УДК 517.98

ТЕОРЕМА О КОМПОЗИЦИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОБОБЩЕННЫМИ СПЕКТРАЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Шпак Д.С.
Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, г. Гродно
Научный руководитель: Вувуникян Ю.М., д.ф.-м.н., профессор

Пусть $a \in R$. Через $\mathscr{E}^a(R^n)$ обозначается совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций φ на пространстве R^n, удовлетворяющих условию: $\forall \alpha \in Z_+^n\ \exists C>0: \left|\varphi^{(\alpha)}(t)\right| \le Ce^{-a|t|},\quad \forall t \in R_+^n$, где $|t| = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$ [1, с.180].

Отметим, что $\mathscr{E}^a(R^n)$ – векторное подпространство векторного пространства $C^\infty(R^n)$ – пространства всех бесконечно дифференцируемых функций на пространстве R^n.

Рассмотрим тензорное произведение $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ функций $\varphi_1 \in \mathscr{E}^a(R^{n_1})$ и $\varphi_2 \in \mathscr{E}^a(R^{n_2})$

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(t,s) = \varphi_1(t)\varphi_2(s), \qquad (1)$$

где $t = (t_1, t_2, \ldots, t_{n_1}) \in R^{n_1}$, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_{n_2}) \in R^{n_2}$.

Как показано в [1, с.183], тензорное произведение $(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \in \mathscr{E}^a(R^{n_1+n_2})$.

Объединив пространства $\mathscr{E}^a(R^n)$ с условием $a < c$ ($a, c \in R$), получаем векторное пространство $\mathscr{E}_c(R^n) = \bigcup\limits_{a<c} \mathscr{E}^a(R^n)$.

Пусть $c \in R$. Тогда обобщенной функцией экспоненциального роста на R^n степени *c* называется любой нелинейный непрерывный функционал на пространстве $\mathscr{E}_c(R^n)$ [1, с.189].

Совокупность всех обобщенных функций экспоненциального роста степени *c* образует сопряженное пространство $\mathscr{E}_c'(R^n)$ к пространству $\mathscr{E}_c(R^n)$.

В пространстве $\mathscr{E}_c'(R^n)$ как в сопряженном пространстве определены операции сложения и умножения на число, т.е.

1) если $f_1, f_2 \in \mathscr{E}_c'$, то сумма $f_1 + f_2$ определяется с помощью равенства $(f_1 + f_2)(t) = f_1(t) + f_2(t)$, $(t \in \mathscr{E}_c)$;

2) если α – число и $f \in \mathscr{E}_c'$, то произведение αf определяется с помощью равенства $(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$, $(t \in \mathscr{E}_c)$.

Определим понятия носителя, тензорного произведения и свёртки для обобщенных функций экспоненциального роста степени *c*.

Определение. Носителем обобщенной функции $f \in \mathscr{E}_c'(R^n)$ экспоненциального роста степени *c* называется наименьшее замкнутое подмножество, на котором функция f обращается в нуль.

Определение. Тензорное произведение обобщенных функций $f_1 \in \mathscr{E}_{c_1}'(R^{n_1})$ и $f_2 \in \mathscr{E}_{c_2}'(R^{n_2})$ экспоненциального роста степеней c_1 и c_2 называется функция $(f_1 \otimes f_2) \in \mathscr{E}_{c_1+c_2}'(R^{n_1+n_2})$, определяемая равенством

$$(f_1 \otimes f_2)(\varphi) = \left\langle f_1(t), \left\langle f_2(s), \varphi(t,s) \right\rangle \right\rangle = \left\langle f_2(t), \left\langle f_1(s), \varphi(t,s) \right\rangle \right\rangle, \qquad (2)$$

где $\varphi \in \mathscr{E}_c(R^{n_1+n_2})$, $t = (t_1, t_2, \ldots, t_{n_1}) \in R^{n_1}$, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_{n_2}) \in R^{n_2}$.

Определение. Пусть функция $f_1 \in \mathcal{E}_c(R^n)$ является финитной обобщенной функцией, т.е. f_1 имеет компактный носитель, а функция $f_2 \in \mathcal{E}_c(R^n)$ имеет произвольный носитель. Тогда функция $f_1 * f_2$ называется свёрткой обобщенных функций и определяется следующим равенством

$$(f_1 * f_2)(\varphi) = \langle f_1(t)\, f_2(s), \varphi(t+s) \rangle, \tag{3}$$

где $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ [2].

Отметим, что носитель обобщенной функции называется компактным, если он представляет собой ограниченное множество.

Обозначим через $\mathcal{E}'_{c+}(R^n)$={ $f \in \mathcal{E}'_c(R^n)$}.

Заметим, что пространство $\mathcal{E}'_{c+}(R^n)$ является свёрточной алгеброй.

Преобразованием Лапласа обобщенной функции $f \in \mathcal{E}'_{c+}(R^n)$ называется функция $\tilde{f}$, определяемая на множестве $\Pi_c^n = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in C^n | \operatorname{Re} \lambda_j > c, (j = 1, 2, ..., n)\}$ равенством

$$\tilde{f}(\lambda) =< f(t), e^{-\lambda t} > \quad (\lambda \in \Pi_c^n), \tag{4}$$

где $\lambda t = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + ... + \lambda_n t_n$.[1]

Приведем примеры преобразований Лапласа от некоторых функций.

