В.С. Монахов [1] ввел понятие нормального ранга p-группы P следующим образом:

$$r_n(P) = \max_{X \lhd P} \log_p |X/\Phi(X)|.$$

Здесь $\Phi(X)$ – подгруппа Фраттини группы X, а запись $X \lhd P$ означает, что X – нормальная подгруппа группы P.

Очевидно, что для нечетного простого числа p класс p-групп, у которых нормальный ранг ≤2 шире, чем класс всех бициклических p-групп. Так, экстраспециальная группа S порядка 27 имеет нормальный ранг, равный 2, но S не является бициклической. Кроме того, существуют бициклические 2-группы, которые имеют нормальный ранг 3. Так, группа

$$G = \langle a,b,c \mid a^2 = b^8 = c^2 = 1, [a,b] = c, [b,c] = b^4, [a,c] = 1 \rangle$$

является бициклической и $r_n(G) = 3$. При этом класс 2-групп, у которых нормальный ранг ≤3 шире, чем класс всех бициклических 2-групп.

В работе [2] получены оценки инвариантов разрешимой группы G с бициклическими силовскими подгруппами кофакторов ее подгрупп.

Доказана следующая

Теорема. *Пусть G – разрешимая группа, у которой силовские p-подгруппы кофакторов ее подгрупп имеют нормальный ранг ≤2 для нечетного p и нормальный ранг ≤3* для p =2. *Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6 и нильпотентная длина группы G не превышает 4.*

Список цитированных источников

1. Монахов, В.С. О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга / В.С. Монахов // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2002. – Том 46. – № 2. – С. 25–28.
2. Елец, А.Ю. О разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами кофакторов их подгрупп / А.Ю. Елец // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XVIII Республиканской научной конференция студентов и аспирантов, Гомель, 23–25 марта 2015 г. / ГГУ им. Ф. Скорины; редкол.: О.М. Демиденко [и др.]. – Гомель, 2015. – С. 52.

УДК 519.6+517.983

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ В НЕЯВНОМ ПРОЦЕССЕ ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ I РОДА

Дорогокупец П.И.

Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, г.Брест

Научный руководитель: Матысик О.В., к.физ.-мат.н., доцент

Для решения в гильбертовом пространстве операторного уравнения I рода

$$Ax = y_\delta \quad (1)$$

с положительным ограниченным самосопряжённым оператором A (0 не является его собственным значением, но $0 \in \mathrm{Sp}A$, и, следовательно, рассматриваемая задача некорректна) используем итерационный процесс неявного типа

$$\left(E + \alpha^2 A^2\right) x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta, \; x_{0,\delta} = 0. \quad (2)$$

Здесь E — тождественный оператор, $\|y - y_\delta\| \le \delta$.

Теорема. Итерационный процесс (2) при условии $\alpha > 0$ сходится, если выбирать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ так, чтобы $n\delta \to 0$ при

$n \to \infty$, $\delta \to 0$. Если решение x уравнения (1) истокообразно представимо, т.е. $x = A^s z, s > 0$, то при $\alpha > 0$ для метода (2) справедлива оценка

$$\left\| x - x_{n,\delta} \right\| \le max \left\{ s^s (2n\alpha e)^{-s}, \frac{M^s (1-\alpha M)^{2n}}{\left(1+\alpha^2 M^2\right)^n} \right\} \|z\| + 2n\alpha\delta.$$

Замечание. Так как для достаточно больших n $\frac{M^s (1-\alpha M)^{2n}}{\left(1+\alpha^2 M^2\right)^n} \le s^s (2n\alpha e)^{-s}$, то для этих n справедлива оценка

$$\left\| x - x_{n,\delta} \right\| \le s^s (2n\alpha e)^{-s} \|z\| + 2n\alpha\delta. \quad (3)$$

Оптимальная по n оценка для (3) имеет вид

$$\left\| x - x_{n,\delta} \right\|_{опт} \le (1+s) e^{-s/(s+1)} \delta^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \quad (4)$$

и получается при $n_{опт} = s(2\alpha)^{-1} e^{-s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \delta^{-1/(s+1)}$.

Сравним предложенный метод с методом регуляризации. Метод регуляризации для уравнения (1) эквивалентен решению уравнения $A^2 x_{\tau,\delta} + \tau x_{\tau,\delta} = Ay_\delta$. Для истокообразного точного решения оценка погрешности этого метода имеет вид $\left\| x_{\tau,\delta} - x \right\| \le \delta\tau^{-\frac{1}{2}} + \tau^{\frac{s}{2}} \|z\|$ [1]. При $\tau_{\text{опт}} = s^{-\frac{2}{s+1}} \delta^{\frac{2}{s+1}} \|z\|^{-\frac{2}{s+1}}$ получаем оптимальную оценку

$$\left\| x_{\tau,\delta} - x \right\|_{\text{опт}} \le (1+s) s^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}}. \quad (5)$$

Для неявного метода (2) при больших n оптимальная оценка имеет вид (4) и получается при $\alpha_{\text{опт}} = 2^{-1} s\, n_{\text{опт}}^{-1} e^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{-\frac{1}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}}$. Сравнение $\left\| x_{\tau,\delta} - x \right\|_{\text{опт}}$ с $\left\| x - x_{n,\delta} \right\|_{\text{опт}}$ показывает, что при $s = 1; 2$ оценки отличаются только константами, причём при *s* = 1 оценка (4) меньше оценки (5) в 1,65 раза, а при $s = 2$ – в 1,2 раза.

Используя метод регуляризации, приходится обращать оператор $A^2 + \tau_{\text{опт}} E$, а используя метод (2) – $\left(A^2 + \frac{1}{\alpha_{\text{опт}}^2} E \right) \alpha_{\text{опт}}^2$. Очевидно, обращение тем легче, чем больше коэффициент при E. Расчёты показывают, что при $s = 1$ величина $\frac{1}{\alpha_{\text{опт}}^2}$ больше $\tau_{\text{опт}}$ примерно в 11 раз, а при $s = 2$ – примерно в 6 раз, следовательно, обратить оператор в методе (2) легче.

Список цитированных источников

1. Морозов, В.А. О выборе параметра при решении функциональных уравнений методом регуляризации / В.А. Морозов // Доклады АН СССР. – 1967. – Т. 176. – № 6. – С. 1225–1228.

Репозиторий БрГТУ