УДК 519.652+517.548.5

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ, ЗАДАННЫХ НА МНОЖЕСТВЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Худяков А.П.
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест
Научный руководитель: Янович Л.А., д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент НАН

При решении многих практических задач обычно используются интерполяционные формулы невысоких порядков. Это относится как к случаю интерполяции скалярных функций, так и к задаче операторного интерполирования и вызвано в значительной степени тем, что при увеличении порядка интерполяционных формул значительно усложняется их общий вид, что приводит соответственно к более сложной структуре получаемых на их основе алгоритмов. Многие вопросы теории интерполирования операторов изложены в монографиях [1, 2].

Данная статья посвящена задаче построения и исследования алгебраических интерполяционных многочленов невысокого порядка для операторов, заданных на множестве функциональных матриц.

Случай двух узлов. Рассмотрим пространство $C^m[T]$ квадратных матриц $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]$, для которых производная $A^{(m)}(t)=\left[a_{ij}^{(m)}(t)\right]$ порядка *m* непрерывна на отрезке [*a*, *b*] и матричный многочлен первой степени вида

$$\mathrm{P}_1(A)=B+\sum_{j=0}^{n}A(t_j)C_j+\sum_{k=0}^{m}\int_T A^{(k)}(s)P_k(t,s)ds, \tag{1}$$

где $t_0, t_1,..., t_n$ – фиксированные точки отрезка $T=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, $B=B(t)$, $C_j=C_j(t)$ $\left(j=\overline{0,n}\right)$, $P_k(t,s)$ $\left(k=\overline{0,m}\right)$ – заданные матрицы той же размерности, что и матрица $A(t)$. Пусть $F(A)$ – заданная на $C^m[T]$ функция матричного аргумента *A*. Имеет место следующая

Теорема 1. *Для формулы*

$$L_1(A)=F(A_0)+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[A(t_i)-A_0(t_i)][A_1(t_i)-A_0(t_i)]^{-1}[F(\sigma_{1i})-F(A_0)]+$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1\delta F[\sigma_{1i}(\cdot)+\tau\left(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot)\right);H_i(\cdot)]d\tau, \tag{2}$$

где $A_0=A_0(t)$, $A_1=A_1(t)$ *– узлы интерполирования,*

$$\sigma_{1i}(t)=A_0(t)+A_1(t_i)-A_0(t_i), \tag{3}$$

$$H_i(t)=A(t)-A_0(t)-A(t_i)+A_0(t_i), \tag{4}$$

выполняются условия $L_1(A_i)=F(A_i)$ $(i=0,1)$, *и она точна для матричных многочленов вида* (1).

Случай данной формулы при $n=0$ рассмотрен в [1].

Случай трех узлов. Построим аналогичную формулу второго порядка. Рассмотрим матричные многочлены первой и второй степени вида

$$\widetilde{\mathrm{P}}_1(A)=B+\sum_{j_1,\,j_2=0}^{n}\tilde{N}_{j_1 j_2}\left[A(t_{j_1})-A(t_{j_2})\right]D_{j_1 j_2}+$$

$$+\sum_{k=0}^{m}\int_{T^2}P_k(t,s_1,s_2)\left[A^{(k)}(s_1)-A^{(k)}(s_2)\right]Q_k(t,s_1,s_2)ds_1 ds_2; \qquad (5)$$

$$\widetilde{\mathrm{P}}_2(A)=\widetilde{\mathrm{P}}_1(A)+\sum_{j=0}^{n}C_{3,j}\left[A(t_{j_1})-A(t_{j_2})\right]C_{4,j}\left[A(t_{j_3})-A(t_{j_4})\right]C_{5,j}+$$

$$+\sum_{k=0}^{m}\int_{T^4}P_{k,3}(t,s)\left[A^{(k)}(s_1)-A^{(k)}(s_2)\right]P_{k,4}(t,s)\left[A^{(k)}(s_3)-A^{(k)}(s_4)\right]P_{k,5}(t,s)ds, \qquad (6)$$

где $t_0, t_1, ..., t_n$ – те же фиксированные точки отрезка $T=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, $B = B(t)$, $\tilde{N}_{j_1 j_2}=\tilde{N}_{j_1 j_2}(t)$, $D_{j_1 j_2}=D_{j_1 j_2}(t)$, $\tilde{N}_{i,j}=\tilde{N}_{i,j}(t)$ $(i=3,4,5)$, $\left(j, j_1, j_2, j_3, j_4 = =\overline{0,n}\right)$ – заданные фиксированные матрицы, $P_k(t,s_1,s_2)$, $Q_k(t,s_1,s_2)$, $P_{k,i}(t,s)$ $(i=3,4,5)$, $\left(k=\overline{0,m}\right)$ – также заданные матрицы той же размерности, что и $A(t)$, а $s=(s_1,s_2,s_3,s_4)$, $ds=ds_1 ds_2 ds_3 ds_4$. Заметим, что формула (2) инвариантна также относительно многочленов вида (5).

