, $^\circ C$
10.24	140	80	30	40
10.25	130	90	35	40
10.26	120	70	25	35
10.27	150	100	20	35
10.28	170	110	30	45
10.29	180	120	30	40
10.30	160	100	15	45

Решение типового варианта контрольной работы

Задание 1. Задана функция $z = x^2 - xy + y^2 - x - 2y + 4$. Требуется:

а) найти частные производные первого и второго порядка функции z;

б) найти градиент функции z в точке $M_0 = (1; 2)$;

в) вычислить производную функции z в точке M_0 в направлении вектора $\vec{a} = (3; 4)$;

г) исследовать на экстремум функцию z.

Решение

а) Найдем частные производные первого и второго порядков функции $z = x^2 - xy + y^2 - x - 2y + 4$:

$$z'_x = \left(x^2 - xy + y^2 - x - 2y + 4\right)'_x = 2x - y - 1;$$

$$z'_y = \left(x^2 - xy + y^2 - x - 2y + 4\right)'_y = -x + 2y - 2;$$

$$z''_{xx} = (2x - y - 1)'_x = 2;$$

$$z''_{xy} = (2x - y - 1)'_y = -1;$$

$$z''_{yx} = (-x + 2y - 2)'_x = -1;$$

$$z''_{yy} = (-x + 2y - 2)'_y = 2.$$

б) Вычислим значения частных производных первого порядка в точке $M_0 = (1; 2)$:

$$z'_x(M_0) = (2x - y - 1)\big|_{(1;\,2)} = 2 \cdot 1 - 2 - 1 = -1;$$

$$z'_y(M_0) = (-x + 2y - 2)\big|_{(1;\,2)} = -1 + 2 \cdot 2 - 2 = 1.$$

Градиент функции $z = f(x; y)$ в точке M_0 есть вектор

$$grad\, z(M_0) = z'_x(M_0) \cdot \vec{i} + z'_y(M_0) \cdot \vec{j}\,.$$

Подставляя полученные значения, получаем

$$grad\, z(M_0) = -1 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} = (-1;\, 1).$$

в) Производная функции $z = f(x;\, y)$ в точке M_0 в направлении вектора $\vec{a}$ равна:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial \vec{a}} = z'_x\left(M_0\right) \cdot \cos\alpha + z'_y\left(M_0\right) \cdot \cos\beta.$$

Найдем направляющие косинусы вектора $\vec{a}$:

$$(\cos\alpha;\, \cos\beta) = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|};\, \frac{a_y}{|\vec{a}|}\right) = \left(\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}};\, \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\right) = \left(\frac{3}{\sqrt{25}};\, \frac{4}{\sqrt{25}}\right) = \left(\frac{3}{5};\, \frac{4}{5}\right).$$

Тогда

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial \vec{a}} = -1 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

г) Исследуем на экстремум функцию $z = x^2 - xy + y^2 - x - 2y + 4$.

Найдем критические точки из системы $\begin{cases} z'_x = 0; \\ z'_y = 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0; \\ -x + 2y - 2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1; \\ -x + 2(2x-1) - 2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1; \\ 3x - 4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{5}{3}; \\ x = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Такая точка только одна – $A\left(\frac{4}{3};\, \frac{5}{3}\right)$.

Найдем значения вторых частных производных функции z в этой точке:

$$z''_{xx}\left(A\right) = 2; \quad z''_{xy}\left(A\right) = -1; \quad z''_{yx}\left(A\right) = -1; \quad z''_{yy}\left(A\right) = 2.$$

Составим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx}(A) & z''_{xy}(A) \\ z''_{yx}(A) & z''_{yy}(A) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) = 3.$$

Так как этот определитель больше нуля, то в точке $A\left(\frac{4}{3};\, \frac{5}{3}\right)$ существует экстремум. Так как $z''_{xx}\left(A\right) = 2 > 0$, то $A\left(\frac{4}{3};\, \frac{5}{3}\right)$ – точка минимума.

Значение функции в точке экстремума равно:

$$z_{\min} = z\left(A\right) = z\left(\frac{4}{3};\, \frac{5}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{3} + \left(\frac{5}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} - 2 \cdot \frac{5}{3} + 4 = \frac{5}{3}.$$

Ответ. б) $grad\, z(M_0) = \left(-1;1\right)$**, в)** $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial \vec{a}} = 0{,}2$**, г)** $z_{\min} = z\left(\frac{4}{3};\, \frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3}$.

Задание 2. При изучении функциональной зависимости $y = f(x)$ произведен ряд измерений величины *X* и получены соответствующие значения величины *У*. Результаты измерений занесены в таблицу:

X	*2*	*2,5*	*3*	*3,5*	*4*	*4,5*	*5*	*5,5*
У	*8,822*	*10,064*	*16,209*	*19,992*	*20,471*	*26,387*	*30,432*	*35,989*

Предполагая, что теоретически зависимость между значениями величин *X* и *У* выражается линейной функцией $y = ax + b$, методом наименьших квадратов найти параметры *a* и *b.* Для найденных *a* и *b*, найдите $y(6{,}25)$.

