Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – произвольные числа.

Проводя необходимые преобразования и учитывая перестановочность соответствующих матриц, при $A(t) = \theta A_0(t) + (1-\theta) A_1(t)$ будем иметь

$$L_1(A) = e^{A_0(t)} + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[A(t_i) - A_0(t_i)][A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}\left[e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)}\right] + \frac{1}{n+1}\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(t)\big(A(t) - A(t_i) + A_0(t_i) - A_0(t)\big)e^{\sigma_{1i}(t)} = A(t)B(t) + \sum_{i=0}^{n}A(t_i)B_i(t) + C(t),$$

где

$$\alpha_i(t) = \frac{1 - e^{t_i + t_i^3 - t - t^3}}{t + t^3 - t_i - t_i^3}, \quad B(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(t)e^{\sigma_{1i}(t)},$$

$$B_i(t) = \frac{1}{n+1}\left([A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}\left[e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)}\right] - \alpha_i(t)e^{\sigma_{1i}(t)}\right), \quad C(t) = e^{A_0(t)} -$$

$$-\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left(A_0(t_i)[A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}\left[e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)}\right] + \alpha_i(t)\big(A_0(t) - A_0(t_i)\big)e^{\sigma_{1i}(t)}\right).$$

Ряд других интерполяционных формул для функций от матриц получен также в [2–3].

Список цитированных источников

1. Makarov, V.L. Methods of Operator Interpolation / V.L. Makarov, V.V. Khlobystov, L.A. Yanovich. – К.: Праці Ін-ту математики НАН України, 2010. – Т. 83. – 517 с.

2. Янович, Л.А. Интерполяционные формулы первых и вторых порядков для функций матричного аргумента / Л.А. Янович, А.П. Худяков // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 1. – С. 16–22.

3. Yanovich, L.A. On one class of interpolating formulas for functions of matrix variables / L.A. Yanovich, A.P. Hudyakov // J. Numer. Appl. Math. – 2011. – № 2 (105). – P. 136–147.

УДК 517.3

О ПРОИЗВОДНОЙ ПО АДАМАРУ

Царук А.И.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Научный руководитель: Дацык В.Т., старший преподаватель

Пусть $\Im^{\alpha}_{a+} f$ и $D^{\alpha}_{a+} g$ – дробные интегралы и производные Адамара порядка α*>0* на конечном отрезке *[a,b]* действительной оси:

$$\left(\Im^{\alpha}_{a+} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(\ln\frac{x}{u}\right)^{\alpha-1} f(u)\frac{du}{u}, \tag{1}$$

$$\left(D^{\alpha}_{a+} g\right)(x) = \delta^n\left(\Im^{n-\alpha}_{a+} g\right)(x),\ \delta = x\frac{d}{dx},\ n = [\alpha] + 1, \tag{2}$$

[1, §18.3]

Исследуем важные свойства, которые в дальнейшем можно применять для изучения проблемы существования и единственности решения задачи типа Коши для нелинейного дифференциального уравнения порядка α*>0*:

$$\left(D^{\alpha}_{a+} y\right)(x) = f[x, y(x)] \quad (n - 1 < \alpha \le n) \tag{4}$$

с начальными условиями

$$\left(D_{a+}^{\alpha-k}y\right)(a+)=b_k,\quad b_k\in R\quad (k=1,2,...,n=[\alpha]). \tag{5}$$

Здесь $\left(D_{a+}^{\alpha-k}y\right)(a+)$ означает предел в правосторонней окрестности *(a,a+ε) (ε>0)* точки *a*:

$$\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(a+)=\lim_{x\to a+0}\left(D_{a+}^{\alpha-k}y\right)(x)\quad (1\le k\le n), \tag{6}$$

$$\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(a+)=\lim_{x\to a+0}\left(\Im_{a+}^{n-\alpha}y\right)(x)\quad (\alpha\ne n),\quad \left(D_{a+}^{0}y\right)(a+)=y(a)\ (\alpha=n). \tag{7}$$

Для *n*$\in$ *N={1,2,…}* обозначим через $AC_{\delta}^{n}[a,b]$ пространство функций $g(x)$, имеющих $\delta=xD\quad (D=\frac{d}{dx})$ производные до порядка *n-1* на *[a,b]*, причём $\delta^{n-1}[g(x)]$ абсолютно непрерывны на *[a,b]*:

$$AC_{\delta}^{n}[a,b]=\left\{g:[a,b]\to C:\delta^{n-1}[g(x)]\in AC[a,b],\ \delta=x\frac{d}{dx}\right\}, \tag{8}$$

где
$$AC[a,b]=\left\{h(x):\quad h(x)=C+\int_a^x\psi(t)dt,\quad \psi(t)\in L(a,b)\right\}. \tag{9}$$

Справедлива теорема:

Теорема 1. Пространство $AC_{\delta}^{n}[a,b]$ состоит из тех и только тех функций *g(x)*, которые могут быть представлены в виде:

$$g(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{n-1}\varphi(t)dt+\sum_{k=0}^{n-1}C_k\left(\ln\frac{x}{a}\right)^k, \tag{10}$$

где

$$\varphi(t)\in L(a,b),\ \varphi(t)=g_{n-1}^{|}(t),\ g_k(x)=\delta^k[g(x)],\ C_k=\frac{g_k(a)}{k!}\ (k=0,1,...,n-1).$$

Рассмотрим класс $X_c^p(a,b)\ c\in R,1\le p\le\infty,$ состоящий из комплекснозначных суммируемых по Лебегу функций *f* на *[a,b]*, для которых $\|f\|_{X_c^p}<\infty,$ где

$$\|f\|_{X_c^p}=\left(\int_a^b\left|t^c f(t)\right|^p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}\quad (1\le p<\infty,\ c\in R). \tag{11}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. Пусть $\alpha>0,1\le p\le\infty,0<a<b<\infty,c\in R.$ Тогда оператор $\Im_{a+}^{\alpha}$ ограниченно действует в $X_c^p(a,b)$ и

$$\left\|\Im_{a+}^{\alpha}f\right\|_{X_c^p}\le K\|f\|_{X_c^p}, \tag{12}$$

где
$$K=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}. \tag{13}$$

Следующие три утверждения доказаны в [1].

Лемма 1. Пусть *α>0, β>0,* $1\le p\le\infty$*, 0<a<b, c*$\in$ *R*. Тогда для $f\in X_c^p(a,b)$ имеет место полугрупповое свойство:

$$\Im_{a+}^{\alpha}\Im_{a+}^{\beta}f=\Im_{a+}^{\alpha+\beta}f. \tag{14}$$

Лемма 2. Пусть *α>0, β>0,* $1\le p\le\infty$*, 0<a<b, c*$\in$ *R*. Тогда для $f\in X_c^p(a,b)$ справедливо

$$D_{a+}^{\beta}\Im_{a+}^{\alpha}f=\Im_{a+}^{\alpha-\beta}f. \tag{15}$$

Теорема 3. Пусть $\alpha > 0,\ n = [\alpha]+1,\ g(x) \in AC^n_\delta[a,b].$ тогда дробная производная Адамара $D^\alpha_{a+} g$ существует почти всюду на *[a,b]* и может быть представлена в виде

$$\left(D^\alpha_{a+} g\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1} g'_{n-1}(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g_k(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{k-\alpha}, \quad (16)$$

где $g_k(a) \quad (k = 0,1,...,\ n-1)$ определяются из условия (10).

Для α *>0,* β *>0* справедлива формула [3,1.5 (1)]:

$$\int_a^x \left(\ln\frac{x}{u}\right)^{\alpha-1} \left(\ln\frac{u}{a}\right)^{\beta-1} \frac{du}{u} = \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \quad (17)$$

Справедлива так же следующая лемма.

Лемма 3. Пусть $\alpha > 0$. Тогда $D^\alpha_{a+}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k} = 0, \quad k = 1,2,...,1+[\alpha].$

Доказательство.