Пусть $F(A)$ – функция от матриц, где $A\in C^m[a,b]$. Введем следующие обозначения

$$l_{21}(A)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[A(t_i)-A_1(t_i)][A(t_i)-A_0(t_i)][A_2(t_i)-A_0(t_i)]^{-1}\times$$

$$\times\left(\left[F(\sigma_{1i}^{21})-F(A_2)\right]+\left[A_0(t_i)-A_1(t_i)\right]^{-1}\left[F(\sigma_{1i}^{01})-F(A_0)\right]\right),\quad l_{22}(A)=$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1\int_0^1\tau\delta^2F\left[\sigma_{1i}^{01}(\cdot)+\tau\left(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}^{01}(\cdot)\right)+\tau s\left(A_2(\cdot)-\sigma_{1i}^{12}(\cdot)\right);H_{i1}(\cdot)H_{i0}(\cdot)\right]d\tau ds,$$

где $\sigma_{1i}^{01}(t)=\sigma_{1i}(t)$, $\sigma_{1i}^{12}(t)=A_1(t)+A_2(t_i)-A_1(t_i)$, $\sigma_{1i}^{21}(t)=A_2(t)+A_1(t_i)-A_2(t_i)$, $H_{i0}(t)=H_i(t)$, $H_{i1}(t)=A(t)-A_1(t)-A(t_i)+A_1(t_i)$, а функции $\sigma_{1i}(t)$ и $H_i(t)$, как и раньше, задаются формулами (3), (4). Имеет место

Теорема 2. *Если существуют матрицы* $[A_1(t_i)-A_0(t_i)]^{-1}$, $[A_2(t_i)-A_0(t_i)]^{-1}$, $[A_1(t_i)-A_2(t_i)]^{-1}$ $\left(i=\overline{0,n}\right)$, *то для формулы*

$$L_2(A)=L_1(A)+l_{21}(A)+l_{22}(A),$$

где $A_i=A_i(t)$ $\left(i=\overline{0,2}\right)$ *– узлы интерполирования,* $L_1(A)$ *– многочлен, определенный формулой* (2), *выполняются условия* $L_2(A_i)=F(A_i)$ $\left(i=\overline{0,2}\right)$, *и она инвариантна относительно матричных многочленов вида* (6).

Пример. Рассмотрим интерполяционную формулу (2) в случае узлов

$$A_0(t)=\begin{bmatrix} t & t^2 \\ t^2 & t^3 \end{bmatrix},\quad A_1(t)=\begin{bmatrix} -t^3+\alpha & t^2+\beta \\ t^2+\gamma & -t+\delta \end{bmatrix}$$

для функции $F(A)=e^{A(t)}$, заданной на множестве матриц вида

$$A(t)=\theta A_0(t)+(1-\theta)A_1(t),\ \theta\in\mathbb{R}.$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – произвольные числа.

Проводя необходимые преобразования и учитывая перестановочность соответствующих матриц, при $A(t) = \theta A_0(t) + (1-\theta)A_1(t)$ будем иметь

$$L_1(A) = e^{A_0(t)} + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[A(t_i) - A_0(t_i)][A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}\left[e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)}\right] + \frac{1}{n+1}\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(t)\big(A(t) - A(t_i) + A_0(t_i) - A_0(t)\big)e^{\sigma_{1i}(t)} = A(t)B(t) + \sum_{i=0}^{n}A(t_i)B_i(t) + C(t),$$

где

$$\alpha_i(t) = \frac{1 - e^{t_i + t_i^3 - t - t^3}}{t + t^3 - t_i - t_i^3}, \quad B(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(t)e^{\sigma_{1i}(t)},$$

$$B_i(t) = \frac{1}{n+1}\left([A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}\left[e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)}\right] - \alpha_i(t)e^{\sigma_{1i}(t)}\right), \quad C(t) = e^{A_0(t)} -$$

$$-\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left(A_0(t_i)[A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}\left[e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)}\right] + \alpha_i(t)\big(A_0(t) - A_0(t_i)\big)e^{\sigma_{1i}(t)}\right).$$

Ряд других интерполяционных формул для функций от матриц получен также в [2–3].

Список цитированных источников

1. Makarov, V.L. Methods of Operator Interpolation / V.L. Makarov, V.V. Khlobystov, L.A. Yanovich. – К.: Праці Ін-ту математики НАН України, 2010. – Т. 83. – 517 с.
2. Янович, Л.А. Интерполяционные формулы первых и вторых порядков для функций матричного аргумента / Л.А. Янович, А.П. Худяков // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 1. – С. 16–22.
3. Yanovich, L.A. On one class of interpolating formulas for functions of matrix variables / L.A. Yanovich, A.P. Hudyakov // J. Numer. Appl. Math. – 2011. – № 2 (105). – P. 136–147.

УДК 517.3

О ПРОИЗВОДНОЙ ПО АДАМАРУ

Царук А.И.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Научный руководитель: Дацык В.Т., старший преподаватель

Пусть $\Im^{\alpha}_{a+}f$ и $D^{\alpha}_{a+}g$ – дробные интегралы и производные Адамара порядка *α>0* на конечном отрезке *[a,b]* действительной оси:

$$\left(\Im^{\alpha}_{a+}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{u}\right)^{\alpha-1}f(u)\frac{du}{u}, \tag{1}$$

$$\left(D^{\alpha}_{a+}g\right)(x) = \delta^n\left(\Im^{n-\alpha}_{a+}g\right)(x),\ \delta = x\frac{d}{dx},\ n = [\alpha]+1, \tag{2}$$

[1, §18.3]

Исследуем важные свойства, которые в дальнейшем можно применять для изучения проблемы существования и единственности решения задачи типа Коши для нелинейного дифференциального уравнения порядка α*>0*:

$$\left(D^{\alpha}_{a+}y\right)(x) = f[x, y(x)] \quad (n-1 < \alpha \le n) \tag{4}$$