Решение

Для нахождения неизвестных параметров линейной функции $y = ax + b$ воспользуемся системой:

$$\begin{cases} b \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \quad , \\ b \cdot n + a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \quad . \end{cases}$$

Формула $y = ax + b$ с параметрами *a* и *b*, определенными из системы, называется *уравнением регрессии*. Прямая линия, описываемая этим уравнением, называется *линией регрессии*.

Для нахождения коэффициентов проведем необходимые дополнительные вычисления и запишем их в таблицу.

i	x_i	y_i	$x_i^{\,2}$	$x_i y_i$
1	2	8,822	4	17,64
2	2,5	10,064	6,25	25,16
3	3	16,209	9	48,63
4	3,5	19,992	12,25	69,97
5	4	20,471	16	81,88
6	4,5	26,387	20,25	118,7
7	5	30,432	25	152,2
8	5,5	35,989	30,25	197,94
Сумма	30	168,4	123	712,1

Таким образом, $n = 8$, $\sum\limits_{i=1}^{8} x_i = 30$, $\sum\limits_{i=1}^{8} y_i = 168{,}4$, $\sum\limits_{i=1}^{8} x_i^2 = 123$, $\sum\limits_{i=1}^{8} x_i y_i = 712{,}1$. Подставляя найденные суммы, получим систему:

$$\begin{cases} 30b + 123a = 712{,}1, \\ 8b + 30a = 168{,}4. \end{cases}$$

Решим данную систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 30 & 123 \\ 8 & 30 \end{vmatrix} = 30 \cdot 30 - 8 \cdot 123 = 900 - 984 = -84,$$

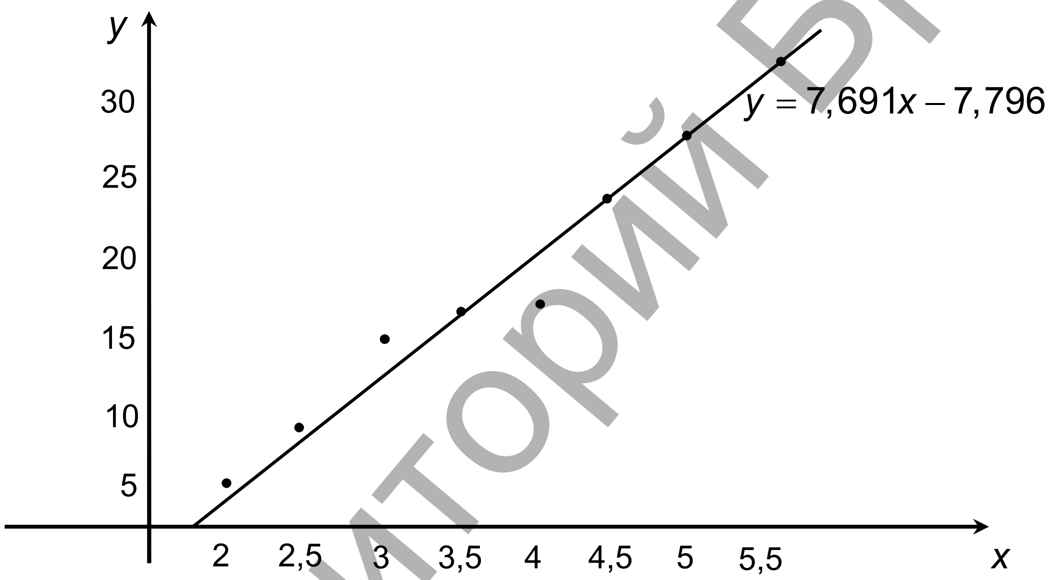
$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 30 & 712{,}1 \\ 8 & 168{,}4 \end{vmatrix} = 30 \cdot 168{,}4 - 712{,}1 \cdot 8 = 5051 - 5697 = -646,$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 712{,}1 & 123 \\ 168{,}4 & 30 \end{vmatrix} = 712{,}1 \cdot 30 - 168{,}4 \cdot 123 = 21364 - 20709 = 654{,}8.$$

Тогда $a = \dfrac{\Delta_a}{\Delta} = \dfrac{-646}{-84} \approx 7{,}691$, $b = \dfrac{\Delta_b}{\Delta} = \dfrac{654{,}8}{-84} \approx -7{,}796$.

Таким образом, зависимость между значениями величин $У$ и X выражается линейной функцией $y = 7{,}691x - 7{,}796$.

Построим график этой зависимости:



Чтобы найти $y(6{,}25)$, подставим значение $x = 6{,}25$ в полученную формулу: $y(6{,}25) = 7{,}691 \cdot 6{,}25 - 7{,}796 \approx 40{,}273$.

