УДК 510.662

АЛГОРИТМ ПЕРЕВОДА НАТУРАЛЬНОГО ВЫВОДА ИЗ ДРЕВОВИДНОЙ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ФИТЧЕВСКУЮ ФОРМУ

Филипповский В.А.
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург (Россия)

Для представления натуральных выводов существуют различные системы записи: в древовидной форме (Генцен), в линейной форме с указанием областей действия допущений (Фитч), в виде вложенных областей вывода (Яськовский). Наиболее известны первые два способа представления натуральных выводов. Каждый из них обладает своими плюсами и минусами. Древовидная форма натуральных выводов удобнее фитчевской для осуществления поиска вывода. Но после того как вывод построен, вывод экономнее записывать в фитчевской нотации. Экономия и удобство заключается, главным образом, в том, что любое доказательство в фитчевской нотации без особых сложностей размещается на обычных листах, тогда как доказательство в древовидной форме сильно разрастается в ширину, и запись его быстро выходит за границы листа. Кроме того, преимуществом фитчевской записи натуральных выводов перед древовидной формой является то, что посылки вывода записываются только один раз.

Рассмотрим алгоритм перевода натурального вывода из древовидной формы представления в фитчевскую форму. Натуральный вывод в генценовской форме представляет собой дерево. Пусть дан некоторый натуральный вывод в виде дерева. В качестве примера возьмём доказательство формулы логики предикатов (1):

$$\dfrac{\dfrac{\overset{+1}{\exists xP(x)\vee\exists xQ(x)} \qquad \dfrac{\overset{+2}{\exists xP(x)} \quad \dfrac{\dfrac{\overset{+3}{P(a)}}{P(a)\vee Q(a)}\vee^{+}}{\exists x(P(x)\vee Q(x))}\exists^{+}}{\exists x(P(x)\vee Q(x))}\exists^{-}-3 \qquad \dfrac{\overset{+4}{\exists xQ(x)} \quad \dfrac{\dfrac{\overset{+5}{Q(b)}}{P(b)\vee Q(b)}\vee^{+}}{\exists x(P(x)\vee Q(x))}\exists^{+}}{\exists x(P(x)\vee Q(x))}\exists^{-}-5}{\exists x(P(x)\vee Q(x))}\vee^{-}-2,-4}{\exists xP(x)\vee\exists xQ(x)\to\exists x(P(x)\vee Q(x))}\to^{+}-1$$

Для того чтобы получить фитчевскую форму, соответствующую этому дереву, нужно преобразовать это дерево в элементарный путь без циклов. Для этого необходимо трансформировать этот граф таким образом, чтобы каждый узел стал связным только с одним узлом.

Для этого достаточно следовать нескольким правилам:

1) взять в качестве первого элемента вывода крайний левый верхний элемент дерева, а далее идти слева направо и сверху вниз;

2) фигуры заключения с одной посылкой переписываем в две строки вывода: посылку в n-ую строку, заключение – в $n+1$-ую строку;

3) фигуры заключения с несколькими (двумя или тремя) посылками переписываем сначала всю левую ветвь, затем – всю правую ветвь, а потом заключение. При этом преобразование вывода в самом простом случае происходит так, как показано на рис. 1;

4) если достигнута формула, стоящая в заключении самой нижней фигуры заключения, то её записью в вывод завершается перевод натурального вывода из древовидной формы представления в фитчевскую форму.

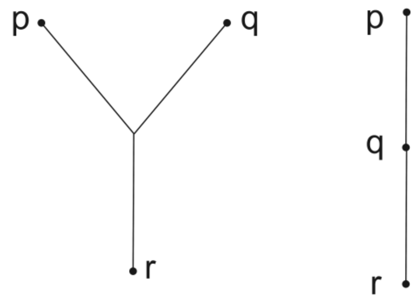

Рисунок 1

Если следовать этому алгоритму, получится следующий вывод (2) в фитчевской нотации, соответствующий доказательству (1):

1.	$\$xP(x)\text{Ъ}\$xQ(x)$	доп. 1
2.	$\$xP(x)$	доп. 2
3.	$P(a)$	доп. 3
4.	$P(a)\text{Ъ}Q(a)$	Ъ^{+}, 3
5.	$\$x(P(x)\text{Ъ}Q(x))$	$\$^{+}$, 4
6.	$\$x(P(x)\text{Ъ}Q(x))$	$\$^{-}$, 5, - 3
7.	$\$xQ(x)$	доп. 4
8.	$Q(b)$	доп. 5
9.	$P(b)\text{Ъ}Q(b)$	Ъ^{+}, 8
10.	$\$x(P(x)\text{Ъ}Q(x))$	$\$^{+}$, 9
11.	$\$x(P(x)\text{Ъ}Q(x))$	$\$^{-}$, 10, - 5
12.	$\$x(P(x)\text{Ъ}Q(x))$	Ъ^{-}, - 2, - 4
13.	$\$xP(x)\text{Ъ}\$xQ(x)\text{Й}\,\$x(P(x)\text{Ъ}Q(x))$	Й^{+}, - 1

Крайняя верхняя левая формула вывода (1) – $\$xP(x)\text{Ъ}\$xQ(x)$. По п. 1 алгоритма берём её в качестве первого допущения. Сколько посылок в фигуре заключения, которую мы рассматриваем? Если эта формула является единственной посылкой, то по п. 2 алгоритма переходим к заключению данной фигуры, если больше, то по п. 3 переходим к другим посылкам. В нашем случае имеется 3 посылки. Но прежде, чем переходить непосредственно к самим посылкам, нам нужно преобразовать две ветви, корнями которых являются две оставшиеся посылки данной фигуры заключения. Переходим ко второй ветви и применяем к ней ту же последовательность действий. Находим её крайнюю верхнюю левую формулу: $\$xP(x)$. Берём её в качестве второго допущения и рассматриваем фигуру заключения, в которую входит эта формула, выясняем, является ли она однопосылочной фигурой (в этом случае применяем п. 2 алгоритма), либо имеет большее количество посылок (тогда применяем п. 3 алгоритма). Следуя этой схеме, мы строим первые 11 строк доказательства. После того, как доказательство построено до 11-й строки включительно, мы трансформировали все ветви, укоренённые в посылках изначальной фигуры заключения, и теперь мы можем записать заключение этой фигуры. После этого применяем п. 2 алгоритма, поскольку заключение входит в нижнюю фигуру заключения в качестве единственной посылки, а после этого – п.4. На этом построение фитчевскую формы натурального вывода по его древовидной форме представления завершено.