С использованием формулы (17) получим:

$$D^\alpha_{a+}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k} = \delta^n\left(\Im^{n-\alpha}_{a+}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k}\right)(x) = \delta^n\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{u}\right)^{n-\alpha-1}\left(\ln\frac{u}{a}\right)^{\alpha-k}\frac{du}{u}\right) =$$

$$= \delta^n\left(\frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-k+1)}{\Gamma(n-k+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{n-k}\right) = \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-k+1)}{\Gamma(n-k+1)}\delta^n\left(\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{n-k}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-k+1)}{\Gamma(n-k+1)}\delta^{n-1}\left(x\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{n-k}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-k+1)}{\Gamma(n-k+1)}(n-k)\delta^{n-2}\left(x\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{n-k-1}\right).$$

Через *n-k* шагов получим:

$$D^\alpha_{a+}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k} = \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-k-1)}{\Gamma(n-k-1)}(n-k)(n-k-1)...(n-k-(n-k-2))\delta^k\left(x\frac{d}{dx}\ln\frac{x}{a}\right) = 0.$$

Лемма доказана.

Определение 1. Через $\Im^\alpha_{a+}(X^1_0),\ \alpha > 0$ обозначим класс функций *f(x)*, представимых левосторонним интегралом порядка α от суммируемой функции $t\varphi(t)$:

$$f = \Im^\alpha_{a+}t\varphi, \quad t\varphi \in X^1_0(a,b).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Для того, чтобы $f(t) \in \Im^\alpha_{a+}(X^1_0),\ \alpha > 0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$f_{n-\alpha} \overset{def}{=} \Im^{n-\alpha}_{a+} f \in AC^n_\delta[a,b], \quad n = [\alpha]+1, \quad (18)$$

и

$$\left(\delta^k f_{n-\alpha}\right)(a) = 0, \quad k = 0,1,...,n-1. \quad (19)$$

Доказательство.

Необходимость.

Пусть $f = \Im^\alpha_{a+}t\varphi, \quad t\varphi \in X^1_0[a,b].$ Тогда, в силу полугруппового свойства (14), $\Im^{n-\alpha}_{a+} f = \Im^{n-\alpha}_{a+}\Im^\alpha_{a+}t\varphi = \Im^n_{a+}t\varphi.$ Значит,

$$\Im^{n-\alpha}_{a+} f = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\varphi(t)dt.$$

Поэтому, по теореме 1, $f_{n-\alpha}\Im_{a+}^{n-\alpha} f \in AC_{\delta}^{n}[a,b], \quad n=[\alpha]+1$ и справедливо (19).

Достаточность.

При выполнении условий (18) и (19) $\Im_{a+}^{n-\alpha} f = \Im_{a+}^{n} t\varphi \quad t\varphi \in X_0^1(a,b)$. В силу полугруппового свойства (14) $\Im_{a+}^{n-\alpha} f = \Im_{a+}^{n} t\varphi = \Im_{a+}^{n-\alpha}\Im_{a+}^{\alpha} t\varphi$. Тогда $\Im_{a+}^{n-\alpha}(f-\Im_{a+}^{\alpha} t\varphi)=0$. Поэтому $f=\Im_{a+}^{\alpha} t\varphi$.

Теорема доказана.

Определение 2. Пусть $\alpha>0$. Будем говорить, что функция $f(x)\in X_0^1(a,b)$ имеет суммируемую дробную производную $D_{a+}^{\alpha} f$, если $\Im_{a+}^{n-\alpha} f \in AC_{\delta}^{n}[a,b], \quad n=[\alpha]+1$.

Теорема 5. Пусть $\alpha>0$. Тогда равенство

$$D_{a+}^{\alpha}\Im_{a+}^{\alpha}\varphi=\varphi \tag{20}$$

выполняется для любой функции $\varphi(x)\in X_0^1(a,b)$, а равенство

$$\Im_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f = f(x) \tag{21}$$

для функции

$$f(x)\in \Im_{a+}^{\alpha}(X_0^1). \tag{22}$$

Если вместо (22) предположить, что $f(x)\in X_0^1(a,b)$ и имеет суммируемую производную в смысле определения 2, то

$$\Im_{a+}^{\alpha} D_{a=}^{\alpha} f = f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{n-k-1} f_{n-\alpha}\right)(a)}{\Gamma(\alpha-k)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1}, \tag{23}$$

где $n=[\alpha]+1, \quad f_{n-\alpha}(x)=\Im_{a+}^{n-\alpha} f$.

Доказательство.

Равенство (20) доказано в [1].

Докажем равенство (21).

Пусть $f(x)\in \Im_{a+}^{\alpha}(X_0^1),\ f(x)=\Im_{a+}^{\alpha} t\varphi(t),\ t\varphi\in X_0^1(a,b)$. Тогда, с использованием равенства (20), получим:

$$\Im_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f=\Im_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha}\Im_{a+}^{\alpha} t\varphi=\Im_{a+}^{\alpha} t\varphi=f(x),$$

а значит, равенство (21) доказано.

Пусть теперь $f(x)\in X_0^1(a,b)$ и имеет суммируемую производную в смысле определения 2, то есть, $\Im_{a+}^{n-\alpha} f\in AC_{\delta}^{n}[a,b]$. По теореме 1:

$$\Im_{a+}^{n-\alpha} f=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{n-1}\varphi(t)dt+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{k} f_{n-\alpha}\right)(a)}{k!}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{k}=$$

$$\Im_{a+}^{n-\alpha} t\varphi+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{k} f_{n-\alpha}\right)(a)}{k!}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{k}. \tag{24}$$

С использованием формулы (17) получим:

$$\Im_{a+}^{n-\alpha}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1}=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{u}\right)^{n-\alpha-1}\left(\ln\frac{u}{a}\right)^{\alpha-k-1}\frac{du}{u}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{n-k-1}\frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(n-k)}=\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{n-k-1}\frac{\Gamma(\alpha-k)}{(n-k-1)!},$$

и тогда

$$\Im_{a+}^{n-\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{n-k-1} f_{n-\alpha}\right)(a)}{\Gamma(\alpha-k)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{n-k-1} f_{n-\alpha}\right)(a)}{\Gamma(\alpha-k)}\Im_{a+}^{n-\alpha}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{n-k-1}f_{n-\alpha}\right)(a)}{\Gamma(\alpha-k)}\frac{\Gamma(\alpha-k)}{(n-k-1)!}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{n-k-1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{n-k-1}f_{n-\alpha}\right)(a)}{(n-k-1)!}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{n-k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{k}f_{n-\alpha}\right)(a)}{k!}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{k}.$$

Теперь равенство (24) с учётом полугруппового свойства (14) запишется в виде:

$$\Im_{a+}^{n-\alpha}f=\Im_{a+}^{n-\alpha}t\varphi+\Im_{a+}^{n-\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{n-k-1}f_{n-\alpha}\right)(a)}{\Gamma(\alpha-k)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1}.$$

Значит,

$$\Im_{a+}^{n-\alpha}\left(f-\Im_{a+}^{\alpha}t\varphi-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{n-k-1}f_{n-\alpha}\right)(a)}{\Gamma(\alpha-k)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1}\right)=0.$$

Поэтому

$$\Im_{a+}^{\alpha}t\varphi=f-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{n-k-1}f_{n-\alpha}\right)(a)}{\Gamma(\alpha-k)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1}. \qquad (25)$$

Тогда с использованием равенства (20), получим:

$$\Im_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}f=\Im_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}\left(\Im_{a+}^{\alpha}t\varphi+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{n-k-1}f_{n-\alpha}\right)(a)}{\Gamma(\alpha-k)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1}\right)=$$

$$=\Im_{a+}^{\alpha}t\varphi+\Im_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{n-k-1}f_{n-\alpha}\right)(a)}{\Gamma(\alpha-k)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1}=$$

$$=\Im_{a=}^{\alpha}t\varphi+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{n-k-1}f_{n-\alpha}\right)(a)}{\Gamma(\alpha-k)}\Im_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1}.$$

Согласно лемме 3, $D_{a+}^{\alpha}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k}=0,\quad k=1,2,...,1+[\alpha].$ Поэтому $\Im_{a+}^{\alpha}D_{a=}^{\alpha}f=\Im_{a+}^{\alpha}t\varphi$, и тогда из равенства (25) заключаем, что

$$\Im_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}f=f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{n-k-1}f_{n-\alpha}\right)(a)}{\Gamma(\alpha-k)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1}.$$

Теорема доказана.

Список цитированных источников

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск, 1987.

УДК 330.4

РЕШЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Шахно М.И.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г.Брест

Научный руководитель: Климашевская И.Н., к.ф.-м.н., доцент

Дифференциальное исчисление – широко применяемый для экономического анализа математический аппарат. Базовой задачей экономического анализа является изучение экономических величин, записываемых в виде функций. Использование абстрактных