Ответ. $y = 7{,}691x - 7{,}796$; $y(6{,}25) \approx 40{,}273$.

Задание 3. Найти неопределенные интегралы (результаты проверить дифференцированием).

а) $\displaystyle\int \frac{2\sqrt[5]{x} - 3x^2 + 4\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}}dx$; **б)** $\displaystyle\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sin^2 x - 2}$; **в)** $\displaystyle\int x \cdot \operatorname{arctg} x\, dx$.

Решение

а) $\displaystyle\int \frac{2\sqrt[5]{x} - 3x^2 + 4\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}}dx$. Так как $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, то можно свести данный интеграл к табличным интегралам $\displaystyle\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$ и $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

Преобразуем подынтегральную функцию и найдем интеграл.

$$\int \frac{2\sqrt[5]{x}-3x^2+4\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}}dx=\int \frac{2x^{\frac{1}{5}}-3x^2+4x^{\frac{1}{3}}}{x^1\cdot x^{\frac{1}{3}}}dx=\int\left(2\frac{x^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{4}{3}}}-3\frac{x^2}{x^{\frac{4}{3}}}+4\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}}\right)dx=$$

$$=\int\left(2x^{\frac{1}{5}-\frac{4}{3}}-3x^{2-\frac{4}{3}}+4x^{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}}\right)dx=\int\left(2x^{-\frac{17}{15}}-3x^{\frac{2}{3}}+4x^{-1}\right)dx=$$

$$=2\int x^{-\frac{17}{15}}dx-3\int x^{\frac{2}{3}}dx+4\int\frac{dx}{x}=2\cdot\frac{x^{-\frac{17}{15}+1}}{-\frac{17}{15}+1}-3\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+4\ln|x|+C=$$

$$=-15x^{-\frac{2}{15}}-\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+4\ln|x|+C=-\frac{15}{\sqrt[15]{x^2}}-\frac{9}{5}\sqrt[3]{x^5}+4\ln|x|+C\ \ (C=const).$$

Проверка. Продифференцируем получившееся выражение:

$$\left(-\frac{15}{\sqrt[15]{x^2}}-\frac{9}{5}\sqrt[3]{x^5}+4\ln|x|+C\right)'=\left(-15x^{-\frac{2}{15}}-\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+4\ln|x|+C\right)'=$$

$$=-15\cdot\left(-\frac{2}{15}\right)x^{-\frac{2}{15}-1}-\frac{9}{5}\cdot\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}+4\cdot\frac{1}{x}=2x^{-\frac{17}{15}}-3x^{\frac{2}{3}}+\frac{4}{x}=\frac{2\sqrt[5]{x}-3x^2+4\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}}.$$

б) Так как $\left(\sin^2 x\right)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$, то получим

$$\int\frac{\sin 2x}{\sin^2 x-2}dx=\int\frac{\left(\sin^2 x\right)'dx}{\sin^2 x-2}=\int\frac{d\left(\sin^2 x\right)}{\sin^2 x-2}=\int\frac{d\left(\sin^2 x-2\right)}{\sin^2 x-2}=\ln\left|\sin^2 x-2\right|+C\ .$$

Проверка. $\left(\ln\left|\sin^2 x-2\right|+C\right)'=\dfrac{1}{\sin^2 x-2}\cdot 2\sin x\cos x=\dfrac{\sin 2x}{\sin^2 x-2}.$

в) К данному интегралу применим метод интегрирования по частям

$$\int x\cdot\operatorname{arctg}x\,dx=\left|\begin{array}{ll} u=\operatorname{arctg}x, & du=\left(\operatorname{arctg}x\right)'dx=\dfrac{dx}{x^2+1}\\ dv=x\,dx, & v=\displaystyle\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2+1\right)-1}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\left(x-\operatorname{arctg}x\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x+C.$$

Проверка. $\left(\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x+C\right)'=$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot arctgx+\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\cdot\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}=x\ arctgx+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=x\ arctgx\,.$$

Ответ. а) $\displaystyle\int\frac{2\sqrt[5]{x}-3x^2+4\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}}dx=-\frac{15}{\sqrt[15]{x^2}}-\frac{9}{5}\sqrt[3]{x^5}+4\ln|x|+C;$

б) $\displaystyle\int\frac{\sin 2x\ dx}{\sin^2 x-2}=\ln\left|\sin^2 x-2\right|+C;$

в) $\displaystyle\int x\cdot\operatorname{arctg}x\,dx=\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x+C.$

Задание 4. Вычислить определенный интеграл $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\frac{2x-3}{\sqrt{5-4x}}dx$.

Решение

Для вычисления интеграла воспользуемся теоремой о замене в определенном интеграле.

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{2x-3}{\sqrt{5-4x}}dx=\left[\begin{array}{c}t=\sqrt{5-4x}\quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{5-t^2}{4},\quad dx=-\dfrac{tdt}{2},\\ t_н=\sqrt{5-4\cdot(-1)}=3,\ \ t_в=\sqrt{5-4\cdot 1}=1\end{array}\right]=$$

$$=\int\limits_{3}^{1}\frac{2\cdot\dfrac{5-t^2}{4}-3}{t}\cdot\left(-\frac{tdt}{2}\right)=\frac{1}{4}\int\limits_{3}^{1}\left(t^2+1\right)dt=\frac{1}{4}\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\Bigg|_{3}^{1}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+1-9-3\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{32}{3}\right)=-\frac{8}{3}.$$

Ответ. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\frac{2x-3}{\sqrt{5-4x}}dx=-\frac{8}{3}$.

Задание 5. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2x - 2$ и $y = x + 4$. Выполнить рисунок.

Решение

Найдем точки пересечения параболы $y = x^2 + 2x - 2$ и прямой $y = x + 4$.

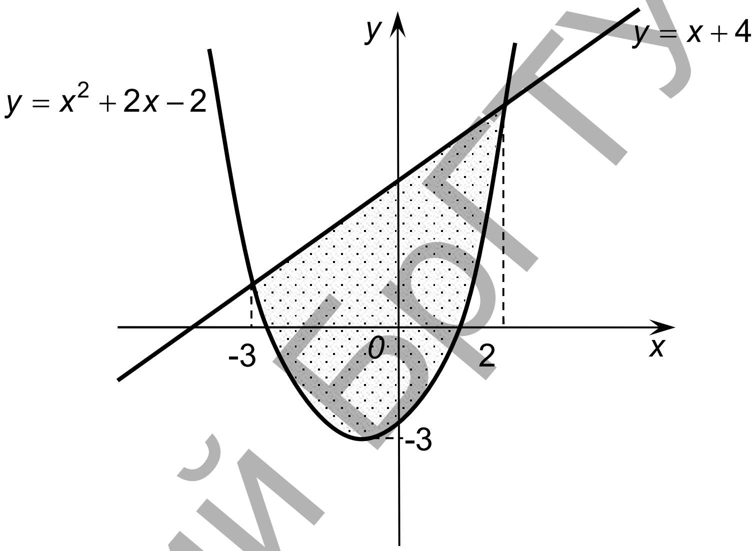
$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = x + 4 \end{cases}$$

$x^2 + 2x - 2 = x + 4$

$x^2 + x - 6 = 0$

$x_1 = -3$, $x_2 = 2$

$y_1 = 1$, $y_2 = 6$.



Используя найденные точки $(-3; 1)$ и $(2; 6)$, построим фигуру, ограниченную линиями:

$y = x^2 + 2x - 2$ – парабола с вершиной в точке $(-1; -3)$ и $y = x + 4$ – прямая.

Воспользуемся формулой вычисления площади плоской фигуры

$$S_ф = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx,$$

где $y = f_2(x)$ – уравнение верхней, а $y = f_1(x)$ – нижней границы области.

В нашем случае $f_2(x) = x + 4$, $f_1(x) = x^2 + 2x - 2$. Тогда

$$S_ф = \int_{-3}^{2} \left((x+4) - \left(x^2 + 2x - 2\right)\right)dx = \int_{-3}^{2} \left(-x^2 - x + 6\right)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\right)\Bigg|_{-3}^{2} = \left(-\frac{8}{3} - 2 + 12\right) - \left(9 - \frac{9}{2} - 18\right) = 20\frac{5}{6} \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ. $S_ф = 20\frac{5}{6}$ *(кв. ед.)*.

Задание 6. Найти общее или частное решение дифференциальных уравнений.

а) *Пример 1.* Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y' \cdot \sin^2 x = y \ln y$.

Решение

$y' \cdot \sin^2 x = y \ln y$ – уравнение с разделяющимися переменными. Преобразуем уравнение следующим образом:

$$y' \cdot \sin^2 x = y \ln y \;\Rightarrow\; \sin^2 x \cdot \frac{dy}{dx} = y \ln y \;\Rightarrow\; \sin^2 x dy = y \ln y dx .$$

Разделим переменные и проинтегрируем обе части равенства

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{dy}{y \ln y} \;\Rightarrow\; \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \frac{dy}{y \ln y} \;\Rightarrow\; -ctgx + C = \int \frac{d(\ln y)}{\ln y} \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow\; -ctgx + C = \ln\left|\ln y\right|$ – *общий интеграл* исходного дифференциального уравнения, где $C = const$.

Ответ. $-ctgx + C = \ln\left|\ln y\right|$.

Пример 2. Найти *частное решение* дифференциального уравнения $(2x+1)dy - (y+4)dx = 0$, удовлетворяющее условию $y(4) = 11$.

Решение

$(2x+1)dy - (y+4)dx = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$$(2x+1)dy = (y+4)dx \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y+4} = \frac{dx}{2x+1} \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{y+4} = \int \frac{dx}{2x+1} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \int \frac{d(y+4)}{y+4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+1)}{2x+1} \;\Rightarrow\; \ln|y+4| = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + \ln|C| \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \ln|y+4| = \ln\left(C \cdot \sqrt{2x+1}\right) \;\Rightarrow\; y+4 = C \cdot \sqrt{2x+1} \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow\; y = C \cdot \sqrt{2x+1} - 4$ – общее решение дифференциального уравнения, $C = const$.

Найдем частное решение уравнения. Для этого определим значение постоянной C так, чтобы выполнялось начальное условие $y(4) = 11$.

$11 = C\sqrt{2 \cdot 4 + 1} - 4 \;\Rightarrow\; 3C = 15 \;\Rightarrow\; C = 5$. Получаем *частное решение* данного уравнения $y = 5\sqrt{2x+1} - 4$.

Ответ. $y = 5\sqrt{2x+1} - 4$.

б) Найти *частное решение* дифференциального уравнения $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x} - 4x$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 4$.

Решение

$y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x} - 4x$ – линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Найдем общее решение исходного уравнения с помощью замены $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$. Тогда $y' = u'v + v'u$. Подставим выражения для y и y' в уравнение.

$$u'v + v'u + \frac{3}{x}uv = \frac{2}{x} - 4x \;\Rightarrow\; u'v + u\left(v' + \frac{3}{x}v\right) = \frac{2}{x} - 4x .$$

Функции $u(x)$ и $v(x)$ определим из системы $\begin{cases} v' + \frac{3}{x}v = 0 \\ u'v = \frac{2}{x} - 4x \end{cases}$.

Каждое уравнение системы – уравнение с разделяющимися переменными. Решим первое уравнение системы.

$$v' + \frac{3}{x}v = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dx} = -\frac{3v}{x} \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v} = -\frac{3dx}{x} \;\Rightarrow\; \ln|v| = -3\ln|x| \;\Rightarrow\; v = \frac{1}{x^3} .$$

Найденную функцию $v(x)$ подставим во второе уравнение системы и найдем функцию $u(x)$.

$$u'v = \frac{2}{x} - 4x \;\Rightarrow\; \frac{u'}{x^3} = \frac{2}{x} - 4x \;\Rightarrow\; u' = 2x^2 - 4x^4 \;\Rightarrow\; u = \int\left(2x^2 - 4x^4\right)dx \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; u = \frac{2x^3}{3} - \frac{4x^5}{5} + C .$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = u \cdot v \;\Rightarrow\; y = \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{4x^5}{5} + C\right) \cdot \frac{1}{x^3} \;\Rightarrow\; y = \frac{2}{3} - \frac{4x^2}{5} + \frac{C}{x^3},\; C = const .$$

Определим константу C из начального условия $y(1) = 4$.

$$4 = \frac{2}{3} - \frac{4}{5} + C \;\Rightarrow\; C = 4 + \frac{2}{15} \;\Rightarrow\; C = \frac{62}{15} .$$

Искомое *частное решение* имеет вид $y = \frac{2}{3} - \frac{4x^2}{5} + \frac{62}{15x^3}$.

Ответ. $y = \frac{2}{3} - \frac{4x^2}{5} + \frac{62}{15x^3}$.

Задание 7. а) Решить задачу Коши

$$y'' + 3y' - 4y = 0,\ y(0) = 4,\ y'(0) = -1.$$

Решение

$y'' + 3y' - 4y = 0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 3k - 4 = 0.$$

Корнями характеристического уравнения являются числа

$$k_1 = -4 \text{ и } k_2 = 1.$$

Так как корни характеристического уравнения – действительные не совпадающие числа, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{k_1 \cdot x} + C_2 e^{k_2 \cdot x} \Rightarrow y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x},\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Неизвестные константы C_1 и C_2 найдем из условий $\begin{cases} y(0) = 4, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$

Найдем y':

$$y'(x) = \left(C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x}\right)' = -4C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x}.$$

Тогда, подставляя начальные условия в $y(x)$ и $y'(x)$, получим

$$\begin{cases} C_1 e^{-4\cdot 0} + C_2 e^{0} = 4, \\ -4C_1 e^{-4\cdot 0} + C_2 e^{0} = -1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} C_1 + C_2 = 4, \\ -4C_1 + C_2 = -1. \end{cases}$$

Решая систему, найдем, что $C_1 = 1$ и $C_2 = 3$.

Значит, решение задачи Коши имеет вид:

$$y(x) = e^{-4x} + 3e^{x}$$

Ответ. $y(x) = e^{-4x} + 3e^{x}$.

