$$\times\tilde{a}_{m_1}\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{m_1}\right)\tilde{a}_{m_2}\left(\lambda_{m_1+1},\lambda_{m_1+2},...,\lambda_{m_1+m_2}\right)\times...\times$$

$$\times\tilde{a}_{m_p}\left(\lambda_{m_1+m_2+...+m_{p-1}+1},\lambda_{m_1+m_2+...+m_{p-1}+2},...,\lambda_{m_1+m_2+...+m_p}\right),$$

$$\lambda=\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{m_1+m_2+...+m_p}\right)\in\Pi_c^m$$

Список цитированных источников

1. Вувуникян, Ю.М. Эволюционные операторы с обобщёнными импульсными и спектральными характеристиками: монография / Ю.М. Вувуникян. – Гродно: ГрГУ, 2007. – 224 с.

Шубин, М.А. Лекции об уравнениях математической физики. – 2-е изд., испр. – М.: МЦНМО, 2003. – 303 с.

УДК 517.925+

О ПОСТРОЕНИИ И ВИЗУАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧИНИ И РИККАТИ

Ярошук Ю.Н.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Научный руководитель: Чичурин А.В., д.ф.-м.н., доцент

Рассмотрим уравнение Чини (Chini) [1], которое является обобщением канонических форм дифференциальных уравнений Абеля и Риккати. Это уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=ay^s-bx^k, \tag{1}$$

где a,b,s,k – постоянные. Различные значения параметров, при которых уравнение (1) интегрируется в квадратурах, приведены в [1]. Там же показано, что с помощью замены:

$$x=(w_x')^{\frac{1}{k}};y=\lambda(\frac{w}{z})^{\frac{1}{s}};\lambda=(\frac{b}{a})^{\frac{1}{s}}$$

уравнение (1) сводится к обобщенному уравнению Эмдена-Фаулера, которое может быть исследовано, например, с помощью метода дискретно-группового анализа [2]. Аналитическое решение уравнения Чини может быть найдено для некоторых наборов значений параметров с помощью системы Mathematica 9.0. Например, для уравнения

$$\frac{dx}{dt}=5y^4-bx^{-\frac{4}{3}},$$

вводя команду $\mathrm{DSolve}[y'[x]==5y^4-bx^{-\frac{4}{3}},y[x],x]$, находим общее решение в неявной форме

$$\mathrm{Solve}[-15\,\mathrm{RootSum}[-15+\frac{53}{4}(\frac{1}{\mathrm{b}})^3\frac{1}{4}\#1-15\,\#14\&,\mathrm{Log}[-\#1+\frac{51}{4}\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\mathrm{b}}\frac{1}{4}y(x)/$$

$$/(\frac{53}{4}\frac{1}{\mathrm{b}})^3\frac{1}{4}-60\,\#13)\&]==\mathrm{C}[1]+(\frac{51}{4}x\,\mathrm{Log}[x])/(\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\mathrm{b}})\frac{3}{4},y[x]],$$

где $\mathrm{RootSum}[\mathrm{f},\ \mathrm{form}]$ представляет собой сумму вида $\mathrm{form}[\mathrm{x}]$ для всех x, удовлетворяющих полиномиальному уравнению $\mathrm{f}[x]=0$. На рис. 1 приведём графики частных решений, соответствующие значениям $\mathrm{C}[1]=-8,-6,-4,-2,0,2,4$.

Репозиторий БрГУ

Рассмотрим уравнение Риккати, которое всегда может быть преобразовано в линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Если это линейное уравнение может быть решено с помощью элементарных или специальных функций, то решение уравнения Риккати может быть так же найдено.

Приведём пример интегрирования уравнения Риккати с помощью специальной функции

$$\frac{dy}{dx} = \lambda\sin^3(\lambda x) + \lambda\sin(\lambda x)y^2(x)\,, \tag{2}$$

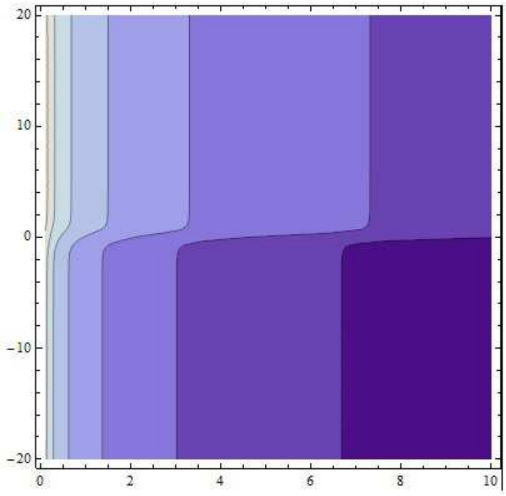

Рисунок 1

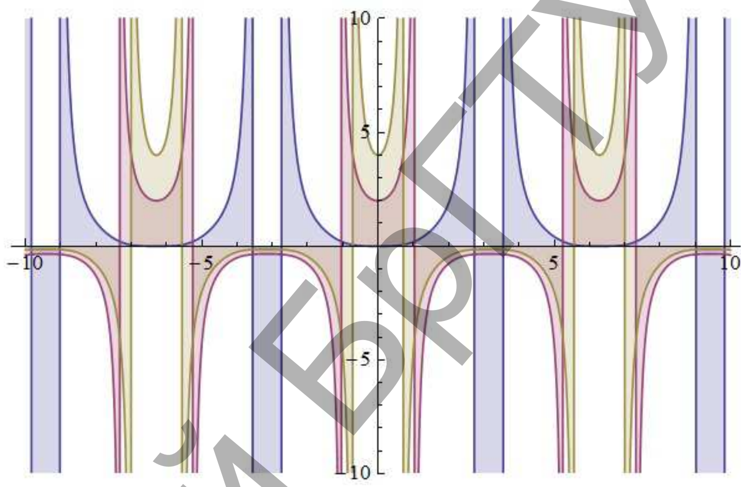

Рисунок 2

где λ – параметр. Очевидно, что частным решением уравнения (2) является функция $y(x) = -\cos(\lambda x)$.

Тогда замена

$$y(x) = z(x) - \cos(\lambda x) \tag{3}$$

приводит уравнение (2) к уравнению Бернулли

$$\lambda\sin(2x\lambda)z(x) + z'(x) = \lambda\sin(\lambda x)z^2(x)\,,$$

общее решение которого может быть записано в виде

$$z = \frac{2de^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Cos}[2x\lambda]}}{\left(2e - d\sqrt{\pi}\,\mathrm{Erfi}[1] + d\sqrt{\pi}\ \mathrm{Cos}[x\lambda]\mathrm{Erfi}\left[\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Sec}^2[x\lambda]}}\right]\sqrt{\mathrm{Sec}^2[x\lambda]}\ \right)}\,, \tag{4}$$

где Erfi– специальная функция, определяемая как мнимая часть функции ошибок, а параметр d определяется из начального условия $z(0) = \mathrm{d}$. Подставляя (4) в (3), находим общее решение уравнения (2). Приведём графики нескольких частных решений при $\mathrm{d} = 1, 3, 5$ (рис. 2). Для анимации решений уравнения (2) в зависимости от значений параметра λ и начального значения d воспользуемся командой

$$\mathrm{Manipulate[Plot[Evaluate[(z[}x\mathrm{] - Cos[}x\lambda\mathrm{])/.sol/.\{}\lambda\mathrm{-> parametr, d-> z_0\}], \{}x\mathrm{,-10,10\}, PlotRange-> \{-10,10\}, Filling-> Axis], \{parametr,1,5\}, \{z_0,0,1,5\}]}$$

Список цитированных источников

3. Зайцев, В.Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полялнин. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

4. Зайцев, В.Ф. Дискретно-групповые методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / В.Ф. Зайцев, А.В. Флегонтов. – Л.: ЛИИАН, 1991.

5. Wolfram [Электронный ресурс]. – 2013. – Режим доступа: http://www.wolfram.com/learningcenter/tutorialcollection/DifferentialEquationSolvingWithDSolve/

репозиторий БрГТУ