$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{n-k-1}f_{n-\alpha}\right)(a)}{\Gamma(\alpha-k)}\frac{\Gamma(\alpha-k)}{(n-k-1)!}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{n-k-1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{n-k-1}f_{n-\alpha}\right)(a)}{(n-k-1)!}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{n-k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{k}f_{n-\alpha}\right)(a)}{k!}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{k}.$$

Теперь равенство (24) с учётом полугруппового свойства (14) запишется в виде:

$$\Im^{n-\alpha}_{a+}f=\Im^{n-\alpha}_{a+}t\varphi+\Im^{n-\alpha}_{a+}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{n-k-1}f_{n-\alpha}\right)(a)}{\Gamma(\alpha-k)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1}.$$

Значит,

$$\Im^{n-\alpha}_{a+}\left(f-\Im^{\alpha}_{a+}t\varphi-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{n-k-1}f_{n-\alpha}\right)(a)}{\Gamma(\alpha-k)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1}\right)=0.$$

Поэтому

$$\Im^{\alpha}_{a+}t\varphi=f-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{n-k-1}f_{n-\alpha}\right)(a)}{\Gamma(\alpha-k)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1}. \qquad (25)$$

Тогда с использованием равенства (20), получим:

$$\Im^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}f=\Im^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}\left(\Im^{\alpha}_{a+}t\varphi+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{n-k-1}f_{n-\alpha}\right)(a)}{\Gamma(\alpha-k)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1}\right)=$$

$$=\Im^{\alpha}_{a+}t\varphi+\Im^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{n-k-1}f_{n-\alpha}\right)(a)}{\Gamma(\alpha-k)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1}=$$

$$=\Im^{\alpha}_{a=}t\varphi+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{n-k-1}f_{n-\alpha}\right)(a)}{\Gamma(\alpha-k)}\Im^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1}.$$

Согласно лемме 3, $D^{\alpha}_{a+}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k}=0,\quad k=1,2,...,1+[\alpha].$ Поэтому $\Im^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a=}f=\Im^{\alpha}_{a+}t\varphi,$ и тогда из равенства (25) заключаем, что

$$\Im^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}f=f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{n-k-1}f_{n-\alpha}\right)(a)}{\Gamma(\alpha-k)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1}.$$

Теорема доказана.

Список цитированных источников

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск, 1987.

УДК 330.4

РЕШЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Шахно М.И.
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г.Брест
Научный руководитель: Климашевская И.Н., к.ф.-м.н., доцент

Дифференциальное исчисление – широко применяемый для экономического анализа математический аппарат. Базовой задачей экономического анализа является изучение экономических величин, записываемых в виде функций. Использование абстрактных математических рассуждений при исследовании различного рода экономических систем позволяет осуществлять их глубокий анализ и делать далеко идущие выводы относительно поведения экономических переменных, а также давать обоснованные рекомендации по оптимальному управлению экономикой.

Для демонстрации эффективности применения методов дифференциального исчисления в рамках экономической сферы рассмотрим типичную задачу об оптимальной партии товара. Пусть фирма потребляет некоторый товар с годовым объёмом потребления A. Фирма закупает товар n раз в году через равные промежутки времени $T = 1/n$ равными партиями объёмом $I0 = A/n$. На временном промежутке между двумя покупками товар расходуется полностью и равномерно с постоянной скоростью i. Если обозначить через $I(t)$ запас товара в момент t, то соотношение примет вид:

$$I(t) = I \cdot (t + m \cdot T) \quad \forall t \in \left[0; \frac{1}{n}\right), \quad m = \overline{0, n-1}, \tag{1}$$

поскольку на любом временном промежутке между двумя покупками функция запаса $I(t)$ ведёт себя одинаково.

На промежутке $[0, T)$ функция имеет вид:

$$I(t) = I_0 - i \cdot t, \text{ где } t \in [0, T). \tag{2}$$

Скорость её изменения определяет производная $I'(t) = -i$. В начальный момент времени (момент закупки) запас товара равен объёму покупки $I(0) = I_0$.