б) *Пример 1.* Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 10y' + 25y = 0.$$

Решение

$y'' + 10y' + 25y = 0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 10k + 25 = 0.$$

Корнями характеристического уравнения являются числа

$$k_1 = k_2 = -5.$$

Так как корни характеристического уравнения – действительные совпадающие числа, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x)=\left(C_1x+C_2\right)e^{k\cdot x} \ \Rightarrow \ y(x)=\left(C_1x+C_2\right)e^{-5x},\ C_1,\ C_2\in\mathbb{R}.$$

Ответ. $y(x)=\left(C_1x+C_2\right)e^{-5x},\ C_1,\ C_2\in\mathbb{R}$.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-4y'+5y=0.$$

Решение

$y''-4y'+5y=0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2-4k+5=0.$$

Корнями характеристического уравнения являются числа

$$k_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{D}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4i^2}}{2}=\frac{4\pm2i}{2}=2\pm i=\alpha\pm\beta i,$$

где $D=4^2-4\cdot5=-4=4\cdot i^2$, так как $i^2=-1$. Откуда имеем $\alpha=2$ и $\beta=1$.

Так как корни характеристического уравнения – пара комплексно сопряженных чисел, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x)=e^{\alpha\cdot x}\left(C_1\cos(\beta x)+C_2\sin(\beta x)\right) \ \Rightarrow \ y(x)=e^{2x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right),$$
$$C_1,\ C_2\in\mathbb{R}.$$

Ответ. $y(x)=e^{2x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right),\ C_1,\ C_2\in\mathbb{R}$.

Задание 8. Найти общее решение дифференциального уравнения.

Пример 1. $y''-4y'+5y=10x^2+4x+3$.

Решение

$y''-4y'+5y=10x^2+4x+3$ – линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

Общее решение исходного дифференциального уравнения будем искать в виде суммы двух функций

$$y(x)=\bar{y}(x)+y^*(x),$$

где $\bar{y}(x)$ – общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения $y''-4y'+5y=0$, $y^*(x)$ – любое частное решение неоднородного дифференциального уравнения $y''-4y'+5y=10x^2+4x+3$.

Общим решением однородного дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

является функция $\bar{y}(x) = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$, C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$ (см. решение задания 7).

Найдем $y^*(x)$.

Правая часть исходного дифференциального уравнения $f(x) = 10x^2 + 4x + 3$ – многочлен второй степени. Поэтому, частное решение будем искать в виде $y^*(x) = x^s\left(Ax^2 + Bx + C\right)$, где параметр s равен количеству совпадений числа 0 с корнями характеристического уравнения. Так как среди корней нет числа 0, то $s = 0$. Тогда $y^*(x) = Ax^2 + Bx + C$.

Вычислим неизвестные коэффициенты A, B и C по методу неопределенных коэффициентов. Для этого найдем $(y^*)'$ и $(y^*)''$.

$$(y^*)' = \left(Ax^2 + Bx + C\right)' = 2Ax + B,$$

$$(y^*)'' = (2Ax + B)' = 2A.$$

Так как $y^*(x)$ – это решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 5y = 10x^2 + 4x + 3,$$

то, подставляя в уравнение вместо y^*, $(y^*)'$ и $(y^*)''$ найденные выражения, получим

$$2A - 4(2Ax + B) + 5\left(Ax^2 + Bx + C\right) = 10x^2 + 4x + 3.$$

В левой части уравнения раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:

$$5Ax^2 + (-8A + 5B)x + (2A - 4B + 5C) = 10x^2 + 4x + 3.$$

Приравняем коэффициенты в левой и правой частях уравнения при одинаковых степенях:

$$\left.\begin{array}{c|c} x^2 & 5A = 10 \\ x^1 & -8A + 5B = 4 \\ x^0 & 2A - 4B + 5C = 3 \end{array}\right\},$$

$$\begin{cases} A = 2 \\ 5B = 4 + 16 \\ -4B + 5C = 3 - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ 5B = 20 \\ -4B + 5C = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 4 \\ 5C = -1 + 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 4 \\ 5C = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 4 \\ C = 3 \end{cases}$$

Следовательно, частное решение исходного дифференциального уравнения примет вид

$$y^*(x) = 2x^2 + 4x + 3.$$

Тогда общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x)=e^{2x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)+2x^2+4x+3,\ C_1,\ C_2\in\mathbb{R}.$$

Ответ. $y(x)=e^{2x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)+2x^2+4x+3,\ C_1,\ C_2\in\mathbb{R}.$

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-4y'=-12x^2+14x+6.$$

Решение

$y''-4y'=-12x^2+14x+6$ – линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

Общее решение исходного дифференциального уравнения будем искать в виде суммы двух функций

$$y(x)=\bar{y}(x)+y^*(x),$$

где $\bar{y}(x)$ – общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения $y''-4y'=0$, $y^*(x)$ – любое частное решение неоднородного дифференциального уравнения $y''-4y'=-12x^2+14x+6$.

Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения

$$y''-4y'=0.$$

Составим характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению

$$k^2-4k=0.$$

Корнями характеристического уравнения являются числа

$$k_1=0 \text{ и } k_2=4.$$

Так как корни характеристического уравнения – действительные не совпадающие числа, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$\bar{y}(x)=C_1e^{0\cdot x}+C_2e^{4\cdot x}\quad\Rightarrow\quad\bar{y}(x)=C_1+C_2e^{4x},\ C_1,\ C_2\in\mathbb{R}.$$

Найдем $y^*(x)$.

Правая часть исходного дифференциального уравнения $f(x)=-12x^2+14x+6$ – многочлен второй степени. Поэтому, частное решение будем искать в виде $y^*(x)=x^s\left(Ax^2+Bx+C\right)$, где параметр s равен количеству совпадений числа 0 с корнями характеристического уравнения. Так как $k_1=0$, то $s=1$. Тогда

$$y^*(x)=x\left(Ax^2+Bx+C\right)=Ax^3+Bx^2+Cx.$$

Вычислим неизвестные коэффициенты A, B и C по методу неопределенных коэффициентов. Для этого найдем $(y^*)'$ и $(y^*)''$

$$(y^*)' = \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right)' = 3Ax^2 + 2Bx + C,$$

$$(y^*)'' = \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right)' = 6Ax + 2B.$$

Так как $y^*(x)$ – это решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' = -12x^2 + 14x + 6,$$

то, подставляя в уравнение вместо y^*, $(y^*)'$ и $(y^*)''$ найденные выражения, получим

$$6Ax + 2B - 4\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = -12x^2 + 14x + 6.$$

В левой части уравнения раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:

$$-12Ax^2 + (6A - 8B)x + (2B - 4C) = -12x^2 + 14x + 6.$$

Приравняем коэффициенты в левой и правой частях уравнения при одинаковых степенях:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & -12A = -12 \\ x^1 & 6A - 8B = 14 \\ x^0 & 2B - 4C = 6 \end{array}\Bigg\}$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ -8B = 14 - 6 \\ 2B - 4C = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ -8B = 8 \\ 2B - 4C = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ -4C = 6 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ -4C = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1. \\ B = -1. \\ C = -2. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение исходного дифференциального уравнения примет вид

$$y^*(x) = x^3 - x^2 - 2x.$$

Тогда общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{4x} + x^3 - x^2 - 2x,\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ. $y(x) = C_1 + C_2 e^{4x} + x^3 - x^2 - 2x$, $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

Задание 9. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = -7x + y, \\ y' = -2x - 5y. \end{cases}$$

Решение

Решим систему дифференциальных уравнений методом исключений. продифференцируем по t первое уравнение системы.

$$x'' = -7x' + y'.$$

Подставляя в полученное уравнение вместо y' ее значение из второго уравнения исходной системы, получим

$$x'' = -7x' - 2x - 5y$$

Выразим из первого уравнения исходной системы y и подставим в полученное уравнение

$$x' = -7x + y \quad \Rightarrow \quad y = x' + 7x.$$

$$x'' = -7x' - 2x - 5\left(x' + 7x\right) \quad \Rightarrow \quad x'' + 12x' + 37x = 0.$$

Получим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение $k^2 + 12k + 37 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = -6 \pm 1 \cdot i$. Тогда

$$x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t),\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Используя равенство $y = x' + 7x$, найдем функцию $y\left(t\right)$.

$$y = x' + 7x = \left(e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)\right)' + 7\left(e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)\right) =$$

$$= -6\left(e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)\right)' + \left(e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t)\right) +$$

$$+7\left(e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)\right)' = e^{-6t}\left((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 + C_1)\sin t)\right).$$

Таким образом, решением системы будет

$$\begin{cases} x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y = e^{-6t}\left((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 + C_1)\sin t)\right), \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y = e^{-6t}\left((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 + C_1)\sin t)\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Задание 10. Температура (в градусах Цельсия) извлеченного из печи тела в течение 20 минут падает от $T_1 = 100^\circ C$ до $T_2 = 60^\circ C$. Температура воздуха равна $T_3 = 20^\circ C$. Через какое время с момента начала охлаждения температура тела снизится до $T_4 = 30^\circ C$?

Решение

По закону теплопроводности скорость охлаждения какого-либо тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. С изменением разности температур при охлаждении меняется и скорость охлаждения тела. Таким образом, этот процесс неравномерный. Если $T(t)$ – функция, описывающая изменение температуры тела в зависимости от времени *t*, то скорость охлаждения тела равна производной этой функции по времени. Так как эта скорость пропорциональна разности температур, то получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k \cdot \left(T(t) - T_0\right),$$

которое описывает процесс охлаждения (T_0 – температура окружающей среды, *k* – коэффициент пропорциональности).

$\frac{dT(t)}{dt} = -k \cdot \left(T(t) - T_0\right)$ – дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

В данном уравнении температура окружающей среды (температура воздуха) равна $T_3 = 20^\circ C$. Тогда уравнение будет иметь вид

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k \cdot \left(T(t) - 20\right).$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dT(t)}{T(t) - 20} = -k \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \ln\left(T(t) - 20\right) = -kt + \ln C \quad \Rightarrow \quad T(t) - 20 = e^{-kt + \ln C} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad T(t) = Ce^{-kt} + 20$ – общее решение уравнения.

Найдем значение постоянной *C*. В начальный момент времени $t = 0$ – $T_1 = 100^\circ C$. Поэтому, $100 = Ce^{-k \cdot 0} + 20 \quad \Rightarrow C = 100 - 20 \quad \Rightarrow C = 80$. Тогда частное решение уравнения имеет вид

$$T(t) = 80e^{-kt} + 20.$$

Найдем коэффициент пропорциональности *k*. Учитывая, что через время $t = 20$ минут температура тела падает от $T_1 = 100^\circ C$ до $T_2 = 60^\circ C$, получим:

$$T(20) = 80e^{-k \cdot 20} + 20 = 60 \quad \Rightarrow e^{20k} = 2 \quad \Rightarrow 20k = \ln 2 \quad \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{20}.$$

Подставляя найденный коэффициент k в уравнение $T(t) = 80e^{-kt} + 20$, получим функцию изменения температуры тела:

$$T(t) = 80e^{-\frac{\ln 2}{20}t} + 20 \quad \Rightarrow \; T(t) = 80\left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{t}{20}} + 20 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; T(t) = 80 \cdot 2^{-\frac{t}{20}} + 20.$$

Найдем время t с момента начала охлаждения, когда температура тела снизится до $T_4 = 30^{\circ}C$:

$$T(t) = 30 \quad \Rightarrow \; 80 \cdot 2^{-\frac{t}{20}} + 20 = 30 \quad \Rightarrow \; 2^{-\frac{t}{20}} = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \; -\frac{t}{20} = -3 \quad \Rightarrow$$

$$t = 60\,\textit{мин.}$$

Таким образом, тело охладится до температуры $T^0 = 30^{\circ}C$ через *1* час.

Ответ. Через *1* час.

Учебно-методическая литература по дисциплине "Математика"

1. Высшая математика для инженеров : учеб. пособие для студ. : в 2 т. / С. А. Минюк [и др.]; под общ. ред. Н. А. Микулик. − Минск : Элайда, 2004. – Т. 1. – 455 с. – Т. 2. – 586 с.
2. Гусак, А. А. Высшая математика : учебник для студ. вузов : в 2 т. / А. А. Гусак. – 6-е изд., испр. − Минск : ТетраСистемс, 2007. – Т. 1. – 544 с. – Т. 2. – 448 с.
3. Гусак, А. А. Математический анализ и дифференциальные уравнения : справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак. – 4-е изд. – Минск : ТетраСистемс, 2006. – 416 с.
4. Гусак, А. А. Справочник по высшей математике : учебное пособие / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова; ред. П. И. Монастырный. - 4-е изд., стер. – Минск : ТетраСистемс, 2002. − 640 с.
5. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для втузов : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. − 5-е изд., испр. − М. : Высш. шк., 1996. – Ч. 1. – 304 с. – Ч. 2. – 316 с.
6. Жевняк, Р. М. Высшая математика : учеб. пособие для втузов : в 5 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. − Минск : Выш. шк., 1985. – 3 ч. – 207 с.
7. Индивидуальные задания по высшей математике : учеб. пос. : в 4 ч. / Под общ. ред. А.П. Рябушко. – 6-е изд., испр. – Минск : Выш. шк., 2014. – Ч. 2 : Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – 396 с. : ил.
8. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. − М. : АйрисПресс, 2004. − 288 с.
9. Сборник задач по высшей математике: с контрольными работами : в 2 т. / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. − 7-е изд. − М. : АйрисПресс, 2008. – Т. 1. – 576 с. – Т. 2. – 592 с.
10. Сухая, Т. А. Задачи по высшей математике : учеб. пособие : в 2 ч. / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. − Минск : Выш. шк., 1993. – Ч. 1. – 416 с. – Ч. 2. – 301 с.

Содержание

Учебное издание

Составители:
Каримова Татьяна Ивановна
Гладкий Иван Иванович
Махнист Леонид Петрович
Санюкевич Александр Викторович

МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации и варианты контрольной работы
по разделам «Функции нескольких переменных»,
«Интегральное исчисление функции одной переменной»,
«Дифференциальные уравнения»
общего курса дисциплины «Математика»
для студентов технических специальностей заочной формы обучения

Ответственный за выпуск: Каримова Т.И.
Редактор: Боровикова Е.А.
Компьютерная верстка: Митлошук М.А.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 24.05.2017 г. Формат 60x84 $^1/_{16}$. Усл. п. л. 2,09.
Уч.-изд. л. 2,25. Заказ № 466. Тираж 60 экз. Отпечатано на ризографе
Учреждения образования «Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.