Пример 1. Пусть $f = \theta$ – функция Хевисайда. Тогда имеем:

$$\tilde{\theta}(\lambda) =< \theta(t), e^{-\lambda t} >= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Пример 2. Пусть $f = \delta$ – дельта-функция. Тогда имеем:

$$\tilde{\delta}(\lambda) =< \delta(t), e^{-\lambda t} >= e^{-\lambda t} \big|_{t=0} = 1.$$

Пусть *A* – полиномиальный эволюционный оператор степени *n* вида

$$Ax = \sum_{m=1}^{n} S_m \left(a_m * x^{\otimes m} \right) \quad (x \in X), \tag{5}$$

где a_m – импульсная характеристика порядка *m*, ($a_m \in \mathcal{E}'_{c+}(R^n)$).

Применяя обобщенное преобразование Лапласа к импульсной характеристике a_m порядка *m*, получаем спектральную характеристику $\tilde{a}_m$ порядка *m* эволюционного оператора *A*.

Рассмотрим композицию полиномиальных эволюционных операторов *A* и *B,* где соответственно $Bx = \sum_{p=1}^{l} S_p \left(b_p * x^{\otimes p} \right) \quad (x \in X)$.

Сформулируем основную теорему о спектральных характеристиках композиции полиномиальных эволюционных операторов.

Теорема*. Пусть A – полиномиальный эволюционный оператор степени n, заданный спектральными характеристиками* $\tilde{a}_m$, *B – полиномиальный эволюционный оператор степени l, заданный спектральными характеристиками* $\tilde{b}_p$. *Тогда спектральная характеристика* $\tilde{f}_m$ *оператора композиции* $F = B \circ A$ *будет определяться по формуле:*

$$\tilde{f}_n(\lambda) = \sum_{p=1}^{nl} \sum_{m_1+m_2+...+m_p=m} \tilde{b}_p \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_{m_1}, \lambda_{m_1+1} + \lambda_{m_1+2} + ... + \lambda_{m_1+m_2}, ..., \\ \lambda_{m_1+m_2+...+m_{p-1}+1} + \lambda_{m_1+m_2+...+m_{p-1}+2} + ... + \lambda_{m_1+m_2+...+m_p} \end{pmatrix} \times$$

$$\times\tilde{a}_{m_1}\left(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{m_1}\right)\tilde{a}_{m_2}\left(\lambda_{m_1+1},\lambda_{m_1+2},\dots,\lambda_{m_1+m_2}\right)\times\dots\times$$
$$\times\tilde{a}_{m_p}\left(\lambda_{m_1+m_2+\dots+m_{p-1}+1},\lambda_{m_1+m_2+\dots+m_{p-1}+2},\dots,\lambda_{m_1+m_2+\dots+m_p}\right),$$
$$\lambda=\left(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{m_1+m_2+\dots+m_p}\right)\in\Pi_c^m$$

Список цитированных источников

1. Вувуникян, Ю.М. Эволюционные операторы с обобщёнными импульсными и спектральными характеристиками: монография / Ю.М. Вувуникян. – Гродно: ГрГУ, 2007. – 224 с.

Шубин, М.А. Лекции об уравнениях математической физики. – 2-е изд., испр. – М.: МЦНМО, 2003. – 303 с.

УДК 517.925+

О ПОСТРОЕНИИ И ВИЗУАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧИНИ И РИККАТИ

Ярошук Ю.Н.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Научный руководитель: Чичурин А.В., д.ф.-м.н., доцент

Рассмотрим уравнение Чини (Chini) [1], которое является обобщением канонических форм дифференциальных уравнений Абеля и Риккати. Это уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=ay^s-bx^k, \tag{1}$$

где a,b,s,k – постоянные. Различные значения параметров, при которых уравнение (1) интегрируется в квадратурах, приведены в [1]. Там же показано, что с помощью замены:

$$x=(w'_x)^{\frac{1}{k}};\, y=\lambda(\frac{w}{z})^{\frac{1}{s}};\, \lambda=(\frac{b}{a})^{\frac{1}{s}}$$

уравнение (1) сводится к обобщенному уравнению Эмдена-Фаулера, которое может быть исследовано, например, с помощью метода дискретно-группового анализа [2]. Аналитическое решение уравнения Чини может быть найдено для некоторых наборов значений параметров с помощью системы Mathematica 9.0. Например, для уравнения

$$\frac{dx}{dt}=5y^4-bx^{-\frac{4}{3}},$$

вводя команду $\mathrm{DSolve}[y'[x]==5y^4-bx^{-\frac{4}{3}},y[x],x]$, находим общее решение в неявной форме

$$\mathrm{Solve}[-15\,\mathrm{RootSum}[-15+\frac{53}{4}(\frac{1}{\mathrm{b}})^3\frac{1}{4}\#1-15\,\#14\&,\mathrm{Log}[-\#1+\frac{51}{4}\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\mathrm{b}}\frac{1}{4}y(x)/$$

$$/(\frac{53}{4}\frac{1}{\mathrm{b}})^3\frac{1}{4}-60\,\#13)\&]==\mathrm{C}[1]+(\frac{51}{4}x\,\mathrm{Log}[x])/(\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\mathrm{b}})\frac{3}{4},y[x]],$$

где $\mathrm{RootSum[f,\ form]}$ представляет собой сумму вида $\mathrm{form}[x]$ для всех x, удовлетворяющих полиномиальному уравнению $\mathrm{f}[x]=0$. На рис. 1 приведём графики частных решений, соответствующие значениям $\mathrm{C}[1]=-8,-6,-4,-2,0,2,4$.