Фирма несёт убытки, связанные с хранением товара и оформлением заказов. Заметим, что запас товара $I(t)$ предполагается изменяющимся непрерывно. Как следствие среднегодовое значение запаса товара равно $I_{cp} = I_0 / 2$. Исходя из этого, получим, что годовой расход за хранение составляет:

$$c \cdot I_{cp} = \frac{c \cdot I_0}{2}, \tag{3}$$

где c – стоимость хранения одной единицы товара в течение года. Обозначим через b расходы за оформление одной покупки, тогда годовые расходы за оформление покупок составят $n \cdot b$. Суммарные годовые расходы фирмы, связанные с данным товаром, равны:

$$G = \frac{c \cdot I_0}{2} + n \cdot b. \tag{4}$$

Функцию расходов с учётом $I_0 = A / n$ можно переписать в виде:

$$G = \frac{c \cdot I_0}{2} + \frac{A \cdot b}{I_0}, \text{ где } 0 < I_0 \le A. \; (*) \tag{5}$$

Заметим, что I_0 – дискретная величина, поскольку все её возможные значения имеют вид A/n, где A – константа, n – натуральное число. Наряду с дискретной функцией расходов $(*)$ рассмотрим функцию

$$g(x) = \frac{c \cdot x}{2} + \frac{A \cdot b}{x}, \text{ где } 0 < x \le A, \tag{6}$$

задаваемую той же формулой, что и G, но с областью определения $(0, A]$. Исследуем поведение $g(x)$ на $(0, A]$, используя дифференциальные методы. Найдём интервалы монотонности, точки экстремума, наибольшее и наименьшее значение для $g(x)$. Вычислим производную и её корни.

$$g'(x) = \frac{c}{2} - \frac{A \cdot b}{x^2}, \tag{7}$$

$$\frac{c}{2}-\frac{A\cdot b}{x^2}=0. \tag{8}$$

Производная имеет на $(0, A]$ единственный корень $x_0=\sqrt{\frac{2\cdot A\cdot b}{c}}$. Установив промежутки монотонности, замечаем, что в точке x_0 функция имеет минимум. Очевидно, что значение $g(x_0)$ является наименьшим значением $g(x)$ на $(0, A]$. Вернёмся к функции расходов $G(I_0)$. График функции $g(x)$ изображает непрерывная кривая, график дискретной функции расходов $G(I_0)$ представляет собой набор точек на этой кривой. Если при некотором $n\in N$ $x_0=\frac{A}{n}$, то $I_0=x_0$ – оптимальный объём покупки, минимизирующий годовые расходы фирмы. Если же при любом $n\in N$ $x_0\neq\frac{A}{n}$, найдём m такое, что

$$\frac{A}{m+1}<x_0<\frac{A}{m}. \tag{9}$$

Такое m всегда найдётся, так как $x_0<A$, последовательность $\left\{\frac{A}{n}\right\}$ убывает и $\frac{A}{n}\to 0$ при $n\to\infty$. Поскольку $g(x)$ убывает на $(0, x_0]$ и $G(I_0)=g(I_0)$ для любого $I_0=\frac{A}{n}$, то $G\cdot\left(\frac{A}{k}\right)>G\cdot\left(\frac{A}{m+1}\right)$, когда $k>m+1$. Из возрастания $g(x)$ на $[x_0, A]$ следует, что $G\cdot\left(\frac{A}{m}\right)<G\cdot\left(\frac{A}{k}\right)$, когда $k<m$. Таким образом,

$$\min_{I_0\in(0,A]} G(I_0)=\min\left\{G\cdot\left(\frac{A}{m+1}\right), G\cdot\left(\frac{A}{m}\right)\right\} \tag{10}$$

Для функции расходов минимальные расходы фирма имеет, когда

$$I_0=\frac{A}{3},\ n=3. \tag{11}$$

УДК 519.6, 517.9

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ НЕЛИНЕЙНОМУ УРАВНЕНИЮ С ШЕСТЬЮ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Швычкина Е.Н.
Брестский государственный технический университет, г. Брест

В работе [1] рассматривается дифференциальное уравнение Шази с шестью особыми точками вида

$$w'''=\sum_{k=1}^{6}\frac{w'w''+A_k(w')^3+c_k w'}{w-a_k}+E\,w', \tag{1}$$

коэффициенты которого a_k, $(k=\overline{1,6})$ являются постоянными величинами и симметричны относительно начала координат, представлено в виде эквивалентной системы двух дифференциальных уравнений третьего порядка. А именно: