$$\frac{c}{2}-\frac{A\cdot b}{x^2}=0. \qquad (8)$$

Производная имеет на $(0,A]$ единственный корень $x_0=\sqrt{\frac{2\cdot A\cdot b}{c}}$. Установив промежутки монотонности, замечаем, что в точке x_0 функция имеет минимум. Очевидно, что значение $g(x_0)$ является наименьшим значением $g(x)$ на $(0,A]$. Вернёмся к функции расходов $G(I_0)$. График функции $g(x)$ изображает непрерывная кривая, график дискретной функции расходов $G(I_0)$ представляет собой набор точек на этой кривой. Если при некотором $n\in N$ $x_0=\frac{A}{n}$, то $I_0=x_0$ – оптимальный объём покупки, минимизирующий годовые расходы фирмы. Если же при любом $n\in N$ $x_0\neq\frac{A}{n}$, найдём m такое, что

$$\frac{A}{m+1}<x_0<\frac{A}{m}. \qquad (9)$$

Такое m всегда найдётся, так как $x_0<A$, последовательность $\left\{\frac{A}{n}\right\}$ убывает и $\frac{A}{n}\to 0$ при $n\to\infty$. Поскольку $g(x)$ убывает на $(0,x_0]$ и $G(I_0)=g(I_0)$ для любого $I_0=\frac{A}{n}$, то $G\cdot\left(\frac{A}{k}\right)>G\cdot\left(\frac{A}{m+1}\right)$, когда $k>m+1$. Из возрастания $g(x)$ на $[x_0,A]$ следует, что $G\cdot\left(\frac{A}{m}\right)<G\cdot\left(\frac{A}{k}\right)$, когда $k<m$. Таким образом,

$$\min_{I_0\in(0,A]}G(I_0)=\min\left\{G\cdot\left(\frac{A}{m+1}\right),G\cdot\left(\frac{A}{m}\right)\right\} \qquad (10)$$

Для функции расходов минимальные расходы фирма имеет, когда

$$I_0=\frac{A}{3},\ n=3. \qquad (11)$$

УДК 519.6, 517.9

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ НЕЛИНЕЙНОМУ УРАВНЕНИЮ С ШЕСТЬЮ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Швычкина Е.Н.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

В работе [1] рассматривается дифференциальное уравнение Шази с шестью особыми точками вида

$$w'''=\sum_{k=1}^{6}\frac{w'w''+A_k(w')^3+c_kw'}{w-a_k}+E\,w', \qquad (1)$$

коэффициенты которого a_k, $(k=\overline{1,6})$ являются постоянными величинами и симметричны относительно начала координат, представлено в виде эквивалентной системы двух дифференциальных уравнений третьего порядка. А именно:

$$\begin{cases} w''= f_1(z,w)w'^2 + f_2(z,w)v + f_3(w), \\ v' = -2 f_1(z,w)w'v, \end{cases} \tag{2}$$

где $f_i (i=\overline{1,3})$ функции по z и w.

Там же рассмотрен метод нахождения функций, являющихся коэффициентами искомой системы (2) [1]. В СКА *Mathematica* написан программный модуль

$$constrSyst\ emChazy\ [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6], \tag{3}$$

который находит явный вид коэффициентов системы (2) для нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка (1).

Выберем, например, в качестве значений a_k, $(k=\overline{1,6})$ соответственно величины

$$a_1 = 1,\quad a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{4},\quad a_4 = -\frac{1}{2},\quad a_5 = -\frac{1}{4},\quad a_6 = -1.$$

В результате действия модуля (3) получим следующую систему дифференциальных уравнений вида:

$$w''= \frac{1+12w^2+(1+w)(1+4w)(5+8w)}{2w+8w^3+(1+w)^2(1+4w)^2}w'^2 + v(w-1)\left(w-\frac{1}{2}\right)\left(w-\frac{1}{4}\right)\times$$

$$\times\left(w+\frac{1}{4}\right)\left(w+\frac{1}{2}\right)(w+1) - \Big(10c_1(2w-1)\Big(1+2w+16w^2+(7+47w+88w^2+$$

$$+48w^3)\Big)+(w-1)\Big(-c_2\Big(16(1+w+13w^2)+3\big(31+207w+384w^2+208w^3\big)\Big)+$$

$$+(2w-1)\Big(19\big(-1-3w+14w^2+48w^3+32w^4\big)+e\big(21+143w+274w^2+152w^3\big)+$$

$$+e\big(3+9w+38w^2\big)\Big)\Big)\Big)\Big(19\Big(\big(1+5w+4w^2\big)^2+2\big(w+4w^3\big)\Big)\Big)^{-1},$$

$$v' = -2\frac{1+12w^2+(1+w)(1+4w)(5+8w)}{2w+8w^3+(1+w)^2(1+4w)^2}w'v. \tag{4}$$

где $c_1, c_2, e-$ коэффициенты уравнения (1). Решим систему (4). Интегрируя второе равенство системы (4), найдем, что

$$v = \frac{C_1}{1+12w+33w^2+48w^3+16w^4}.$$

Подставим найденную функцию $v(z)$ в первое уравнение системы (4), которое после замены вида

$$(w'(z))^2 = y(w),\quad w''(z) = \frac{1}{2}y'(w)$$

преобразуется в линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $y(w)$. После интегрирования полученного уравнения и возвращения к исходной функции $w(z)$ запишем уравнение вида

$$w'^2 = \frac{6}{19} + C_2 + \left(\frac{52}{19} - \frac{C_1}{32} + 12C_2\right)w + 33C_2w^2 + \left(8 - \frac{C_1}{8} + 48C_2\right)w^3 + 16C_2w^4, \tag{5}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Общий интеграл последнего уравнения примет вид

$$-\left(2(r_1-r_4)F\left[Arc\sin\left[\sqrt{\frac{(r_2-r_4)(w-r_1)}{(r_1-r_4)(w-r_2)}}\right],\frac{(r_2-r_3)(r_1-r_4)}{(r_1-r_3)(r_2-r_4)}\right]\frac{r_1-r_2}{(r_1-r_4)(w-r_2)}\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{\frac{(r_2-r_4)(w-r_1)(w-r_3)(w-r_4)}{(r_1-r_3)(w-r_2)}}\right)\cdot\left(32(6+19C_2)+(1664-19C_1+7296C_2)w+\right. \tag{6}$$

$$\left.+20064C_2w^2-76(C_1-64(6C_2+1))w^3+9728C_2w^4\right)^{-1/2}=$$

$$=(r_4-r_2)(r_1-r_2)\left(\pm\frac{z}{4\sqrt{38}}+C_3\right),$$

где $F[\phi\,|\,m]$ неполный эллиптический интеграл первого рода [4], а именно:

$$F[\phi\,|\,m]=\int_0^{\phi}\left(1-m\sin^2(\theta)\right)^{-1/2}d\theta,\ \text{где}\ -\pi/2<\phi<\pi/2,$$

и

$$r_i=Root[192+608C_2+(1664-19C_1+7296C_2)\#1+20064C_2\#1^2+$$

$$+(4864-76C_1+29184C_2)\#1^3+9728C_2\#1^4,i]\ \ (i=1,2,3,4).$$

В системе *Mathematica* [2, 3] выражение *Root* – объект является точным, однако неявным выражением для корней полиномиального уравнения вида

$$192+608C_1+(1664-19C_1+7296C_2)z+20064C_2z^2+(484-76C_1+29184C_2)z^3+9728C_2z^4=0$$

Приведем здесь графическую визуализацию решения (6) при начальных условиях $w(1)=3,\ w'(1)=3,\ w''(1)=3$. Найдем значения произвольных постоянных C_1, C_2, C_3, а именно:

$$C_1=\frac{674560}{10773}, C_2=\frac{10}{10773}, C_3\approx-0{,}0413-2{,}2999\times10^{-17}i.$$

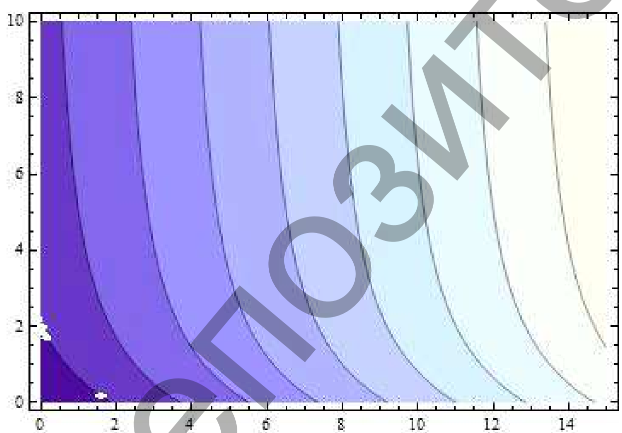

Рисунок 1

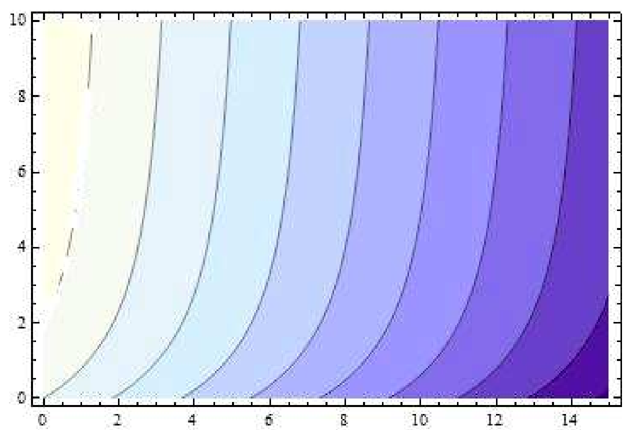

Рисунок 2

На рисунках 1 и 2 изображены графики двух ветвей общего интеграла (6).

Список цитированных источников

1. Швычкина, Е.Н. О построении системы, эквивалентной дифференциальному уравнению Шази с шестью особыми точками / Е.Н. Швычкина // Вестник Брестского университета. Серия естеств. наук. – 2010. – №2. – С. 142–148.

2. Wolfram Web Resources / ed. S. Wolfram [Electronic resource]. – Champaign, 2013. − Mode of access: www.wolfram.com − Date of access: 1.06.2013.

3. Trott, M. The *Mathematica* GuideBook for symbolics. − New York: SpringerVerlag, 2006. − 1453 p.

4. Янке, Э. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы / Э. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. − М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. − 344 с.